WEIJIFEN

JIANMING JIAOCHENG

微积分简明教程

下

潘吉勋　主编

华南理工大学出版社

微积分简明教程

（下册）

主　编　潘吉勋
副主编　苏　耘　高　洁　郭夕敬

华南理工大学出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

微积分简明教程(下册)/潘吉勋主编. —广州：华南理工大学出版社，2007.8
ISBN 978-7-5623-2656-4

Ⅰ.微...　Ⅱ.潘...　Ⅲ.微积分—高等学校—教材　Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 124405 号

总 发 行：华南理工大学出版社
（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
营销部电话：020-87113487　87111048（传真）
E-mail：scutc13@scut.edu.cn
http://www.scutpress.com.cn
责任编辑：欧建岸
印 刷 者：广州市穗彩彩印厂
开　　本：850mm×1168mm　1/32　**印张**：6.375　**字数**：190 千
版　　次：2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：1—5 000 册
定　　价：29.00 元（上、下册）

目　录

第八章　空间解析几何

17 世纪，Descartes 创立解析几何，开辟了高等数学的新纪元，成为数学从初等数学进入高等数学的转折点．解析几何的中心思想是把代数方程和曲线(及曲面)联系起来，用代数和分析的方法研究几何问题．反过来，代数的或分析的概念还可得到几何的解释，直观地掌握这些概念，启发人们去研究新的结论．数学能够获得巨大的发展，很大程度上应该归功于几何与代数和分析的这种结合．

§1　向量及其线性运算

一、空间直角坐标系

类似于平面直角坐标系，我们来建立空间的直角坐标系．过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，且具有相同的长度单位．这三条数轴分别称为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴)，统称为**坐标轴**．它们的正向符合**右手规则**，即以右手握住 z 轴，当右手的四指从正向 x 轴以$\frac{\pi}{2}$角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴正向，如图 8-1 所示，这样的三条坐标轴就构成了一个**空间直角坐标系**．三条坐标轴中任意两条可以确定一个平面，称为坐标面，分别称为 xy 面、yz 面及 zx 面．它们把空间分割成八个部分：含有 x 轴、y 轴、z 轴正半轴的部分称为第Ⅰ卦限，位于 xy 平面上方还有三个部分，按逆时针方

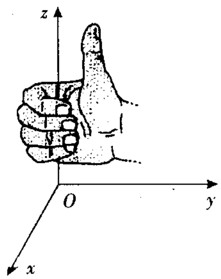

图 8-1

向，依次分别称为第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限．位于 xy 平面下方的四个部分，依次分别称为第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限(见图 8-2)．

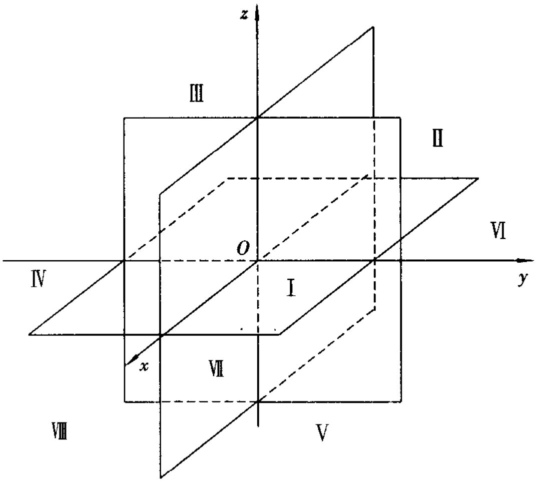

图 8-2

设 M 为空间的一点，过点 M 作三个平面垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，它们分别交于点 P、Q、R（见图 8-3），分别称为点 M 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的**投影**．这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x，y，z，则点 M 就唯一地确定了一个有序数组(x, y, z)．反过来，给定一个有序数组(x, y, z)，在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，过点 P、Q、R 作三个平面

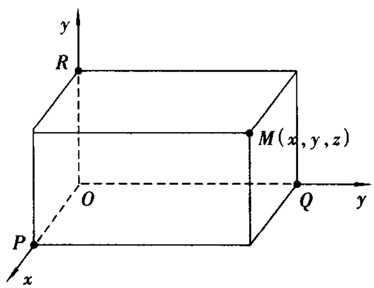

图 8-3

分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，这三个平面的交点 M 是由有序数组(x, y, z)唯一确定的．于是，空间的点 M 与有序数组(x, y, z)就建立了一一对应关系，称有序数组(x, y, z)为点 M 的**坐标**，并把点 M 记作 $M(x, y, z)$．

