依据教育部考试中心《考试大纲》编写

点拨与训练

数学

高中一年级

河南大学出版社
河南电子音像出版社

点拨与训练

数学

点拨与训练

dian bo yu xun lian

丛 书 主 编　　杨伟民
丛书副主编　　杜才盛　　石永生

高一数学

本 册 主 编　石永生
本册副主编　李学端　张保仕
本 册 编 者　陈玉河　裴尚营　马要丽
　　　　　　张志敏　张保仕　李学端
　　　　　　杨全超　赵松柱

河 南 大 学 出 版 社
河 南 电 子 音 像 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

点拨与训练. 高中一年级/杨伟民主编;杜才盛,石永生编. —开封:河南大学出版社,1905.6

ISBN 978-7-81091-623-3

Ⅰ. 点… Ⅱ. ①杨… ②杜… ③石… Ⅲ. 课程-高中-教学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 104037 号

点拨与训练(高中一年级)

责任编辑:侯良才
封面设计:张　旭

出版发行:河南大学出版社　河南电子音像出版社
地　　址:河南省郑州市经五路 66 号　　邮编:450002
电　　话:0371-65736143(发行部)　　网址:www.hndzyx.com
印　　刷:河南现代印刷包装有限公司印装
版　　次:2007 年 7 月第 1 版　　印次 2007 年 7 月第 1 次印刷
开　　本:787mm×1092mm　　1/16
印　　张:91.5
字　　数:1000 千字
印　　数:1—10000 册　　定　　价:96.00 元(全八册)

(本书如有印装质量问题请与印刷厂联系调换)
印厂地址:郑州市南阳路 155 号　邮编:450053　电话:(0371)63600369

目　　录

第一章　集合　简易逻辑

第二章　函数

第三章　数列

第四章　三角函数

第五章　平面向量

第一章　集合　简易逻辑

§1.1　集　合

知识点拨

(一)基础知识

1. 集合的概念:集合是未加定义的原始的数学概念,它是某些"指定对象的全体,"把一些确定的对象看成一个整体,就形成了一个集合.

2. 元素与集合之间的从属关系:元素与集合之间关系有属于和不属于两种. 如果 a 是集合 A 的元素就说 a 属于 A,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于集合 A,记作:$a \notin A$.

3. 集合元素的性质

(1)确定性:集合中的元素必须是确定的. 给定集合 A 与元素 x,要么 $x \in A$,要么 $x \notin A$,二者必居其一,而且只能居其一. 如果无法判断 x 是否一定属于 A,那么 A 就不能形成一个集合.

(2)互异性:集合中的元素是互不相同的个体,不能重复出现.

(3)无序性:集合中的元素之间不规定顺序,只要两个集合的元素完全一样,它们就是同一集合.

4. 集合的分类:$\begin{cases} \text{空集}(\varnothing)\text{:不含任何元素的集合,} \\ \text{有限集:含有有限个元素的集合,} \\ \text{无限集:含有无限个元素的集合.} \end{cases}$

5. 集合的表示方法:

(1)列举法:将集合中的元素一一列举出来,写在大括号内表示集合的方法.

(2)描述法:把集合中的元素的公共属性描述出来,写在大括号内表示集合的方法,它的一般形式是 $\{P \mid P$ 适合的条件$\}$,其中 P 叫代表元素,描述法的语言形式有三种:文字语言、符号语言,图形语言.

(3)图示法:画一条封闭的曲线,用它的内部来表示一个集合.

6. 特定集合符号的意义:$\mathbf{N}$　$\mathbf{Q}$　$\mathbf{R}$　$\mathbf{Z}$　$\mathbf{N}^*$　$(\mathbf{N}_+)$ 等.

(二)重点、难点、易混点

重点:集合的基本概念.

难点:①集合概念的理解;②集合表示方法的选择.

易混点:①集合元素的性质;②几个特定集合的字母表示.

典型例题

例 1. 考察下面每组对象能否构成一个集合:(1)著名的科学家;(2)某校 2007 年级的所有乐观向上的同学;(3)不超过 10 的非负数;(4)直角坐标平面内第三象限的一些点.

分析:能否构成集合要依据集合元素的确定性来判断.

解:(1)“著名的科学家”无明确的标准,对于某个人是否“著名”无法客观地判断,因此“著名的科学家”不能构成一个集合.

(2)类似(1)也不能构成一个集合.

