高中数学补充教材

北京教育科学研究院基础教育教学研究中心 编

概率与统计

GAILÜ YU TONGJI

首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

高中数学补充教材

北京教育科学研究院基础教育教学研究中心　编

概率与统计

GAILÜ YU TONGJI

首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

高中数学补充教材

概率与统计

北京教育科学研究院基础教育教学研究中心　编

责任编辑　刘晓峰
首都师范大学出版社出版发行
地　址　北京西三环北路 105 号
邮　编　100037
电　话　68418523(总编室)　68982468(发行部)
网　址　cnuph. com. cn
E-mail　master @ cnuph. com. cn
北京嘉实印刷有限公司印刷
全国新华书店发行
版　次　2007 年 6 月第 2 版
印　次　2007 年 6 月第 1 次印刷
ISBN　978-7-81119-095-3
开　本　787mm×1092mm　1/16
印　张　11.5
字　数　121 千
定　价　18.60 元

版权所有　违者必究
如有质量问题　请与出版社联系退换

前言

高中数学是义务教育后普通高中的一门主要课程，应使学生学好从事社会主义现代化建设和进一步学习所必需的基础知识、基本技能、基本思想和方法，提高数学思维能力，培养应用意识和创新意识。

为了全面提高我市高中数学学科的教学质量，全面推进素质教育，经北京市教委领导批准，北京教育科学研究院基础教育教学研究中心中学数学教研室组织编写了这套高中数学补充教材，供高中数学教师和学生在教与学时参考使用。

从2006年4月起，我们组织北京市一批特级教师对这套数学补充教材进行了修订。这次修订，以《全日制普通高级中学数学教学大纲》为依据，参考《普通高中数学课程标准(实验)》，从高中数学教学的重点或难点章节中精选出10个专题，分编为10册出版：《函数》、《直线和平面》、《概率与统计》、《向量》、《数列》、《不等式》、《圆锥曲线》、《思路与方法》、《应用性问题》、《开放与探究性问题》。其中，《概率与统计》、《思路与方法》是第一次编写出版。

这套补充教材力求体现课程改革的精神，适应高考改革的要求。在内容的安排上，加强了多样性和选择性，注重知识的系统性和深刻性；强调夯实基础，注重能力培养；配备的例题、习题力求具备典型性、层次性和时代感。教师可根据学生的实际情况和教学需要，在必修课、选修课或课外活动中选择使用。

这套高中数学补充教材的编者，全部都是北京市特级教师。他们是（以姓氏笔划为序）：丁益祥、马成瑞、王人伟、王建民、王贵军、刘美伦、乔荣凝、何乃忠、李久省、谷丹、邴介夫、邵光砚、明知白、金宝铮、范登辰、周建华、郭玉山、郭立昌、段云鑫、梁丽平、曹福海、隋丽丽、储瑞年、蒋佩锦、薛川坪、鲁彬等老师。

北京市高中数学补充教材主编曹福海，副主编刘美伦、郭立昌。

《概率与统计》的编者：第一章梁丽平老师；第二章王贵军老师；第三章隋丽丽老师；小结王贵军老师。由郭立昌老师统稿。

在编写过程中，我们进行了多次研究讨论，吸收了许多教师宝贵的教学经验，力求既有利于教师教，又有利于学生学。但是由于我们水平有限，仍会有许多不足之处，衷心期望使用这套补充教材的教师与学生提出宝贵意见。

编　者

2007年4月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

MULU

第一章

概 率

当购买彩票时，总希望自己中大奖，但能否中奖，结果是不确定的. 当投资股票时，预期得到较高的收益率，但不可能确切地预测出收益率. 现实生活中，有很多这样的事情，能否成功具有不确定性，概率就是对某一特定事件出现可能性大小的一种数值的度量，因此概率论为解决这种不确定性问题提供了有效的方法. 本章将学习如何用概率来度量不确定性.

1.1 随机事件的概率

1. 随机事件

请看下面的一些事件.

(1)晴朗的早晨，太阳从东方升起.

(2)在标准大气压下，且温度低于 0℃时，冰融化.

(3)抛掷一枚硬币，出现正面向上.

(4)从一副扑克牌中任意抽取一张，抽得红桃 K.

可以看到：事件(1)是必然要发生的；(2)是不可能发生的；(3)、(4)是可能发生也可能不发生的.

在一定的条件下必然要发生的事件，称为**必然事件**，如(1).

在一定的条件下不可能发生的事件，称为**不可能事件**，如(2).

在一定的条件下可能发生也可能不发生的事件，称为**随机事件**，如(3)、(4). 随机事件常用大写字母A，B，C…表示.

应该注意的是：事件的结果是相对于“一定条件”而言的，因此，要弄清某一事件，就必须明确何为事件发生的条件，何为在此条件下产生的结果. 例如，在(3)中抛掷一枚硬币，这是条件；而硬币落地时，出现正面向上则为结果.

例1 判断下列事件的类型，并指出其中随机事件中的条件和结果.

(1)从一批次品率为1%的产品中随机抽取一个，得到次品.

(2)两个足球队比赛，其中一方获胜或踢成平局.

(3)掷一枚骰子，落地时向上的点数为大于7点的数.

解 (1)为随机事件. 条件：从一批次品率为1%的产品中随机抽取一个；结果：得到次品.

(2)为必然事件.

(3)为不可能事件.

随机事件的条件每实现一次，便称为**一次试验**. 例如，从一副54张的扑克牌中任意抽取一张，并观察其结果(纸牌的数字和花色)，这一过程便可视作一次试验.

例2 下列随机事件中，一次试验可以是什么？

(1)某人打靶，5发3中.

(2)一个袋子中装有大小、形状完全相同的10个红球、5个白球，某人从中随机取球，每次取一个球，取出后先记录球的颜色，然后放回袋中，再进行下一次取球，共取了5次. 结果显示：5次中有4次取得白球，1次取得红球.

解 (1)某人打靶，击中与不击中是一个随机事件，因此，可以把“某人打一次靶，并观察是否击中”视作一次试验，于是，该人共进行了5次试验.

(2)某人取一次球，取出什么颜色的球是不确定的，是一个随机事件，因此，可以把“取一次球，并观察颜色”视作一次试验，则本题中共进行了5次试验.

说明 以什么视作一次试验，实际上是根据具体问题的要求而定的，例如，在(1)中也可以把“打5次靶，并观察每次是否击中”视作一次试验，此时，试验的结果就是“5发3中”.

2. 频率与概率

随机事件在一次试验中是否发生并不能事先确定，但是人们的长期实践表明：在相同条件下的大量重复试验中，它的发生又会呈现一定的规律性.

(1)历史上有不少人做过抛掷硬币的大量重复试验，结果如表1所示.

表1 抛掷硬币试验结果

实验者	抛掷次数(n)	正面向上次数(m)(频数)	频率$\left(\frac{m}{n}\right)$
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
费勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
罗曼诺夫斯基	72 088	36 124	0.501 1

可以看到，当抛掷硬币的次数很多时，出现正面的频率值是稳定的，接近于常数 0.5，在此值的附近摆动.

(2)人们在生活实践中已经认识到：英语中某些字母出现的频率要高于另外一些字母，但 26 个英文字母各自出现的频率有无规律可循？有人对各类典型的英文报刊中字母出现的频率做了大量的统计，发现各个字母的使用频率相当稳定(见表 2)，这项研究对于计算机键盘的设计，信息的编码等方面都是非常有用的.

表 2　英文字母的使用频率

字母	使用频率	字母	使用频率	字母	使用频率
E	0.126 8	L	0.039 4	P	0.018 6
T	0.097 8	D	0.038 9	B	0.015 6
A	0.078 8	U	0.028 0	V	0.010 2
O	0.077 6	C	0.026 8	K	0.006 0
I	0.070 7	F	0.025 6	X	0.001 6
N	0.070 6	M	0.024 4	J	0.001 0
S	0.063 4	W	0.021 4	Q	0.000 9
R	0.059 4	Y	0.020 2	Z	0.000 6
H	0.057 3	G	0.018 7		

这些事例都表明：在相同条件下，大量重复进行同一试验时，事件 A 发生的频率$\frac{m}{n}$(其中 n 为重复试验的次数，m 为事件 A 发生的次数)总是接近于某个常数，在此值的附近摆动，这时把这个常数称为**事件 A 的概率**，**记作 $P(A)$**.

由于 $0\leqslant m\leqslant n$，所以，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$. 不难看出：必然事件的概率为 1，不可能事件的概率为 0，从这个意义上，必然事件和不可能事件都可以看做是随机事件的

特例.

事实上，如果把一次试验的所有可能的结果组成的集合记为Ω，那么随机事件就是Ω的一个子集，Ω就是必然事件，而空集$\varnothing$就是不可能事件.

概率从数量上反映了一个事件发生的可能性的大小.例如，抛掷一枚硬币出现“正面向上”的概率为0.5，指的是出现“正面向上”的可能性为50%.

请同学们思考：这是否意味着，抛掷10枚硬币，恰有5枚正面向上呢?

以上定义也称为**概率的频率定义**(**或概率的统计定义**). 这种定义方法的基础是：随着重复试验次数的增加，随机事件A出现的频率呈现稳定性. 这种定义方法还提供了求一个事件的概率的基本方法：进行大量重复试验，用这个事件发生的频率近似地作为它的概率.

例3 判断下面说法的正误.

(1)设有一批产品，其次品率为1%，则从中任取200件产品，必有2件是次品.

(2)随机事件发生的频率就等于随机事件发生的概率.

分析 (1)、(2)均是错误的. 所谓随机试验，就是其结果具有不确定性，但在大量重复试验时又呈现规律性.所以，任取200件产品，有可能1件次品都没有，也有可能得到多于2件的次品；概率是大量重复试验中频率的稳定值，但不一定等于频率. 例如，抛掷2次硬币，有可能全都正面向上，于是正面向上的频率就是1，能否说概率就是1呢? 显然不可以.

3. 等可能事件发生的概率

前面学习了用频率方法来定义概率，但这种方法的

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

缺点是：在现实世界里，人们无法把一个实验无限次地重复做下去，因此要精确获得频率的稳定值是困难的，人们只能通过大量重复试验，求得其近似值.

事实上，对于某些随机事件，也可以不通过重复试验，而只是从一次试验中可能出现的结果的分析来计算其概率.

例如，抛掷一枚硬币，可能出现的结果有“正面向上”、“反面向上”这 2 种结果. 由于硬币的质量是均匀的，可以认为出现这 2 种结果的可能性是相等的，即可以认为出现“正面向上”的概率是$\frac{1}{2}$，出现“反面向上”的概率也是$\frac{1}{2}$. 这与前面表 1 中提供的大量重复试验的结果是一致的.

又如，抛掷一枚骰子，它落地时向上的点数可能是情形 1，2，3，4，5，6 之一，即可能出现的结果有 6 种. 由于骰子的质量是均匀的，可以认为这 6 种结果出现的可能性都相等，即出现每一种结果的概率都是$\frac{1}{6}$. 这种分析与大量重复试验的结果也是一致的.

一般的，如果随机事件具有以下的特点：

(1)一次试验中，可能出现的结果只有有限个，每次试验只出现其中的一个结果；

(2)所有结果出现的可能性都相等.

那么，可以通过以下分析结果的方法来计算其概率.

把一次试验连同其中可能出现的每一个结果都称为**一个基本事件**，通常此试验中的某一事件 A 由几个基本事件组成. 如果一次试验中可能出现的结果有 n 个，即此试验由 n 个基本事件组成，而且所有结果出现的可能

性都相等，那么每一个基本事件的概率都是$\frac{1}{n}$. 如果某个事件 A 包含的结果有 m 个，那么事件 A 的概率$P(A)=\frac{m}{n}$.

从集合的角度来看，如果把一次试验中，等可能出现的 n 个结果组成一个集合 I，这 n 个结果就是集合 I 的 n 个元素. 各基本事件均对应于集合 I 的含有 1 个元素的子集，包含 m 个结果的事件 A 对应于 I 的含有 m 个元素的子集 A. 因此，事件 A 发生的概率是子集 A 的元素个数(记作 $\mathrm{card}(A)$)与集合 I 的元素个数(记作 $\mathrm{card}(I)$)的比值，即

$$\boxed{P(A)=\frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(I)}=\frac{m}{n}.}$$

以上所描述的模型称为**古典概率模型**，简称为**古典概型**.

这种定义概率的方法是概率论历史上最先开始研究的情形. 它简单、直观，不需要做大量的重复试验，而是在经验事实的基础上，对被考察实践的可能性进行逻辑分析后得出该事件的概率. 这种方法中，求事件 A 的概率主要用到计算集合的元素个数，因此，计算中经常用到排列组合的知识.

例 4 抛掷两枚质地均匀的硬币，求“一枚出现正面，另一枚出现反面”的概率.

分析 首先设想两枚硬币是不同的，一枚编号为 C，另一枚编号为 D.

抛掷一枚硬币，可能出现正面或反面这 2 种结果. 因而，根据乘法原理，如果把抛掷 C，D 两枚硬币视作

一次试验，则可能出现的结果数共4种：C正D正、C正D反、C反D正、C反D反．由于每枚硬币质量都是均匀的，所以每种结果出现的可能性都相等．又在所有等可能的结果中，一枚出现正面、一枚出现反面这一事件包含的结果数是2，从而可求出这个事件的概率为0.5.

那么，如果去掉条件"两枚硬币不同"，所求事件的概率是否会发生变化呢？应该不会．因为事实上，C，D只是一种人为的编号，而编号与否，对两枚硬币出现正反面的结果没有任何影响，所以，概率也不会改变.

●**解** 把"抛掷两枚质量均匀的硬币"视作一次试验，则试验的结果有"正正、正反、反正、反反"4种，这4种结果是等可能的.

设"一枚出现正面，另一枚出现反面"为事件A，则事件A所包含的基本事件有2种，所以

$$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

●**说明** 本例极易出现错误．初学者往往以为：抛掷两枚硬币，只会出现3种结果：正正、正反、反反，由此得出$P(A)=\frac{1}{3}$的错误结论．其实，这种错误的解法在于没有理解**古典概型**的前提——要求每个基本事件出现的可能性都相等.

如果以正正、正反、反反作为基本事件的结果，显然这3个基本事件不是等可能的，这就不符合等可能事件(古典概型)的要求，因此，不能应用相应的概率计算公式.

在处理上述问题时，为了构造等可能事件，常常把两枚硬币(C，D)视作是不同的，因此正反(C正D反)，

与反正（C 反 D 正）也就是两种不同的试验结果了.

例5 5 人并排坐在一起照相，分别计算：

(1)甲恰好坐在中间的概率.

(2)甲、乙两人恰好坐在一起的概率.

(3)甲坐在中间，乙坐在一端的概率.

解 把 5 人并排坐在一起照相，观察他们的座位次序视作一次试验，则他们 5 人的每种不同的排列就都是一个基本事件，于是基本事件的个数共有 A_5^5 个. 由排列组合的原理知道这些基本事件都是等可能出现的.

设“甲恰好坐在中间”为事件 A，“甲、乙两人恰好坐在一起”为事件 B，“甲坐在中间，乙坐在一端”为事件 C，则事件 A、B、C 所包含的基本事件的个数依次为：A_4^4，$2A_4^4$，$2A_3^3$，所以，相应的概率为

$$P(A)=\frac{A_4^4}{A_5^5}=\frac{1}{5}，P(B)=\frac{2A_4^4}{A_5^5}=\frac{2}{5}，P(C)=\frac{2A_3^3}{A_5^5}=\frac{1}{10}.$$

例6 现有一批产品共 10 件，其中 8 件为正品，2 件为次品.

(1)如果从中抽取一件，然后放回，再任取一件然后放回，再任取一件，求连续 3 次取出的都是正品的概率.

(2)如果从中一次取 3 件，求 3 件都是正品的概率.

解 (1)因为每次抽取后又将产品放回，所以，每次抽取都有 10 种可能. 如果把连续抽取 3 次视作一次试验，则所有基本事件的个数为 10^3，而且这些基本事件是等可能的.

设“连续 3 次取出的都是正品”为事件 A，则事件 A 所包含的基本事件的个数为 8^3，所以

$$P(A)=\frac{8^3}{10^3}=\frac{64}{125}.$$

(2)把“从 10 件产品中一次抽取 3 件”视作一次试验，该试验有 C_{10}^3 种不同的结果，而且这些结果是等可能的.

设“3 件都是正品”为事件 B，则事件 B 所包含的基本事件的个数为 C_8^3，所以

$$P(B)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}.$$

说明 本题是不放回抽样与有放回地抽样的例子，虽然都是古典概型，但两者在基本事件的总数以及事件 A 所包含的基本事件的个数的计算上大不相同，概率自然也不同.

例 7 在三角形的每条边上各取 3 个分点，如图1-1所示，以这 9 个分点为顶点可画出若干个三角形，若从中任意抽取一个三角形，则其 3 个顶点分别落在原三角形的 3 条不同边上的概率为________(用数字作答).

分析 本题中的随机试验是什么？分析题意可得，一次试验就是从“可画出的若干个三角形”中任意抽取一个三角形.

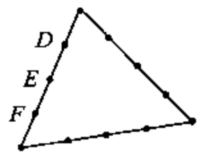

图 1-1

解 以 9 个分点为顶点，可做出的三角形的个数为 C_9^3-3. 从中任意抽取一个三角形，每个三角形被抽到的可能性均相等.

设“从中任意抽取一个三角形，该三角形的 3 个顶点分别落在原三角形的 3 条边上”为事件 A，则事件 A 所包含的基本事件的个数为 $C_3^1C_3^1C_3^1$. 所以

$$P(A)=\frac{C_3^1C_3^1C_3^1}{C_9^3-3}=\frac{1}{3}.$$

说明 本题中容易把 C_9^3 作为所有基本事件的总的个数，事实上，(1)所谓任意抽取，指的是从“若干个三角形”中任意抽取，而不是从 C_9^3 种结果中任意抽取；(2)如

果以 C_9^3 作为所有基本事件的总的个数，则所有基本事件被抽到的可能性并不相等，不能应用等可能事件的概率公式. 例如，由于 D，E，F 三点共线，构不成三角形，所以永远不可能被抽到.

解答问题时，首先要明确问题是什么，解决概率问题也是如此. 一般来说，绝大多数的问题中，概率模型都较为明显，能够清晰地看出该问题中的一次试验，试验的所有可能的结果以及是否等可能，但也不排除有的问题中，需要加以分析和判断. 这不仅是应用公式的前提，而且关注这些问题，加以思考，可以构建不同的概率模型，会有意想不到的收获，请看下面的问题.

例8 某人有 6 把钥匙，但忘记了打开房门的钥匙是哪一把. 于是，他逐把不重复地试开锁. 若 6 把中只有 1 把能打开房门，则

(1)恰好第三次打开房门的概率是多少?

(2)最多 3 次试开锁一定能打开房门的概率是多少?

解法1 为了构造等可能事件，不妨用 6 把钥匙逐把试开锁视作一次试验(即把 6 把钥匙全部试完，不论能否打开房门)，于是，每个基本事件就相当于 6 把钥匙的一个全排列，所有基本事件的个数为 A_6^6.

下面，为了叙述方便，把能打开房门的钥匙记作 k.

(1)设"恰好第三次打开房门"为事件 M，则这个事件就相当于将 k 排在第三位的排列，所以，事件 M 所包含的基本事件的个数为 A_5^5. 于是

$$P(M)=\frac{A_5^5}{A_6^6}=\frac{1}{6}.$$

(2)设"最多 3 次试开一定能打开房门"为事件 N，则这个事件就相当于把 k 排在前三位的排列，所以，事件

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com