

大学数学系列教材

主编 辛小龙 刘新平

高等数学

阎恩让 曹吉利 薛西峰 荔炜



高等教育出版社

大学数学系列教材

主编 辛小龙 刘新平

高等数学

下

阎恩让 曹吉利 薛西峰 荔 炜

高等教育出版社

内容提要

本书是西北大学、陕西师范大学等八所院校合编的大学数学系列教材之一,综合作者多年教学经验,同时结合新时期大学数学本科生的教学需求编写而成。共分上、下两册,下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等。

本书适合高等学校非数学类专业本专科学生作为教材使用,也可作为工程技术人员及自学者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下 / 辛小龙, 刘新平主编; 阎恩让等编. —北京: 高等教育出版社, 2007. 8
ISBN 978 - 7 - 04 - 021938 - 8

I. 高… II. ①辛…②刘…③阎… III. 高等数学 - 高等学校 - 教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 109124 号

策划编辑 王 强 责任编辑 崔梅萍 封面设计 张申申 责任绘图 尹文军
版式设计 史新薇 责任校对 张 颖 责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010 - 58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京宏伟双华印刷有限公司

开 本 787 × 960 1/16
印 张 19.25
字 数 360 000

购书热线 010 - 58581118
免费咨询 800 - 810 - 0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2007 年 8 月第 1 版
印 次 2007 年 8 月第 1 次印刷
定 价 20.40 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 21938 - 00

郑 重 声 明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

传 真：(010) 82086060

E - mail: dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街 4 号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100011

购书请拨打电话：(010)58581118

目 录

第 7 章	向量代数与空间解析几何	1
7.1	空间直角坐标系	1
7.2	向量及其线性运算	4
7.3	数量积 向量积 * 混合积	11
7.4	平面及其方程	20
7.5	空间直线及其方程	27
7.6	曲面及其方程 常见的二次曲面	34
7.7	空间曲线及其方程	43
	总习题七	48
第 8 章	多元函数微分法及其应用	51
8.1	多元函数及其极限和连续	51
8.2	偏导数	62
8.3	全微分及其应用	68
8.4	多元复合函数的求导法则	76
8.5	隐函数的求导公式	85
8.6	微分法在几何上的应用	91
8.7	方向导数与梯度	98
8.8	多元函数的极值、最值及其应用	105
	总习题八	117
第 9 章	重积分	119
9.1	二重积分的概念与性质	119
9.2	二重积分的计算法	127
9.3	二重积分的应用	148
9.4	三重积分的概念及其算法	159
*9.5	利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分	168
	总习题九	176
第 10 章	曲线积分与曲面积分	178
10.1	对弧长的曲线积分	178
10.2	对坐标的曲线积分	182

10.3	格林公式及其应用	192
*10.4	对面积的曲面积分	205
*10.5	对坐标的曲面积分	210
*10.6	高斯公式和斯托克斯公式	221
	总习题十	231
第 11 章	无穷级数	233
11.1	常数项级数的概念和性质	233
11.2	常数项级数的审敛法	240
11.3	幂级数	250
11.4	函数展开成幂级数	256
11.5	幂级数的和函数	263
*11.6	函数的幂级数展开式的应用	265
*11.7	傅里叶级数	271
	总习题十一	282
	部分习题答案与提示	285

第 7 章 向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中,通过平面直角坐标系把平面上的点与一对有序数组相对应,将平面上的图形和方程对应,从而用代数方法研究几何问题.空间解析几何可以看作是平面解析几何的推广.

空间解析几何是建立在空间直角坐标系的基础上,用代数方法讨论空间的几何图形.本章首先建立空间直角坐标系,其次引进向量并介绍向量的运算,然后以向量为工具讨论空间的平面和直线,最后介绍空间曲面、二次曲面和空间曲线.