(3)任何一个实数 x,可以明确地判断是不是“不超过 10 的非负数,即:$0\leqslant x\leqslant 10$.”故“不超过 10 的非负数”能构成集合.

(4)“一些点”无明确的标准,对于某个点是否在“一些点”中无法确定,因此“直角坐标平面内第三象限的一些点”不能构成一个集合.

评注:判定一些对象能否构成一个集合,要依集合中元素的标准是否为唯一确定的.

例 2. 用适当的方法表示下列集合:(1)由 4 与 6 的所有公倍数组成的集合;(2)所有正偶数组成的集合;(3)由 1,2,3 这三个数字抽出一部分或全部数字(没有重复)所组成的一切自然数的集合.

分析:(1)(2)都是无限集,应用描述法表示,4 与 6 的公倍数就是 12 的倍数,(3)由 1,2,3 这三个数字组成的一位,二位,三位自然数都是有限集,可用列举法表示.

解:(1)$\{x\mid x=12n,n\in\mathbf{Z}\}$; (2)$\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{N}^*\}$;

(3)$\{1,2,3,12,13,21,23,31,32,123,132,213,231,312,321\}$.

评注:(1)无限集多采用描述法,集合中元素不太多时用列举法;(2)使用列举法时,应注意以下几点:①元素间用分隔号“,”;②元素不重复;③元素无顺序;④对于含有较多元素的集合,如果构成集合的元素有明显规律,可用列举法,但必须把元素间的规律显示清楚后才能用“……”号;(3)使用描述法时,应注意以下几点:①写清该集合中元素的代号;②说明该集合中元素的性质;③不能出现末被说明的字母;④多层描述时,准确使用“且”“或”;⑤所有描述的内容都要写在集合符号内;⑥用于描述的语句力求简明准确.

例 3. 已知 $A=\{a-2,2a^2+5a,12\}$,$-3\in A$,求 a.

分析:由 $-3\in A$ 得 A 中必有元素 -3,得到关于 a 的方程,进而求出 a.

解:$\because -3\in a,A=\{a-2,2a^2+5a,12\}$; $\therefore a-2=-3$ 或 $2a^2+5a=-3$.

若 $a-2=-3$,则 $a=-1$,但 $a=-1$ 时,$2a^2+5a=-3$ 与元素互异性矛盾,$\therefore$ 不合题意舍去.

若 $2a^2+5a=-3$,则 $a=-\dfrac{3}{2}$ 或 $a=-1$(舍去),且 $a-2\neq 2a^2+5a$,$a-2\neq 12$,

$a=-\dfrac{3}{2}$ 合题意.

评注:解决这类问题一定要注意元素的三个特征(特别是互异性).

例 4. 设 $S=\{x\mid x=m+\sqrt{2}m,n\in\mathbf{Z}\}$,(1)若 $a\in\mathbf{Z}$,则是否有 $a\in S$;(2)若 $x_1\in S,x_2\in S$,证明 $x_1+x_2\in S$;(3)若 $n=1$,试求满足 $0<m+\sqrt{2}n<2$ 的 S 中元素的个数.

分析:判断一个元素是否属于某集合,要看这个元素是否满足集合元素的特征性质.

解:(1)当 $m=a$ 且 $n=0$ 时,$a+\sqrt{2}\times 0=m+\sqrt{2}n$,

由于 $m=a\in\mathbf{Z}$, $n=0\in\mathbf{Z}$, 则存在 $a=m+\sqrt{2}n\in S$.

(2)要证 $x_1+x_2\in S$,就是证 x_1+x_2 可表示为 $m+\sqrt{2}n,(m,n\in\mathbf{Z})$ 的形式,

$\because x_1\in S,\quad x_2\in S,\quad \therefore$ 可令 $x_1=m_1+\sqrt{2}n_1,(m,n\in\mathbf{Z})$,

$x_2=m_2+\sqrt{2}n_2(m_2,n_2\in\mathbf{Z})$.

$\therefore x_1+x_2=(m_1+m_2)+(n_1+n_2)\sqrt{2}$;

$\because m_1+m_2\in\mathbf{Z},n_1+n_2\in\mathbf{Z};\therefore x_1+x_2\in S$.

(3)若 $n=1,0<m+n\sqrt{2}<2$,则 $-\sqrt{2}<m<2-\sqrt{2}$,此时的整数解为 $-1,0$. 故 $n=1$ 时,集合 S 中有 2 个满足条件的元素.

评注:确定元素是否在集合中,要根据元素是否满足代表元素所适合的条件来确定.

能力训练

A 组

一、选择题

1. 下列有四个命题:①集合 $\mathbf{N}$ 中最小的数为 1;②若 $-a\in\mathbf{N}$,则 $a\in\mathbf{N}$;③$x^2+4=4x$ 的解集可表示为$\{2,2\}$;④$a\in\mathbf{N},b\in\mathbf{N}$,则 $a+b$ 的最小值为 2. 其中正确的命题个数为 ( )

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

2. 下列命题中正确的是 ( )

A. $\{0\}$是空集　　B. $\{x=\mathbf{Q}\mid x^2+x+2=0\}$为空集

C. $\left\{x\in\mathbf{Q}\,\middle|\,\frac{6}{x}\in\mathbf{Z}\right\}$为有限集　　D. $\{2,1\}$与$\{1,2\}$是不同的集合

3. 设 $M=\{x\mid x^2-3x=0,x\in\mathbf{R}\}$,则下列式子正确的是 ( )

A. $3\notin M$　　B. $3\in M$　　C. $\{3\}\notin M$　　D. $\{3\}\in M$

4. 下列各式错误的是 ( )

A. $\{$奇数$\}=\{x\mid x=2k-1,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{x\mid |x<5,x\in\mathbf{N}^*\}=\{1,2,3,4\}$

C. $\{(x,y)\mid x+y=1$ 且 $xy=-2,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}=\{(2,-1),(-1,2)\}$

D. $3^{-2}\in\{$负有理数$\}$

5. 下列各条件:①充分接近 π 的实数的全体. ②大于 0 小于 20 的 9 与 12 的公倍数的全体. ③实数中不是有理数的所有数的全体. ④数轴上到原点距离大于 1 的点的全体. 能确定一个集合的是 ( )

A. ①②③　　B. ①②④　　C. ②③④　　D. ①③④

6. 下列各题中 M 与 P 表示同一集合的是( )

A. $M=\{(1,-3)\},P=\{(-3,1)\}$

B. $M=\{0\},\quad P=\varnothing$

C. $M=\{y\mid y=x+1,x\in\mathbf{R}\},P=\{(x,y)\mid y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$

D. $M=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\},P=\{y\mid y=(t-1)^2+1,t\in\mathbf{R}\}$

7. 已知$\{a,b,c\}$的三个元素恰为$\triangle ABC$ 的三边,则$\triangle ABC$ 不可能为 ( )

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形　　C. 钝角三角形　　D. 等腰三角形

8. 已知集合 $A=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{N}\}$, $B=\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{N}\}$, $P=\{x\mid x=4k,k\in\mathbf{N}\}$, 若 $a\in A,b\in B$, 则 $a+b$ 属于集合(　　)

A. A　　B. B　　C. P　　D. 以上均不对

二、填空题:

9. 用列举法表示集合 $\{x\mid x^2+2x+1=0\}$ 写成__________.

10. 已知 $A=\left\{y\,\middle|\,y=(x-\frac{1}{2})^2,x\in\mathbf{N}\right\}$, 则 1 __________ A.

11. 集合 $\{x\in\mathbf{N}^*\mid\sqrt{x}\leqslant\pi\}$ 的元素的个数为__________.

12. 已知 $A=\{-3,-2,0,2\}$, $B=\{y\mid y=|x|,x\in A\}$, 用列举法表示 B 为__________.

13. 含有三个实数的集合可表示为 $\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}$, 也可表示为 $\{a^2,a+b,0\}$, 求 $a^{2006}+b^{2007}$ 的值.

14. 若 $-3\in\{a-3,2a-1,a^2+1\}$, 求实数 a 的值.

15. 设 $y=x^2+mx+n(m,n\in\mathbf{R})$, 当 $y=0$ 时, 对应 x 值的集合为 $\{-2,-1\}$.

(1) 求 m,n 的值;

(2) 当 x 为何值时, y 取最小值, 并求此最小值.

B 组

一、选择题

1. 方程组 $\begin{cases}2x+y=0,\\x-y+3=0\end{cases}$ 的解集为　　(　　)

A. $\{-1,2\}$　　B. $(-1,2)$　　C. $\{(-1,2)\}$　　D. $\{(x,y)\mid x=-1$ 或 $y=2\}$

2. 下列结论中正确的是　　(　　)

A. 等腰三角形的全体不能构成集合;

B. $\{x\mid -1<x\leqslant 2,x\in\mathbf{N}^*\}$ 是只有一个元素的集合;

C. 实数集可能用 $\{\mathbf{R}\}$ 表示

D. $\{x\mid y=x+1\}$ 与 $\{y\mid y=x+1\}$ 表示同一个集合

3. 下列几个结论①0 与 $\{0\}$ 表示同一个集合;②由 1,2,3 组成的集合可表示为 $\{1,2,3\}$ 或 $\{2,3,1\}$;③方程 $(x-1)^2(x-2)=0$ 的所有解的集合可表示为 $\{1,1,2\}$;④ $\{x\mid 1<x<3\}$ 是有限集.

其中正确的是

A. ①④　　B. ②③　　C. ②　　D. 以上均不对

4. 集合 $A=\{x^2,3x+2,5y^3-x\}$，$B=\{$周长等 $20cm$ 的三角形$\}$，$C=\{x\mid x-3<2\}$，$D=\{(x,y)\mid y=x^2-x-1\}$. 其中是用描术法表示的集合有　　（　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

二、填空题

5. 设集合 $A=\{x\mid x=(-1)^n(n\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N})\}$，$B=\{$正偶数$\}$，$C=\{x\mid 1<x<2,x\in Q\}$，$D=\{(x,y)\mid 3x+2y=6,x\in\mathbf{N},\mathbf{y}\in\mathbf{N}\}$ $E=\{$等边三角形$\}$，其中无限集有________.

6. 设 $\frac{1}{2}\in\left\{x\,\middle|\,x^2-ax-\frac{5}{2}=0\right\}$，则集合 $\left\{x\,\middle|\,x^2-\frac{19}{2}x-a=0\right\}$ 中所有元素之积为________.

7. 由实数 $-\sqrt[3]{a^3}$，$-a$，$|a|$，$\sqrt{a^2}$，a 所组成的集合中最多含有________个元素.

三、解答题

8. $\{x\mid y=x^2-1,|x|\leqslant 2,x\in\mathbf{Z}\}$，用列举法表示该集合.

9. 求数集 $\{1,x,x^2-x\}$ 中的元素 x 满足的条件.

10. 设集合 $A=\{a\mid a=n^2+1,n\in\mathbf{N}\}$，集合 $B=\{b\mid b=k^2-4k+5,k\in\mathbf{N}\}$，若 $a\in A$，试判断 a 与 B 的关系.

探索与创新

11. 已知集合 $A=\left\{a\,\middle|\,\frac{x+a}{x^2-2}=1\right\}$（关于 x 的方程）有唯一实数解，用列举法表示集合 A.

§1.2　子集　全集　补集

知识点拨

基础知识

1. 子集

（1）定义：对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，就是说 A 是 B 的子集，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

（2）性质：

①若 $A\subseteq B$，则由任意 $x\in A$，能推出 $x\in B$；

②任何一个集合是它本身的子集；

③空集是任何集合的子集；

④若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

2. 等集

(1)定义：如果集合 A 中的任何一个元素，都是集合 B 的元素，同时集合 B 的任何元素都是 A 的元素，我们就说集合 A 等于集合 B. 记作 $A=B$.

(2)判定方法：$A\supseteq B$ 且 $A\subseteq B\Rightarrow A=B$.

3. 真子集

(1)定义：如果 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，则集合 A 叫集合 B 的真子集. 记作 $A\subsetneqq B$.

(2)性质①若 $A\subsetneqq B$，$x\in A$，则 $x\in B$；②若 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，则 $A\subsetneqq C$；③空集是任何非空集合的真子集.

4. 全集与补集

(1)定义：

全集：如果一个集合含有我们所要研究的各个集合的全部元素，这个集合就可以看作一个全集，(注：全集是相对于所研究问题而言的一个相对概念，全集因研究问题而异).

补集：设 S 是一集合，$A\subseteq S$，由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 S 中子集 A 的补集，记作 C_SA，即 $C_SA=\{x|x\in S$ 且 $x\notin A\}$.（注：理解定义中的“所有”）

(2)性质：$C_SS=\varnothing$；$C_S\varnothing=S$；$C_S(C_SA)=A$.

(二)重点、难点、易混点

重点：子集、补集的概念.

难点：①子集的性质及应用；②全集、补集的理解；③用图示法表示子集、补集、全集之间的关系.

易混点：①子集、补集的性质；②子集与真子集的异同；③利用“数形结合”时，端点值的取舍.