坐标面上和坐标轴上的点具有一定特征．例如，xy 坐标面上的点的坐标为$(x, y, 0)$，z 轴上的点的坐标为$(0, 0, z)$，原点 O 的坐标为$(0, 0, 0)$．

二、向量的概念

有些物理量是用实数来刻画的，称作**纯量**，例如长度、面积、温度等．还有些物理量既有大小，又有方向，称作**向量**，例如速度、力、力矩等．

在数学中，向量用一条有向线段来表示，线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向．以 P_1 为起点，P_2 为终点的有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{P_1P_2}$．有时也用粗体 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{v}$ 等来表示向量．向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度记作$|\boldsymbol{a}|$，称作向量 $\boldsymbol{a}$ 的**模**．模等于 1 的向量称为**单位向量**．模等于 0 的向量称为**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$．零向量的始点和终点重合，它的方向可以看作是任意的．

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同，则称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是**相等的**，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$．因此，相等的向量经过平移后重合．

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或者相反，则称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是**平行的**，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$．由于 $\boldsymbol{0}$ 的方向可以看作是任意的，因此可认为 $\boldsymbol{0}$ 与任何向量都是平行的．

三、向量的线性运算

基于物理学的考虑，引进向量的加法和数乘运算．

定义　给定向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，将 $\boldsymbol{b}$ 的始点置于 $\boldsymbol{a}$ 的终点，则从 $\boldsymbol{a}$ 的始点向 $\boldsymbol{b}$ 的终点所引的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$．

规定 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$．

向量的加法可表述成三角形法则：以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 首尾相连构成的三角

形，它的第三边即是向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（如图 8-4a）.

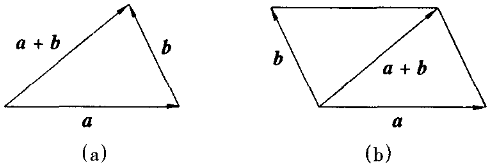

图 8－4

三角形法则与力学中的平行四边形法则是一致的．后者是说，以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为相邻两边作平行四边形（如图 8-4b），它的对角线即是向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 有公共的始点）.

定义 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\lambda$ 为实数．规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

借助加法和数乘再来引进向量的减法．对于向量 $\boldsymbol{a}$，向量 $(-1)\boldsymbol{a}$ 的模与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等，但方向相反，称 $(-1)\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$.

显然
$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

对于向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，规定向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差**（图 8-5）
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$
从 $\boldsymbol{b}$ 的终点向 $\boldsymbol{a}$ 的终点所引的向量就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

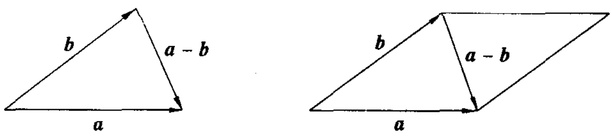

图 8－5

容易验证以下结论：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$.

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

(5) $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})$.

(6) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

(7) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

(8) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

定理 1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是存在实数 λ, 使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明 如果 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$, 则 $\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同或相反, 显然 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行.

如果 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$, 当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同时, 取 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, 则

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|,$$

即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等, $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同, 从而 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同, 所以 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反时, 取 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, 则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等. 又 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反, 从而 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同. 所以 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

由此定理可知, 如果向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$是与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量.

四、向量的坐标

用 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x 轴、y 轴、z 轴正向的单位向量, 称它们为**坐标系的坐标向量**.

给定向量 $\boldsymbol{a}$, 将 $\boldsymbol{a}$ 的始点置于坐标原点, 有 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$ (如图 8-6), 过点 $M(x,y,z)$作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的三个平面, 分别交于 P、Q、R, 则有

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k},$$

再由平行四边形法则, 便得

$$\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量$\overrightarrow{OM}$ 按坐标向量的**分解式**, 对应于 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 的系数 x, y, z 称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的**坐标**, 并记作

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}.$$

联想到点在坐标系中的坐标表示, 我们会发现: 将向量的始点置于坐

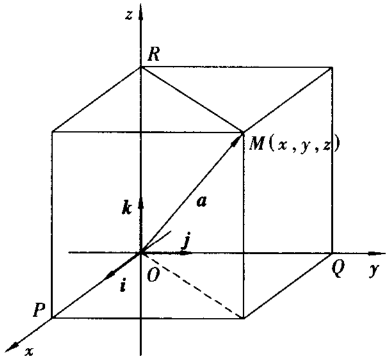

图 8-6

标原点，则向量的坐标就是向量的终点的坐标.