7.1 空间直角坐标系

7.1.1 空间直角坐标系

过空间一定点 O 作三条两两垂直的数轴,它们都以定点 O 为原点,且取相同的长度单位,这三条数轴分别称为 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴).它们的正向符合右手系(当右手的四个手指由 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴的正向时,大拇指的指向就是 z 轴的正向).通常将 x 轴、 y 轴放置在水平面上, z 轴为铅垂线,符合右手系,这样三条坐标轴就组成了空间直角坐标系 $Oxyz$ (图 7-1),点 O 称为坐标原点,每两条坐标轴确定的平面称为坐标面,分别是 xOy 坐标面、 yOz 坐标面、 zOx 坐标面.三个坐标面把空间分成八个部分,称为八个卦限.并逐个编号为 I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, 分别称为第一卦限、第二卦限……第八卦限(图 7-2).

我们常采用的坐标系表示法有斜二侧(图 7-1)及正等侧(图 7-3).

设 M 为空间的一点(图 7-4),过点 M 分别作三个与坐标轴垂直的平面,它们与 x 轴、 y 轴、 z 轴的交点依次为 P, Q, R , 其在相应的数轴上的坐标依次为 x, y, z , 从而得到一个有序数组 (x, y, z) ; 反之, 给定一有序数组 (x, y, z) , 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上分别作 $OP = x, OQ = y, OR = z$, 然后过 P, Q, R 分别作与 x 轴、 y 轴、 z 轴垂直的平面, 这三个平面确定了唯一的交点 M . 这样, 空间点 M 就与有序数组 $(x,$

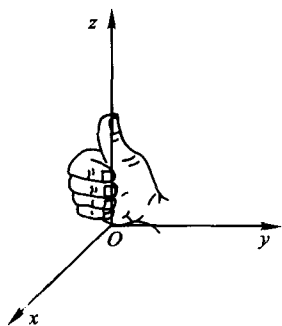


图 7-1

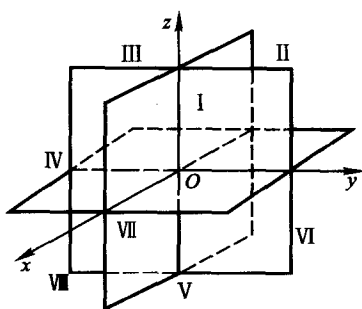


图 7-2

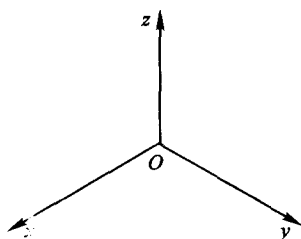


图 7-3

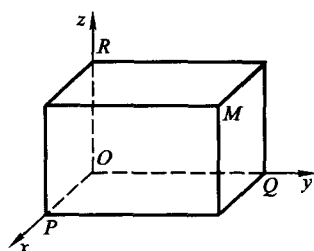


图 7-4

y, z 之间建立了一一对应关系. 称 (x, y, z) 为点 M 的直角坐标, 记为 $M(x, y, z)$, 并依次称 x, y, z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标.

问题 坐标面上和坐标轴上的点的坐标有何特征?

7.1.2 空间两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点, 过 M_1, M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面, 这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体 (图 7-5). 因为

$$\begin{aligned} |M_1M_2|^2 &= |M_1N|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |NM_2|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \end{aligned}$$

所以

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1)$$

这就是两点间的距离公式.

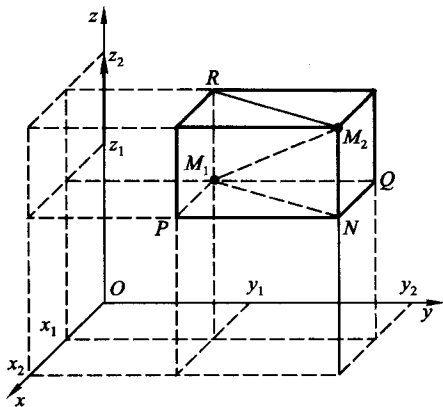


图 7-5

例 1 设 P 是空间内一点, 其坐标为 (x, y, z) , 即 $P(x, y, z)$, 求

(1) 点 P 引至各坐标轴的垂足之坐标为何?