典型例题

例 1. 写出集合 $A=\{a,b,c\}$ 的所有真子集.

分析：真子集即除去它本身的子集，不要忘记空集.

解：集合 $A=\{a,b,c\}$ 的所有真子集是：$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$.

评注：含有 n 个元素的集合，其子集个数为 2^n 个，其真子集个数为 2^n-1 个，解题时，可依据它检验答案数目的正解与否.

例 2. 已知 $A=\{x|x<5\}$，$B=\{x|x<a\}$，(1)若 $B\subseteq A$，求 a 的取值范围；(2)若 $A\subseteq B$，求 a 的取值范围；(3)若 $C_RA\subsetneqq C_RB$，求 a 的取值范围.

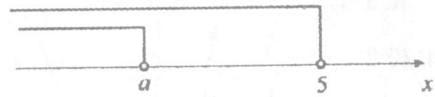
分析：要紧扣有关子集的定义，利用数形结合思想，求出 a 的取值范围.

解：(1)$\because B\subseteq A$，$\therefore$ 如图(1)得 $a\leqslant 5$.

(2)$\because A\subseteq B$，$\therefore$ 如图(2)得 $a\geqslant 5$.

(3)$\because C_RA=\{x|x\geqslant 5\}$，$C_RB=\{x|x\geqslant a\}$，又若 $C_RA\subsetneqq C_RB$ 即若 C_RA 为 C_RB 的真子

集. 如图(3) $\therefore a<5$.

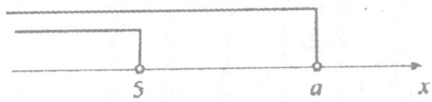


图(1)

分析:①解此类问题要注意数形结合,以形定数.

②要注意验证端点值,做到正确无误.

例 3. 设集合 $A=\{1,a,b\}$, $B=\{a^2,a,ab\}$,且 $A=B$,求实数 a,b.



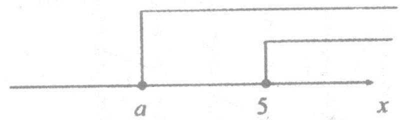
图(2)

分析:可根据集合元素的性质求出 a,b 只需列出关于 a,b 的两个方程.

解:由 $A=B$,则① $\begin{cases}a^2=1\\ab=b\end{cases}$ 或② $\begin{cases}ab=1,\\a^2=b.\end{cases}$ 由①得 $a=1$(舍去), $a=-1$,

则 $A=\{1,-1,b\}$, $B=\{1,-1,-b\}$,则 $b=0$.

由②得 $a=1$ 舍去,则 $a=-1, b=0$.



图(3)

例 4. 设集合 $A=\{x|x^2+4x=0, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$, $a\in\mathbf{R}, x\in\mathbf{R}\}$,若 $B\subseteq A$,求实数 a 的值.

分析: $B\subseteq A$ 可分 $B=\varnothing$, $B\subsetneqq A$, $B=A$ 三种情况.

解: $\because A=\{x|x^2+4x=0\}=\{0,-4\}$,由于 $B\subseteq A$;于是分类处理.

①当 $A=B$ 时, $B=\{0,-4\}$ 可知, $0,-4$ 是方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 的两根,由违达定理得 $-2(a+1)=0+(-4)$, $a^2-1=0$, 解得: $a=1$.

②当 $B\subsetneqq A$ 时,

若 $B=\varnothing$ 时, $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$,解得 $a<-1$.

若 $B=\{0\}$ 或 $B=\{-4\}$ 时, $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=0$ 得 $a=-1$.

$a=-1$ 时, $B=\{0\}$ 满足条件. 综上实数 a 的值为 $a=1$ 或 $a\leqslant-1$.

评注:根据问题实际,注意运用分类讨论思想,掌握分类方法,培养慎密的思维品质. 在 $B\subseteq A$ 时,含有 $B=\varnothing$ 这种情况,解题时要防止遗漏.

能力训练

A 组

一、选择题

1. 下列命题正确的是 ( )

A. 集合 M 的子集是由它的部分元素组成的. B. 空集没有子集.

C. 任何一个集合必有两个以上的子集. D. 设 $A\subseteq S$,若 $x\in A$ 则 $x\notin C_SA$.

2. 设全集 $U=\mathbf{Z}$, $A=\{x\in\mathbf{Z}|x<5\}$, $B=\{x\in\mathbf{Z}|x\leqslant2\}$. 则 C_UA 与 C_UB 关系为 ( )

A. $C_UA\supseteq C_UB$ B. $C_UA=C_UB$ C. $C_UA\subseteq C_UB$ D. $C_U(C_UA)\subsetneqq C_U(C_UB)$

3. 符合条件 $\{a\}\subsetneqq M\subseteq\{a,b,c\}$ 的集合个数为 ( )

A. 3 个　　B. 4 个　　C. 6 个　　D. 8 个

4. 设集合 $A=\{(x,y)\mid y=x,\quad x,y\in\mathbf{R}\}$，$B=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{y}{x}=1,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\right\}$，则集合 A,B 之间的关系为　　(　　)

A. $A\subsetneqq B$　　B. $A\supsetneqq B$　　C. $A=B$　　D. 以上均不对

5. 已知集合 $M=\{x\mid x\leqslant\sqrt{12}\}$，$a=\sqrt{12}$，则下列关系中正确的是　　(　　)

A. $a\subsetneqq M$　　B. $a\notin M$　　C. $\{a\}\in M$　　D. $\{a\}\subseteq M$

6. 设集合 $M=\{(x,y)\mid x+y>0,\quad xy>0,x,y\in\mathbf{R}\}$，$N=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$，那么 M,N 之间的关系为　　(　　)

A. $M\subsetneqq N$　　B. $M\supsetneqq N$　　C. $M=N$　　D. 以上均不对

7. 若 $A=\{x\mid x=4n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，　$B=\{x\mid x=4n-3,n\in\mathbf{Z}\}$，　$C=\{x\mid x=8n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，则 A,B,C 的关系是　　(　　)

A. $C\subsetneqq B\subsetneqq A$　　B. $A\subsetneqq B\subsetneqq C$　　C. $C\subsetneqq A=B$　　D. $A=B=C$

8. 设 U 为全集，集合 $M,N\subsetneqq U$，若 $N\subseteq M$，则　　(　　)

A. $C_UM\supseteq C_UN$　　B. $M\subseteq C_UN$　　C. $C_UM\subseteq C_UN$　　D. $M\supseteq C_UN$

二、填空题

9. 已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$A=\{2,4,5,7\}$，$B=\{3,4,5\}$，则 $(C_UA)\cup(C_UB)=$ ________.

10. 设集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{x\mid a-1\leqslant x\leqslant 2a\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 a 的取值范围为 ________.

11. 若全集为 $S=\{$小于 10 的自然数$\}$，$A=\{$不大于 9 的正奇数$\}$，则 $C_SA=$ ________.

12. 已知集合 $M=\{x\mid x^2-2x-3=0\}$，$P=\{x\mid ax-1=0\}$，若 $P\subsetneqq M$，则实数 a 的所有可取值的集合是 ________.

三、解答题

13. 证明：如果 $M=\{x\mid x=a^2+1,a\in\mathbf{N}^*\}$，$P=\{y\mid y=b^2-4b+5,b\in\mathbf{N}^*\}$，那么 $M\subsetneqq P$.

14. 设集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-5x+q=0\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}\mid (x-3)^2\leqslant 0\}$，且 $B\supseteq A$，求 q 与集合 A.

15. 已知 $A=\{x\mid x^2-3x+4=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid (x+1)(x^2+3x-4)=0\}$，求满足条件 $A\subsetneqq P\subsetneqq B$ 的集合 P.

B 组

一、选择题

1. 下列各式中，正确的是　　(　　)

A. $2\sqrt{3}\subseteq\{x|x\leqslant 4\}$　　B. $\{2\sqrt{3}\}\subsetneqq\{x|x\leqslant 3\}$

C. $2\sqrt{3}\in\{x|x\leqslant 4\}$　　D. $\{2\sqrt{3}\}\in\{x\leqslant 4\}$

2. 已知 $U=\{x\in\mathbf{R}|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，$A=\{x\in U|-1<x<3\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}|x^2-2x-3=0\}$，$C=\{x|-1\leqslant x<3\}$，则有　（　　）

A. $C_UA=B$　　B. $C_UB=C$　　C. $C_UB\supseteq C$　　D. $A\supseteq C$

3. 集合 $S\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，且满足"若 $a\in S$，则 $6-a\in S$"这样的 S 共有　（　　）

A. 5 个　　B. 7 个　　C. 15 个　　D. 3 个

4. 已知集合 $A=\{0,2,3\}$，$B=\{x|x=a\cdot b,a\neq b$，且 a、$b\in A\}$，则集合 B 的子集的个数是　（　　）

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

二、填空题

5. 已知集合 $M=\{x|-2\leqslant x\leqslant a\}\neq\varnothing$，$P=\{y|y=2x+3,x\in M\}$，$T=\{z|z=x^2,x\in M\}$，且 $T\subseteq P$，则实数 a 的取值范围为__________.

6. 已知集合 $A=\{x|x^2+x-2=0\}$，若 $B=\{x|x<a\}$，且 $A\subsetneqq B$，则实数 a 的取值范围是__________.

7. 设集合 $A=\{1,3,a\}$，$B=\{a^2-a+1,1\}$ 且 $B\subseteq A$，则 a 的值为__________.

三、解答题

8. 设 $x,y\in\mathbf{R}$，集合 $A=\{2,4,x^2-1\}$，$B=\{3,x^2+xy+y\}$，若 $2\in B$ 且 $B\subseteq A$，求 x,y 的值.

9. 已知集合 $A=\{y|y=x^2+2x+4,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{z|z=ax^2-2x+4a,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

10. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|x=2m+1,m\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}|x=4m\pm 1,m\in\mathbf{Z}\}$，$C=\left\{x\in\mathbf{R}\left|\frac{x-3}{2}\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，试确定集合 A,B,C 的关系.

探索与创新

11. 已知集合 $A=\{x|ax^2-2x+1=0,a\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 A 中只有一个元素，试求 a 的值，并求出这个元素；

(2)若 A 中至多有一个元素，求 a 的取值范围.

§1.3 交集 并集

知识点拨

(一)基础知识

1. 交集

(1)定义:一般地,由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素的所组成的集合叫做 A、B 的交集,记作 $A\cap B$,即 $A\cap B=\{x|x\in A,且\ x\in B\}$.

注:定义中"所有"二字的含义,不是"部分"公共元素而是全部公共元素,还有并不是任何两个集合总有公共元素,当集合 A 与 B 没有公共元素时,不能说,A 与 B 没有交集而是 $A\cap B=\varnothing$.

(2)性质:①$(A\cap B)\subseteq A,(A\cap B)\subseteq B$;②$A\cap\varnothing=\varnothing,A\cap(C_UA)=\varnothing$;③$A\cap B=B\cap A,A\cap A=A$;④$A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=A$.

2. 并集

(1)定义:由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素,组成的集合叫做 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,即 $A\cup B=\{x|x\in A\ 或\ x\in B\}$.

注:定义中的"或"包括三层含义:①$x\in A$ 但 $x\notin B$,②$x\in B$ 但 $x\notin A$;③$x\in A$ 且 $x\in B$.

(2)不能认为 $A\cup B$ 是由集合 A 的所有元素和集合 B 的所有元素组成的集合.

(3)并集的运算性质:①$A\cup B\supseteq A,A\cup B\supseteq B$;②$A\cup A=A,A\cup\varnothing=A$;③$A\cup B=B\cup A$;④$A\cup(C_UA)=U$;⑤$A\cup B=A\Leftrightarrow A\supseteq B$.

3. 交并集合元素个数的求法

设 $card(A)$ 表示集合 A 的元素个数,$card(B)$ 表示集合 B 元素个数,$card(A\cup B)$、$card(A\cap B)$ 分别表示 $A\cup B$、$A\cap B$ 中元素个数.

$card(A\cup B)=card(A)+card(B)-card(A\cap B)$.

(二)重点、难点、易混点

重点:①交集与并集的概念;②用交、并符号正确表示集合.

难点:①交集、并集性质的灵活运用;②交并集合元素个数的求法.

易混点:①交并集性质的异同;②交并集合元素个数公式的应用.

典型例题

例 1. 已知全集 $S=\{x|(x+2)(x-3)<0\}$,$B=\left\{x\left|\dfrac{x+3}{x-2}<0\right.\right\}$.

求 $A\cup B,A\cap B,(C_SA)\cap(C_SB),C_S(A\cup B)$.

分析:根据图形,用数轴表示 A,B.

解: $A=\{x|(x+2)(x-3)<0\}=\left\{x\left|\begin{cases}x+2<0\\x-3>0.\end{cases}或\begin{cases}x+2>0,\\x-3<0\end{cases}\right.\right\}=\{x|-2<x<3\}$.

$$B=\left\{x\left|\frac{x+3}{x-2}<0\right.\right\}=\left\{x\left|\begin{cases}x+3<0\\x-2>0\end{cases}或\begin{cases}x+3>0\\x-2<0\end{cases}\right.\right\}=\{x\mid -3<x<2\}.$$

$\therefore A\cup B=\{x\}-3<x<3\}$， $A\cap B=\{x\mid -2<x<2\}$.

$C_SA=\{x\mid x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -2\}$， $C_SB=\{x\mid x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant -3\}$.

$(C_SA)\cap(C_SB)=\{x\mid x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -3\}$，$C_S(A\cup B)=\{x\mid x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -3\}$.

评注：根据题意通过数轴来研究，可使问题迅速得到解决，数形结合是一重要方法.

例2. 设 $A=\{x\mid a\leqslant x\leqslant a+3\}$，$B=\{x\mid (x+1)(x-5)>0\}$，$a$ 为何值时：(1)$A\cap B=\varnothing$；(2)$A\cap B\neq\varnothing$；(3)$A\cap B=A$；(4)$A\cup(C_RB)=C_RB$.

分析：①$A\cap B=\varnothing$ 是指集合 A 与 B 没有公共的元素，或者说 A 是由不属于 B 的元素构成的；②$A\cap B\neq\varnothing$ 说明集合 A 与 B 有公共的元素；；③$A\cap B=A$ 说明凡属于 A 的一定属于 B；④$A\cup(C_RB)=C_RB$ 说明集合 A 的元素一定是不属于 B 的元素.

解：$\because B=\{x\mid (x+1)(x-5)>0\}=\{x\mid x<-1$ 或 $x>5\}$.

$\therefore$ ①当 $a\geqslant -1$ 且 $a+3\leqslant 5$ 时，即当 $-1\leqslant a\leqslant 2$ 时，$A\cap B=\varnothing$.

②当 $a<-1$ 或 $a>2$ 时，$A\cap B\neq\varnothing$.

③当 $a+3<-1$ 或 $a>5$ 时，即 $a<-4$ 或 $a>5$ 时，$A\cap B=A$.

④$\because C_RB=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 5\}$，

$\therefore$ 当 $a\geqslant -1$ 且 $a+3\leqslant 5$ 时，即 $-1\leqslant a\leqslant 2$ 时，$A\cup(C_RB)=C_RB$.

评注：可借助于数轴完成以上各问，也就是数形结合，另外要注意端点值的取舍.

例3. 设 $A=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant a\}$，$B=\{y\mid y=3x+10,x\in A\}$.

$C=\{z\mid z=5-x,x\in A\}$，且 $B\cap C=C$，求实数 a 的取值范围.

分析：本题主要考查集合的交与并的性质及不等式的性质，初步培养数形结合能力.

解：由 $A=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant a\}$ 知 $a\geqslant -3$，$\because -3\leqslant x\leqslant a$.

$\therefore 3\times(-3)+10\leqslant 3x+10\leqslant 3a+10$，即 $1\leqslant y\leqslant 3a+10$.

$\therefore B=\{y\mid 1\leqslant y\leqslant 3a+10\}$，同理，$5-a\leqslant 5-x\leqslant 8$，

$\therefore C=\{z\mid 5-a\leqslant z\leqslant 8\}$，又 $B\cap C=C$，有 $C\subseteq B$，

$\therefore\begin{cases}5-a\geqslant 1,\\3a+10\geqslant 8\end{cases}$ 且 $a\geqslant -3$， 解得 $-\frac{2}{3}\leqslant a\leqslant 4$.

$\therefore$ 实数 a 的可取值范围是 $\{a\mid -\frac{2}{3}\leqslant a\leqslant 4\}$.

评注：①本题首先运用交集的性质：$B\cap C\Rightarrow C\subseteq B$ 是解题关键的一步. ②将集合 B、C 化简整理也是解集合题的必经之路. ③不等式组可借助数轴直观列出.

例4. 设 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}$，

$C=\{x\mid x^2-mx+2=0\}$，已知 $A\cup B=A$，$A\cap C=C$，求 a，m 之值.

分析：本题应用韦达定理去解.

解：$\because A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$，

B 中必有元素1（二次方程系数和为0），

又$\because A\cup B=A$，$\therefore B\subseteq A$，这时 B 有两种可能：$B=\{1\}$，或 $B=\{1,2\}$，

若 $B=\{1\}$，则 B 中的方程有两个相等的实根，$\Delta=a^2-4(a-1)=0$，$\therefore a=2$，