对于起点为 $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$、终点为 $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$(如图 8-7)，则有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}\\ &= (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) - (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k})\\ &= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

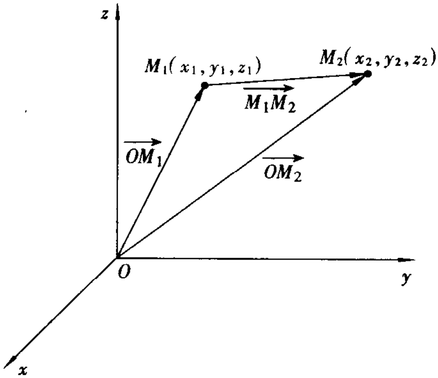

图 8-7

即
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}.$$

定理 2 设 $\boldsymbol{a} = \{a_1,\ a_2,\ a_3\}$，$\boldsymbol{b} = \{b_1,\ b_2,\ b_3\}$，则

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3\}$;

(2) $\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \lambda a_3\}$，其中 λ 为实数.

推论　$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}.$$

这些结论的证明，留给读者练习.

习题 8-1

1. 在坐标面 yz，zx 上的点和 x 轴、y 轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置：

$$A(1,1,0);\quad B(0,1,1);\quad C(1,0,0);\quad D(0,-1,0).$$

2. 已知线段 AB 被点 $C(2,0,2)$ 和 $D(5,-2,0)$ 三等分，试求这个线段两端点 A 与 B 的坐标.

3. 已知三个点坐标 $A(0,1,0)$、$B(2,1,0)$ 和 $C(0,0,1)$，试求向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BA}$.

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\{3,-2,6\}$，$\boldsymbol{b}=\{-2,1,0\}$，求下列各向量的坐标：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；(3)$2\boldsymbol{a}$；

(4) $-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$；(5)$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$；(6)$\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

5. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，试利用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 求 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

6. 设向量 $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\beta\boldsymbol{k}$，$b=\alpha\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，求 α，β.

7. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\{1,-2,0\}$，$\boldsymbol{b}=\{2,\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2\}$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，求 $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$.

8. 试证明定理 2 及推论.

9. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

§2 数量积和向量积

许多数学概念源自物理学，经过数学加工后，成为许多学科的有力工具. 本节将引进向量的两种运算，这样的运算在涉及向量的问题中被广泛应用.

一、数量积

在物理学中，常力 $\boldsymbol{F}$ 对物体所做的功 W 定义为常力 $\boldsymbol{F}$ 在质点位移方向的分量与位移 $\boldsymbol{s}$ 的乘积(图 8-8)

$$W = |\boldsymbol{F}|\,|\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角($0\leqslant\theta\leqslant\pi$). 以此为原型引进向量的数量积概念.

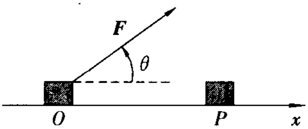

图 8-8

定义 对于向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，定义 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta,$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角($0\leqslant\theta\leqslant\pi$).

数量积具有如下性质：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$ (λ 为实数);

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$;

(4) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 当且仅当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$;

(5) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

定理 3 设 $\boldsymbol{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

证明 注意 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是互相垂直的单位向量，则有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k})$$

$$= a_1b_1\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} + a_2b_1\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} + a_3b_1\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} + a_1b_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} + a_2b_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} + a_3b_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j} + a_1b_3\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} + a_2b_3\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} + a_3b_3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

由定理 3 可知

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2},$$

于是

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

这就是两个向量夹角余弦的坐标表示.

再有，两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$之间的距离

$$d = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

例 1　已知点 $A(1, 1, 2)$, $B(1, 0, 3)$，求与$\overrightarrow{AB}$同向的单位向量.