(2) 点 P 引至各坐标面的垂足之坐标为何?

解 根据点与坐标的关系得:

(1) 点 $P(x, y, z)$ 引至 Ox 轴的垂足之坐标为 $(x, 0, 0)$;

点 $P(x, y, z)$ 引至 Oy 轴的垂足之坐标为 $(0, y, 0)$;

点 $P(x, y, z)$ 引至 Oz 轴的垂足之坐标为 $(0, 0, z)$.

(2) 点 $P(x, y, z)$ 引至 xOy 坐标面的垂足之坐标为 $(x, y, 0)$;

点 $P(x, y, z)$ 引至 yOz 坐标面的垂足之坐标为 $(0, y, z)$;

点 $P(x, y, z)$ 引至 zOx 坐标面的垂足之坐标为 $(x, 0, z)$.

例 2 设 $P(1, 2, 3)$ 关于各坐标轴与坐标面对称点之坐标是什么?

解 根据点与坐标轴与坐标面的对称关系得:

点 $P(1, 2, 3)$ 关于 Ox 轴对称点的坐标为 $(1, -2, -3)$;

点 $P(1, 2, 3)$ 关于 Oy 轴对称点的坐标为 $(-1, 2, -3)$;

点 $P(1, 2, 3)$ 关于 Oz 轴对称点的坐标为 $(-1, -2, 3)$;

点 $P(1, 2, 3)$ 关于 xOy 面对称点的坐标为 $(1, 2, -3)$;

点 $P(1, 2, 3)$ 关于 yOz 面对称点的坐标为 $(-1, 2, 3)$;

点 $P(1, 2, 3)$ 关于 zOx 面对称点的坐标为 $(1, -2, 3)$.

例 3 在 z 轴上求与两点 $A(-4, 1, 7)$ 和 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点 M 的坐标.

解 因为所求的点 M 在 z 轴上, 所以可设该点坐标为 $M(0, 0, z)$, 根据题意有

$$|MA| = |MB|,$$

$$\text{即} \sqrt{(0+4)^2 + (0-1)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (5-0)^2 + (-2-z)^2},$$

化简得 $z = \frac{14}{9}$, 故所求的点为 $M(0, 0, \frac{14}{9})$.

习题 7.1

1. 设空间直角坐标系中一点 P 的坐标为 $(3, -2, 1)$, 从点 P 分别向各坐标轴和各坐标平面引垂线, 试求各个垂足的坐标.

2. 试求点 $P(a, b, c)$ 关于各坐标面、各坐标轴及坐标原点的对称点的坐标.

3. 在坐标面和坐标轴上的点的坐标各有什么特点? 指出下列各点的位置.

$$A(3, 4, 0); B(0, 1, 2); C(3, 0, 0); D(0, -1, 0).$$

4. 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面, 问在它们上面的点的坐标各有什么特点?

5. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上, 其底面的中心在坐标原点, 底面的顶点在 x 轴上和 y 轴上, 求它各顶点的坐标.

6. 求点 $M(4, -3, 5)$ 到原点及各坐标轴间的距离.

7. 在 yOz 面上, 求与三点 $A(3, 1, 2)$, $B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点.

8. 证明 $P_1(1, 2, 3)$, $P_2(2, 3, 1)$, $P_3(3, 1, 2)$ 三点构成一个正三角形.

7.2 向量及其线性运算

7.2.1 向量的概念

在研究力学、物理学以及其他应用科学时, 常会遇到这样一类量, 它们既有大小, 又有方向, 如力、力矩、位移、速度、加速度等, 将这种既有大小又有方向的量, 称为向量(或矢量).

在数学上, 往往用有向线段来表示向量, 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为起点, M_2 为终点的有向线段所表示的向量, 记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$ (图 7-6). 有时也用黑体小写字母或上面加箭头的小写字母来表示向量, 如 $\mathbf{a}$ 或 $\vec{a}$, 向量的大小称为向量的模(也称为向量的范数, 记为 $|\cdot|$), 如向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$, $\mathbf{a}$ 的模为 $|\mathbf{a}|$. 模为 1 的向量称为单位向量, 模为零的向量称为零向量, 记为 $\mathbf{0}$, 其方向可任意选取.

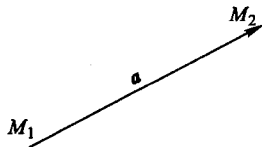


图 7-6

在这里我们只研究与起点无关的向量,即只考虑向量的大小和方向,而不论它的起点在什么位置,这种向量称为自由向量. 由于我们只讨论自由向量,所以如果两个向量 a 与向量 b 的模相等且方向相同,我们就说向量 a 与向量 b 是相等的,记作 $a = b$. 从几何直观上看,就是经过平移后能完全重合的向量是相等的.

两个非零向量的方向相同或相反,就称这两个向量平行,向量 a 与 b 平行,记作 $a // b$.

7.2.2 向量的线性运算(加减法、数乘向量)

1. 向量的加减法

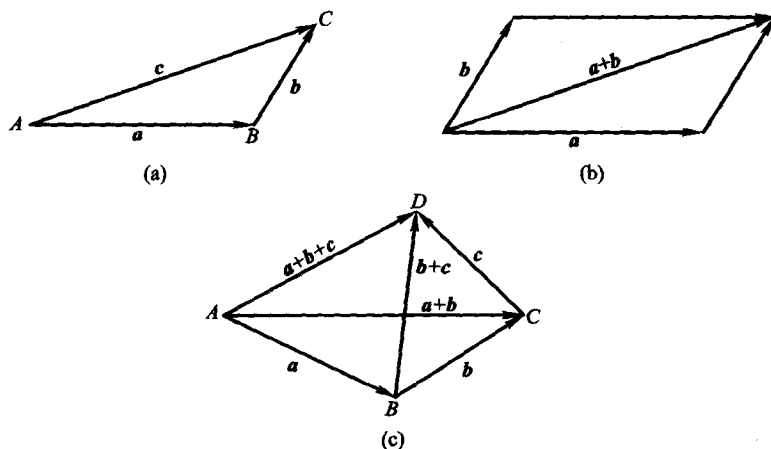


图 7-7

设有两个向量 a 与 b , 任取一点 A , 作 $\overrightarrow{AB} = a$, 再以 B 为起点, 作 $\overrightarrow{BC} = b$, 连接 AC , 向量 $\overrightarrow{AC} = c$ 称为向量 a 与向量 b 的和, 记作 $a + b$, 如图 7-7(a), 称作向量加法的三角形法则.

仿此, 也有向量加法的平行四边形法则(图 7-7(b)).

向量的加法符合下列运算规律:

- (1) 交换律 $a + b = b + a$;
- (2) 结合律 $(a + b) + c = a + (b + c)$ (图 7-7(c)).

设 a 为一向量, 与 a 的模相等而方向相反的向量叫做 a 的负向量, 记作 $-a$, 由此, 我们把 $b + (-a)$ 称为向量 b 与 a 的差, 记作 $b - a = b + (-a)$ (图 7-8).

2. 向量与数的乘法

设 a 是一个非零向量, λ 是一个非零实数, 则 a 与 λ 的乘积记作 λa , 规定 λa 是一个向量, 且

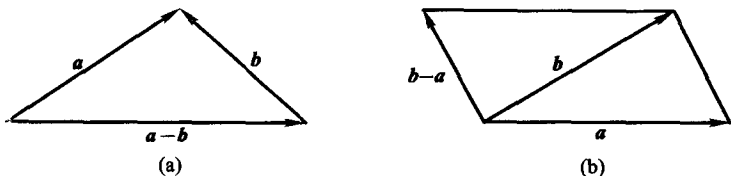


图 7-8

$$(1) |\lambda a| = |\lambda| |a|;$$

(2) λa 的方向为: 当 $\lambda > 0$ 时, 与 a 同向; 当 $\lambda < 0$ 时, 与 a 反向.

如果 $\lambda = 0$ 或 $a = 0$, 则规定 $\lambda a = 0$.

容易验证, 向量与数的乘法满足以下运算规律:

$$(1) \text{ 结合律 } \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a;$$

$$(2) \text{ 分配律 } (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a; \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b, \text{ 其中 } \lambda, \mu \text{ 都是常数.}$$

设 a 是非零向量, 由数乘向量的规定可知, 向量 $\frac{a}{|a|}$ 的模等于 1, 且与 a 同方向, 记作 a^0 或 e_a , 即 $e_a = a^0 = \frac{a}{|a|}$. 显然 $a = |a| e_a$.

向量的加减法及向量与数的乘法统称为向量的线性运算.

7.2.3 向量的坐标表示

为了用向量研究几何图形, 需将向量运算用代数表示. 在空间直角坐标系中, 若将向量的始点移到坐标原点 O , 则这个向量完全由其终点确定; 反过来, 任给空间一点 M , 总可以确定一个向量 $\vec{OM}$. 即就是说, 空间的点与始点在原点的向量有一一对应的关系.

在空间直角坐标系中与 x 轴、 y 轴、 z 轴的正向同向的单位向量称为基本单位向量, 分别记作 i, j, k .

设向量 a 的起点在坐标原点, 终点坐标为 $M(x, y, z)$, 过终点 M 作与坐标轴垂直的平面, 交 x 轴、 y 轴、 z 轴于 P, Q, R 点 (图 7-9), 由向量的加法及数乘向量运算, 有

$$a = \vec{OM} = \vec{OM} + \vec{M'M} = \vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR},$$

即

$$a = xi + yj + zk. \quad (1)$$

称 (1) 式为向量 a 按基本单位向量的分解式. 有时为了使用的方便, 亦记

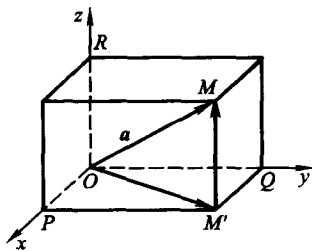


图 7-9

$$\mathbf{a} = (x, y, z), \quad (2)$$

称(2)式为向量 $\mathbf{a}$ 的坐标表示式.

将向量 $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ 放入空间直角坐标系中, 如果 M_1 和 M_2 的坐标分别为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 根据向量的线性运算, 如图 7-10, 得

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1 M_2} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} \\ &= (x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}) - (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}) \\ &= (x_2 - x_1) \mathbf{i} + (y_2 - y_1) \mathbf{j} + (z_2 - z_1) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

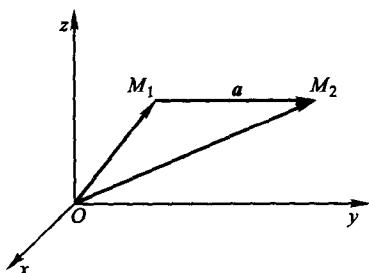


图 7-10

若记 $x_2 - x_1 = a_x$, $y_2 - y_1 = a_y$, $z_2 - z_1 = a_z$, 则

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}.$$

利用向量的坐标, 可以将向量的线性运算转化为代数运算.

设 $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$, 于是

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \pm \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \pm (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= (a_x \pm b_x) \mathbf{i} + (a_y \pm b_y) \mathbf{j} + (a_z \pm b_z) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

即

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z).$$

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) = \lambda a_x \mathbf{i} + \lambda a_y \mathbf{j} + \lambda a_z \mathbf{k},$$

即 $\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$ (λ 为常数).

例 1 设有两个非零向量 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 证明: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 的充分必要条件是 $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$.

证明 必要性. 如果 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 根据数乘向量的规定, $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$ 且 $\lambda \neq 0$, 即有 $(a_x, a_y, a_z) = \lambda(b_x, b_y, b_z)$, 根据二向量相等有 $a_x = \lambda b_x$, $a_y = \lambda b_y$, $a_z = \lambda b_z$, 从而

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

充分性. 如果 $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$, 设其比为 λ , 于是 $a_x = \lambda b_x$, $a_y = \lambda b_y$, $a_z = \lambda b_z$, 即 $(a_x, a_y, a_z) = \lambda(b_x, b_y, b_z)$, 则 $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$, 根据自由向量的含义, $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

例2 设 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ 为已知两点, 而在 $\overrightarrow{AB}$ 直线上的点 M 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 为两个有向线段 $\overrightarrow{AM}$ 和 $\overrightarrow{MB}$, 使它们的值的比等于某数 λ ($\lambda \neq -1$) (图 7-11), 即 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$, 求分点 M 的坐标 (x, y, z) .

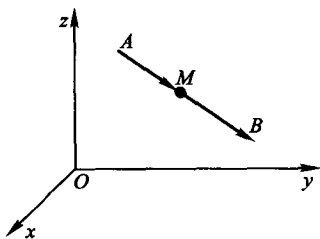


图 7-11

解 因为 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 在同一直线上 (图 7-11), 所以依题意有 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$, 而

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM},$$

因此

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}).$$

从而

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}),$$

即

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \frac{1}{1+\lambda}((x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2)) \\ &= \frac{1}{1+\lambda}(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2). \end{aligned}$$

由此即得点 M 的坐标分别为

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}, \\ (x, y, z) &= \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \right), \end{aligned}$$

点 M 叫做有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的定比分点. 当 $\lambda = 1$ 时, 点 M 是有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的中点, 其坐标为

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

7.2.4 向量的模与方向余弦的坐标表示式

向量可以用它的模和方向来表示, 也可以用它的坐标来表示, 为了应用上的

方便,有必要找出这两种表示法之间的联系.

设向量 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = \overrightarrow{M_1 M_2}$, 根据两点间距离公式

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}| &= |\overrightarrow{M_1 M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \end{aligned}$$

即

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

对于非零向量 $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1 M_2}$, 我们可以用它与三个坐标轴的夹角 α, β, γ ($0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi, 0 \leq \gamma \leq \pi$) 来表示它的方向 (图 7-12). 称 α, β, γ 为非零向量 $\mathbf{a}$ 的方向角, 称 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为向量 $\mathbf{a}$ 的方向余弦.

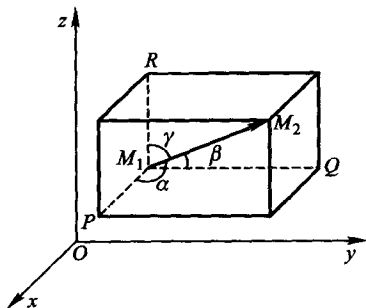


图 7-12

因为 $\triangle M_1 P M_2, \triangle M_1 Q M_2, \triangle M_1 R M_2$ 都是直角三角形, 所以

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos \beta &= \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

由上式易得

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (4)$$

若 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 则有

$$e_a = a^0 = \frac{a}{|a|} = \frac{1}{|a|}(a_x, a_y, a_z) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

即与非零向量 a 同方向的单位向量可由其方向余弦表示.

例 3 已知 $M_1(2, 2, \sqrt{2}), M_2(1, 3, 0)$, 求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1, 1, -\sqrt{2}), |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2;$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \cos \beta = \frac{1}{2}, \cos \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha = \frac{2}{3}\pi, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{3}{4}\pi.$$

例 4 设向量 a 的两个方向余弦为 $\cos \alpha = \frac{1}{3}, \cos \beta = \frac{2}{3}$, 又 $|a| = 6$, 求向量 a 的坐标.

解 因为 $\cos \alpha = \frac{1}{3}, \cos \beta = \frac{2}{3}$, 由公式(4)得

$$\cos \gamma = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} = \pm \frac{2}{3},$$

根据公式(3)得

$$a_x = |a| \cos \alpha = 6 \times \frac{1}{3} = 2,$$

$$a_y = |a| \cos \beta = 6 \times \frac{2}{3} = 4,$$

$$a_z = |a| \cos \gamma = 6 \times \left(\pm \frac{2}{3}\right) = \pm 4.$$

所以

$$a = (2, 4, 4) \text{ 或 } a = (2, 4, -4).$$

习题 7.2

1. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分, 试用向量证明它是平行四边形.
2. $\triangle ABC$ 的边 AB 被点 M, N 分成三等份: $|AM| = |MN| = |NB|$, 设 $\overrightarrow{CA} = a, \overrightarrow{CB} = b$, 试求 $\overrightarrow{CM}$.
3. 设 $\triangle ABC$ 的质心为 G, O 为坐标原点, $\overrightarrow{OA} = r_1, \overrightarrow{OB} = r_2, \overrightarrow{OC} = r_3$. 证明: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)$.
4. 设 $m = 3i + 5j + 8k, n = 2i - 4j - 7k, p = 5i + j - 4k$, 试求 $4m + 3n - p$ 的坐标表示式.

5. 从点 $4(2, -1, 7)$ 沿向量 $\mathbf{a} = 8\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ 的方向取 $|\overrightarrow{AB}| = 34$, 试求点 B 的坐标.
6. 向量 $\mathbf{a} = (4, -4, 7)$, $\mathbf{a}$ 的终点 B 的坐标为 $(2, -1, 7)$, 求它的始点 A 的坐标及 $\mathbf{a}$ 的方向余弦.
7. 设 $|\boldsymbol{\epsilon}| = 5$, 方向余弦 $\cos \alpha = 0, \cos \beta = \frac{1}{2}, \cos \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 试求 $\mathbf{a}$.
8. 一向量 $\mathbf{a}$ 的模为 6, $\mathbf{a}$ 与 x 轴、 y 轴正向的夹角分别为 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$. 求 $\mathbf{a}$ 及其同向单位向量.
9. 求平行于向量 $\mathbf{a} = (6, 7, -6)$ 的单位向量.
10. 在第一卦限内, 求与坐标轴成等角的单位向量.
11. 已知三角形的三个顶点是 $A(3, 6, -2), B(7, -4, 3), C(-1, 4, -7)$. 求其质心坐标.

7.3 数量积 向量积 * 混合积

7.3.1 向量的数量积

设一物体在常力 $\mathbf{F}$ 的作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2 , 记位移 $\overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{s}$. 由物理学知, 力 $\mathbf{F}$ 所作的功为 $W = |\mathbf{F}| |\mathbf{s}| \cos \theta$, 其中 θ 为 $\mathbf{F}$ 与 $\mathbf{s}$ 的夹角 (图 7-13), 且记 $\theta = (\mathbf{F}, \mathbf{s})$.

从这个问题可以看出, 我们有时对两个向量作上述运算, 其结果为一数量.

定义 1 向量 $\mathbf{a}$ 的模与向量 $\mathbf{b}$ 的模及其夹角余弦的乘积, 称为向量 $\mathbf{a}$ 与向量 $\mathbf{b}$ 的数量积 (也称内积), 记作 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 即

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (0 \leq (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \pi). \quad (1)$$

根据这个定义, 上述问题中力所做的功 W 是力 $\mathbf{F}$ 与位移 $\mathbf{s}$ 的数量积, 即 $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$.

定义 2 $|\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 在向量 $\mathbf{b}$ 上的投影 (图 7-14), 记作 $\text{Prj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$, 即 $\text{Prj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

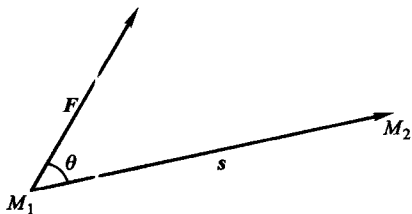


图 7-13

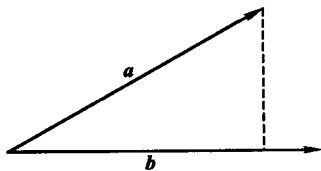


图 7-14