解　因为

$$\overrightarrow{AB} = \{1 - 1, 0 - 1, 3 - 2\} = \{0, -1, 1\},$$

于是

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

所以与$\overrightarrow{AB}$同方向的单位向量

$$\boldsymbol{a}^0 = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{0, -1, 1\} = \left\{0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

例 2　已知向量 $\boldsymbol{a} = \{3, 1, -2\}$, $\boldsymbol{b} = \{2, 0, -1\}$，试将 $\boldsymbol{a}$ 表成 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$，使得 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{d}/\!/\boldsymbol{b}$.

解　因为 $\boldsymbol{d}/\!/\boldsymbol{b}$，依定理 1 可知，存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{d} = \lambda\boldsymbol{b}$. 又因为 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，所以

$$0 = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{d})\cdot\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a} - \lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b},$$

从而

$$\lambda = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}} = \frac{3\times 2 + 2}{2^2 + 1} = \frac{8}{5},$$

于是
$$d=\lambda b=\left\{\frac{16}{5},0,-\frac{8}{5}\right\},$$
$$c=a-d=\left\{-\frac{1}{5},1,-\frac{2}{5}\right\},$$
即有
$$a=\left\{-\frac{1}{5},1,-\frac{2}{5}\right\}+\left\{\frac{16}{5},0,-\frac{8}{5}\right\}.$$

二、向量积

在力学中研究物体的转动时，引进了力矩的概念. 力矩就是一个向量积，向量积可以用数学的语言表述成如下的定义.

定义 向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积** $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 为一个向量 $\boldsymbol{c}$：

(1) $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，$\theta$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角($0\leqslant\theta\leqslant\pi$)；

(2) $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$；

(3) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 服从右手法则.

向量积具有如下性质：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$；

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$；

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$ (λ 为实数)；

(4) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

(5) 设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 当且仅当 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

上述性质的证明从略.

根据上述性质，可得
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\qquad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},$$
$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\qquad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.$$

设 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$，则
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\times(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=a_1b_1(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_2b_1(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_3b_1(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})\\&\quad+a_1b_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_2b_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+a_3b_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})\\&\quad+a_1b_3(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+a_2b_3(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+a_3b_3(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\boldsymbol{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{k}.$$

将式中的括号算式表成二阶行列式，则有

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

最后一个等号只是一个简便记法，其中的三阶“行列式”也不是通常意义下的行列式，仅是方便记忆的一种符号.

例 3　设 $\boldsymbol{a} = \{2,1,-1\}$，$\boldsymbol{b} = \{1,-1,2\}$，求 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

解　$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$= \boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}.$$

例 4　计算以向量 $\boldsymbol{a} = \{8, 4, 1\}$ 和 $\boldsymbol{b} = \{2, -2, 1\}$ 为边的平行四边形的面积.

解　以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积

$$A = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta,$$

这恰好是向量 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 的模，即

$$A = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|.$$

现在来计算

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} - 24\boldsymbol{k},$$

于是所求平行四边形的面积

$$A = |6\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} - 24\boldsymbol{k}|$$

$$= \sqrt{6^2 + 6^2 + 24^2} = 18\sqrt{2}.$$

例 5 求一个垂直于由点 $A(0,-2,1)$，$B(1,-1,-2)$ 和 $C(-1,1,0)$ 所确定的平面的单位向量.

解 构造向量

$\overrightarrow{AB}=\{1,1,-3\}$，$\overrightarrow{AC}=\{-1,3,-1\}$.

设所求单位向量为

$$e=\{e_1,e_2,e_3\}.$$

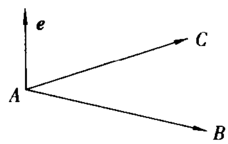

图 8-9

为使 $\boldsymbol{e}\perp\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{e}\perp\overrightarrow{AC}$，则应有 $\boldsymbol{e}/\!/\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$(如图 8-9 所示)，从而必存在实数 λ 使得

$$\boldsymbol{e}=\lambda(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}).$$

然而
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&-3\\-1&3&-1\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}1&-3\\3&-1\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}1&-3\\-1&-1\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}1&1\\-1&3\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$
$$=8\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k},$$

为使 $|\lambda|\,|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=|\boldsymbol{e}|=1$，只须取

$$|\lambda|=\frac{1}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{\sqrt{8^2+4^2+4^2}}=\frac{1}{4\sqrt{6}},$$

所以

$$\boldsymbol{e}=\frac{1}{4\sqrt{6}}\{8,4,4\}=\frac{1}{\sqrt{6}}\{2,1,1\}.$$

习题 8-2

1. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；

(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}$；

(3) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦；