



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

信号与系统

XINHAO YU XITONG

容太平 主编

华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

信号与系统

主编 容太平
参编 陆三兰 尹平林
肖志向 何兆湘

华中科技大学出版社
(中国·武汉)

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统/容太平 主编. —武汉:华中科技大学出版社,2007年7月
ISBN 978-7-5609-4075-5

I. 信… II. 容… III. 信号系统-高等学校-教材 IV. TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第101465号

信号与系统

容太平 主编

策划编辑:谢燕群

责任编辑:叶见欣

责任校对:刘 竣

封面设计:潘 群

责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉众心设计室

印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:787mm×1092mm 1/16

印张:30

字数:674 000

版次:2007年7月第1版

印次:2007年7月第1次印刷

定价:39.80元

ISBN 978-7-5609-4075-5/TN·111

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十一五”规划国家教材。作者根据通信与电子信息科学技术的发展和培养通信与电子信息方面高级专业人才的需要,结合近十几年的教学实践经验,在“着重打好基础和提升发展潜力”的原则下编写而成。

全书共分 10 章,包括:绪论,连续时间系统的时域分析,连续时间信号的频谱与傅里叶变换,连续时间系统的频域分析,拉普拉斯变换与连续时间系统的复频域分析,连续时间系统的系统函数,离散时间系统的时域分析, Z 变换与离散时间系统的 z 域分析,离散傅里叶变换与快速傅里叶变换,线性系统的状态变量分析等内容。

本书可供普通高等院校通信、电子信息、光电信息、计算机、自动控制、电气类专业作为“信号与系统”课程的教材使用,也可供有关科技人员参考。

前 言

本书是普通高等教育“十一五”规划国家教材,是根据通信与电子信息科学技术的发展和培养通信与电子信息方面高级专业技术人才的需要,综合近十几年的教学经验,按照加强信息技术学科的知识基础和提升今后发展潜力的原则,在原有讲义的基础上编写而成的。

在通信与信息技术高速发展的今天,信号与系统课程已成为普通高等学校中电子信息、通信工程、光电工程、计算机工程、自动控制、电子科学技术、生物电子工程、电力控制等弱电类专业的一门重要的技术基础课。由于它为实际应用中的“信号、系统”提供了数学分析与设计的理论基础;为连续信号的抽样、离散信号与离散系统提供了数学分析与设计的理论基础,因而成为许多课程的理论基础。其后续课程如:电子线路分析与设计、电子线路原理、通信原理、光纤通信、计算机网络通信、数字信号处理、数字图像处理、数字语音处理、计算机原理、电视原理、控制原理、ASIC 系统分析与设计等。学习《信号与系统》应先修如下课程:高等数学、复变函数、线性代数、电路基本理论、MATLAB 编程等。

本课程主要研究确定信号的特性、线性非时变系统的性质、信号通过线性系统的响应,以及由此引出的信号与线性系统理论中重要的基本概念和基本分析方法。并通过对某些典型信号、典型系统及响应进行深入讨论,使读者初步认识如何建立信号与系统的数学模型,如何正确地进行数学分析与求解工作,并能对所得的结果给出适当的物理意义解释。

全书共分 10 章。第 1 章主要介绍信号、系统的概念和概述信号与系统的分析方法;第 2 章主要介绍连续时间系统的时域分析,建立系统的零输入响应、零状态响应和全响应概念;第 3 章主要介绍连续时间信号的频谱与傅里叶变换,建立正交变换与信号频谱的概念,掌握傅里叶变换及其性质;第 4 章主要介绍连续时间系统的频域分析,建立系统频响的概念,掌握系统的频域分析方法;第 5 章主要介绍拉普拉斯变换与连续时间系统的复频域分析,建立复频域的概念,掌握拉普拉斯变换及其性质,掌握复频域的分析方法;第 6 章主要介绍连续时间系统的系统函数,建立系统频率特性和稳定性的概念,掌握系统频率特性的表示法和稳定性的判定方法;第 7 章主要介绍离散时间系统的时域分析,建立离散时间信号和离散时间系统的概念,掌握离散时间系统的时域分析方法;第 8 章主要介绍 Z 变换与离散时间系统的 z 域分析,建立 z 域的概念,掌握 Z 变换及其性质,掌握离散时间系统的 z 域分析方法;第 9 章主要介绍离散傅里叶变换与快速傅里叶变换,建立离散傅里叶变换与快速傅里叶变换的概念,掌握离散傅里叶变换及其性质、快速傅里叶变换方法及其应用;第 10 章主要介绍线性系统的状态变量分析,建立状态变量的概念,掌握线性系统的状态变量分析方法。

本课程的教学安排是由浅入深、从易到难,深入浅出,先连续后离散,先讲单变量输入输出方程,后讲状态变量方程。全书构成了一个完整的知识体系,具有较强理论性和实践性。在使用本书时,对于各章节的顺序、内容的舍取,应根据实际情况确定,不要受本书的约束。

为了使读者能更好地理解基本概念和分析方法,除了精选不少的例题和习题外,还准备编写一本与本书配套的学习指导书。为了配合课程教学、加强学生对信号与系统理论的感性认

识,提高学生计算机应用能力,准备编写与本书配套的《基于 MATLAB 的信号与系统实验指导书》,可进行 12 个学时的上机实验。该实验系统是一个包含十多个软件在内的软件包,全部源程序均用 MATLAB 语言编写,既可直接作为信号处理的程序库,又可作为实验演示,还可让读者参与编程。

本书由容太平同志主编。第 7、8、10 章由陆三兰同志执笔,第 5、6 章由尹平林同志执笔,第 9 章由何兆湘同志执笔,第 2、3 章由肖志向同志执笔,第 1、4 章由容太平同志执笔,并统编全书。

本书可供普通高等院校通信、电子信息、光电信息、计算机、控制工程、电气类专业作为“信号与系统”课程的教材使用,也可供有关科技人员参考。

在本书的编写过程中得到了华中科技大学电子与信息工程系、光电信息学院信号与系统平台课程组的大力支持和帮助,在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限,书中会存在一些缺点和错误,敬请广大读者给予批评和斧正,我们不胜感激。

编 者

2006 年 12 月

目 录

第1章 绪论	(1)
1.1 引言	(1)
1.2 信号的概念	(1)
1.3 系统的概念	(10)
1.4 信号与系统分析方法概述	(14)
习题	(15)
第2章 连续时间系统的时域分析	(18)
2.1 引言	(18)
2.2 连续时间系统的算子表示方法	(24)
2.3 连续时间系统的零输入响应	(27)
2.4 连续时间系统的零状态响应	(30)
2.5 卷积积分	(37)
2.6 线性系统零输入响应、零状态响应的时域求解	(44)
小结	(48)
习题	(49)
第3章 连续时间信号的频谱与傅里叶变换	(52)
3.1 引言	(52)
3.2 信号表示为正交函数集	(52)
3.3 连续周期信号的频谱分析	(60)
3.4 常用周期信号的频谱	(65)
3.5 非周期信号的频谱分析——傅里叶变换	(71)
3.6 常用非周期信号的频谱	(76)
3.7 傅里叶变换的性质	(83)
3.8 信号的功率频谱与能量频谱	(96)
小结	(100)
习题	(103)
第4章 连续时间系统的频域分析	(107)
4.1 引言	(107)
4.2 有始信号通过线性电路的瞬态分析	(108)
4.3 阶跃信号通过理想低通滤波器的分析	(111)

4.4	信号通过线性系统不产生失真的条件	(114)
小结		(116)
习题		(117)
第5章	拉普拉斯变换与连续时间系统的复频域分析	(119)
5.1	引言	(119)
5.2	拉普拉斯变换	(120)
5.3	拉普拉斯变换的收敛域	(126)
5.4	常用函数的拉普拉斯变换	(128)
5.5	拉普拉斯变换的基本性质	(132)
5.6	拉普拉斯反变换	(145)
5.7	拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系	(157)
5.8	线性系统的拉普拉斯变换分析法	(160)
5.9	线性系统的模拟	(176)
5.10	信号流图	(191)
小结		(203)
习题		(204)
第6章	连续时间系统的系统函数	(208)
6.1	引言	(208)
6.2	系统函数与系统时域特性	(208)
6.3	系统函数零、极点与频率特性的关系	(211)
6.4	系统频率特性的表示法	(219)
6.5	系统的稳定性	(240)
6.6	奈奎斯特判据	(252)
6.7	根轨迹	(264)
小结		(280)
习题		(281)
第7章	离散时间系统的时域分析	(285)
7.1	引言	(285)
7.2	离散时间信号与线性非时变离散时间系统	(287)
7.3	抽样信号与抽样定理	(293)
7.4	离散时间系统的数学描述和模拟	(299)
7.5	离散时间系统的零输入响应	(305)
7.6	卷积和算法	(310)
7.7	离散时间系统的零状态响应	(315)
小结		(322)

习题	(326)
第 8 章 Z 变换与离散时间系统的 z 域分析	(329)
8.1 引言	(329)
8.2 Z 变换及其收敛域	(331)
8.3 Z 变换的基本性质	(339)
8.4 反 Z 变换	(345)
8.5 Z 变换与拉普拉斯变换的关系	(352)
8.6 离散时间系统的系统函数和 z 域模拟	(354)
8.7 离散时间系统的零输入、零状态分析法	(358)
8.8 带初始条件的差分方程 Z 变换分析法	(360)
8.9 系统函数 $H(z)$ 的零、极点分布与系统特性	(363)
8.10 离散时间系统的频率响应特性	(367)
小结	(372)
习题	(376)
第 9 章 离散傅里叶变换与快速傅里叶变换	(380)
9.1 引言	(380)
9.2 离散傅里叶变换及性质	(382)
9.3 离散傅里叶变换与 Z 变换的关系	(396)
9.4 快速傅里叶变换	(398)
9.5 离散傅里叶变换的应用	(407)
小结	(412)
习题	(415)
第 10 章 线性系统的状态变量分析	(418)
10.1 引言	(418)
10.2 系统的状态方程	(422)
10.3 连续时间系统状态方程的复频域解	(439)
10.4 连续时间系统状态方程的时域解	(444)
10.5 离散时间系统状态方程的解	(452)
10.6 状态方程描述的系统模拟	(457)
10.7 线性系统的可控制性与可观测性	(459)
小结	(462)
习题	(464)
参考文献	(468)

1.1 引 言

自从爱因斯坦的“相对论”、维纳的“控制论”、香农的“信息论”发表以来,世界科学技术发生了巨大的变化,新的工业化革命席卷全球。尤其是近几十年来,在微电子技术、计算机技术、通信技术快速发展的基础上,世界迅速进入以计算机网络通信为特点、以知识经济为标志的信息时代。

在信息时代,“信息”是一项重要的资源,通过传输与交换就能创造出价值。在现代科学技术日益发展的条件下,携带信息的信号和传输系统日益复杂,促进了信号与系统的理论研究的进一步发展。古代用烽火信号传递信息,近代用无线电报传递信息,现代用光纤宽带网传递信息。如何在有限的带宽内传递更多的信息,如何保证信息传递的安全可靠,这都是现代信号与系统中要研究的问题。信号的基本分析方法、系统的基本分析方法,是现代信号与系统分析方法的基础。

“信号与系统”的基本概念、基本理论和基本方法直接促进了以下科学技术的发展,为之奠定了理论基础。

其一,用数学模拟的方法研究信号与系统,促进了信号与系统模拟仿真技术的发展。

其二,用变换域的方法研究信号与系统,促进了信号与系统正交变换技术的发展。

其三,用离散的方法研究连续的信号与系统,促进了信号与系统数字化技术的发展。

“信号与系统”的概念、理论和方法已广泛地应用到各个学科领域,例如,在通信、微电子、计算机、航天航空、自动控制、生物医学、图像识别等学科领域中都得到了应用。甚至在社会学信息方面也离不开“信号与系统”所研究的基本概念、基本理论和基本方法。

1.2 信号的概念

1.2.1 信号的分类

信号是消息的表现形式,消息则是信号的具体内容。由于消息是描述信息而约定的符号、语言文字、图像及编码等内容,因而信号就是信息的载体。

从整体上看,信号可分为两大类,即确定信号与随机信号。确定信号可以表示为一确定的时间函数,当给定某一时间值时,可以确定相应的函数值。随机信号不是一个确定的时间函

数,当给定某一时间值时,其函数值并不确定,而只知其取值的概率。本教材主要研究确定信号的问题。

1.2.2 确定信号

确定信号可按信号的连续性特性,周期性特性,功率、能量特性进行分类。

连续信号是指在某一时间段内,除若干个不连续点外,在连续的时间点上都有确定的函数值的信号,如图 1-1 所示。

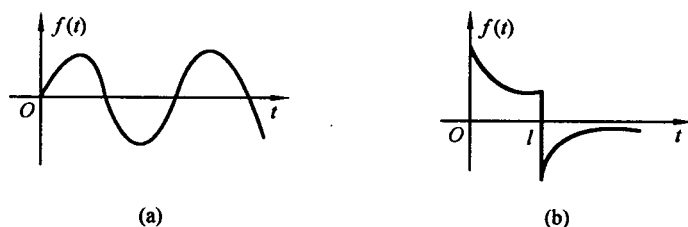


图 1-1 连续信号

一般,连续信号的时间域从负无穷大到正无穷大,图 1-1 所示的连续信号可以看成是当 $t < 0$ 时, $f(t) = 0$ 的信号。该信号称为起点为“0”的有始信号。图 1-1(b) 中的 l 点为间断点,该信号为一下跳信号。若信号的函数值和时间变量都是连续的,则称该连续信号为模拟信号。

离散信号是指在一些离散的时间点上有确定的函数值的信号,其他时间点上无定义,如图 1-2 所示。

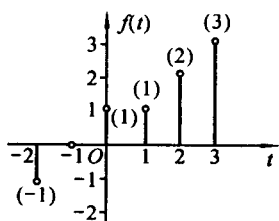


图 1-2 离散信号

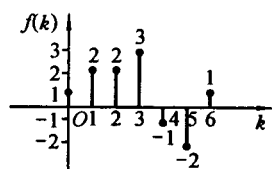


图 1-3 有始离散信号

图 1-2 中,
$$f(t) = \begin{cases} f(t_k) & (t_k = -2, -1, 0, 1, 2, \dots) \\ \text{无定义} & (t \neq t_k) \end{cases}$$

一般,离散信号可表示成 $f(k)$,其时间域从负无穷大到正无穷大,图 1-3 所示的离散信号可以看成是当 $k < 0$ 时, $f(k) = 0$ 的信号。该信号称为起点为“0”的有始信号。

周期信号是指在时间上按照某一规律重复变化的信号,如图 1-4 所示。

图 1-4(a)、(b) 所示的为连续信号中的周期信号;图 1-4(c)、(d) 所示的为离散信号中的周期信号。

非周期信号是指在时间上不具有周而复始变化规律的信号,也可以说,它的周期为无穷大。

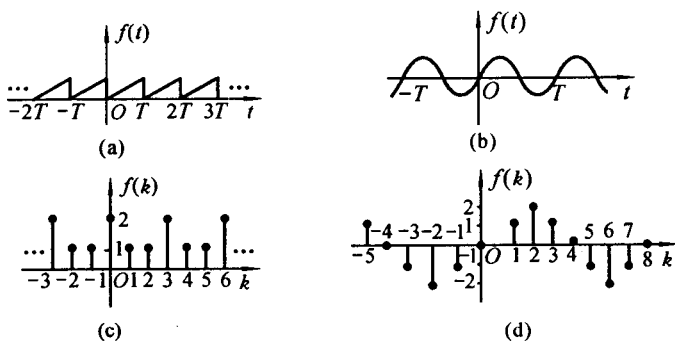


图 1-4 周期信号

周期信号中的一个重要参数是周期,如果一个信号存在着周期,则这种信号称为周期信号;否则为非周期信号。

例 1-1 已知连续信号 (1) $f_1(t) = a \sin t - b \sin 5t$;

(2) $f_2(t) = a \sin t - b \sin \pi t$ 。

试判断合成信号 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 是否为周期信号,并求出其周期。

解 (1) $f_1(t) = a \sin t - b \sin 5t$

式中,各分量的角频率分别为 $\omega_1 = 1, \omega_2 = 5$,对应的分量周期分别为 $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi, T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{5}$ 。 T_1, T_2 的最小公倍数为 2π ,因而合成信号的周期 $T = 2\pi$ 。即合成信号 $f_1(t)$ 为周期信号。

计算如下:

$$\omega_1 : \omega_2 = 1 : 5 = m_1 : m_2 = T_2 : T_1$$

则

$$T_1 m_1 = T_2 m_2 = 2\pi = T$$

式中, T 为 T_1, T_2 的最小公倍数; $m_1 : m_2$ 为有理数。

(2) $f_2(t) = a \sin t - b \sin \pi t$

式中,各分量角频率分别为 $\omega_1 = 1, \omega_2 = \pi$ 。对应的分量周期为 $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi, T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2$, T_1, T_2 的最小公倍数为无穷大,即 $f_2(t)$ 为非周期信号。

计算如下:

$$\omega_1 : \omega_2 = 1 : \pi = m_1 : m_2 = T_2 : T_1$$

由于 $m_1 : m_2$ 为无理数, T_1, T_2 的最小公倍数为无穷大,即 $T = \infty$,故合成信号 $f_2(t)$ 为非周期信号。

例 1-2 已知离散信号 (1) $f_1(k) = A \cos\left(\frac{3\pi k}{5} - \frac{\pi}{8}\right)$;

(2) $f_2(k) = \cos\left(\frac{k}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi k}{8}\right)$ 。

试判断序列信号 $f_1(k), f_2(k)$ 是否为周期信号,并求出其周期。

解 (1) 设 $f_1(k)$ 的周期为 N ,则有

$$f_1(k+N) = A \cos \left[\frac{3\pi}{5}(k+N) - \frac{\pi}{8} \right]$$

只有当 $\frac{3\pi}{5}N = 2n\pi$ 时, $f_1(k+N) = f_1(k)$

因而 $N = \frac{10n}{3}$ 。当 $n = 3$ 时, N 为最小的正整数。即 $f_1(k)$ 的基本周期 $N = 10$ 。

$$(2) \text{ 展开 } f_2(k) = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{k}{8}(\pi+2) + \cos \frac{k}{8}(\pi-2) \right]$$

设 $f_2(k)$ 的周期为 N , 则有

$$f_2(k+N) = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{k+N}{8}(\pi+2) + \cos \frac{k+N}{8}(\pi-2) \right]$$

从等式右边第一项可得

$$N = 2n\pi / \left(\frac{\pi+2}{8} \right) = \frac{16n\pi}{\pi+2}$$

从第二项可得

$$N = 2n\pi / \left(\frac{\pi-2}{8} \right) = \frac{16n\pi}{\pi-2}$$

式中, $n = 1, 2, 3, \dots$ 。由于 π 是无理数, N 不能为正整数, 故 $f_2(k)$ 为非周期序列。

功率信号是指平均功率有限, 而总能量可以达到无限的信号。这里所指的功率是信号作用在 1Ω 电阻上产生的平均功率, 即

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt$$

式中, T 为信号的周期, 如图 1-5 所示。

周期信号、交流市电等都是功率信号。

能量信号是指总能量有限, 而平均功率为零的信号。这里所指的总能量是信号作用在 1Ω 电阻上产生的能量, 即

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt$$

单脉冲非周期信号等是能量信号, 如图 1-6 所示。

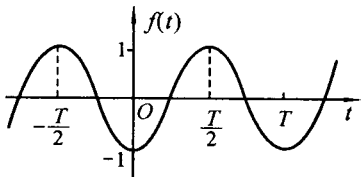


图 1-5 周期信号

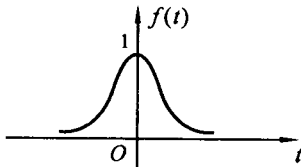


图 1-6 非周期单脉冲信号

例 1-3 判断下列信号的周期性、功率和能量特性, 并计算出对应的能量或平均功率。

$$(1) f(t) = \begin{cases} 5\cos(8\pi t) & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0); \end{cases}$$

$$(2) f(t) = 20e^{-10|t|} \cos \pi t \quad (-\infty < t < +\infty).$$

解 (1) 由于信号 $f(t)$ 的负半边为 0, 所以是非周期信号, 其正半边为周期信号, 故为功

率信号。周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4}$$

考虑时间正负两边的情况,平均功率为

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = 4 \int_{-\frac{T}{2}}^0 0 dt + 4 \int_0^{\frac{T}{2}} 25 \times (1 + \cos 16\pi t) \times \frac{1}{2} dt \\ &= 4 \times \frac{1}{2} \times 25 \times \frac{1}{8} W = 6.25 W\end{aligned}$$

(2) 信号 $f(t)$ 为偶双边指数衰减振荡信号,为非周期能量信号。总的能量为

$$\begin{aligned}W &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^0 400e^{20t} \cos^2(\pi t) dt + \int_0^{+\infty} 400e^{-20t} \cos^2(\pi t) dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} 400e^{-20t} \cos^2(\pi t) dt = 800 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} (e^{-20t} + e^{-20t} \cos(2\pi t)) dt \\ &= 20 + 400 \int_0^{+\infty} e^{-20t} \cos(2\pi t) dt = \left(20 + \frac{20 \times 400}{400 + 4\pi^2} \right) J = 38.2 J\end{aligned}$$

1.2.3 信号的基本运算与变换

信号的相加或相乘是指在同一时间区域中进行相加或相乘。

例 1-4 已知 $f_1(t) = \begin{cases} 2-t & (t < 0) \\ 2+t & (1 > t \geq 0) \\ 3 & (t \geq 1) \end{cases}$

$$f_2(t) = \begin{cases} 2 & (t < 0) \\ t+2 & (t \geq 0) \end{cases}$$

求 $f_3(t) = f_1(t) + f_2(t)$; $f_4(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)$ 。

解

$$f_3(t) = f_1(t) + f_2(t) = \begin{cases} 4-t & (t < 0) \\ 4+2t & (1 > t \geq 0) \\ 5+t & (t \geq 1) \end{cases}$$

$$f_4(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) = \begin{cases} 2(2-t) & (t < 0) \\ (2+t)^2 & (1 > t \geq 0) \\ 3(2+t) & (t \geq 0) \end{cases}$$

信号的平移、反褶、尺度变换都是基本变换,是对时间轴的变换。“平移”是指信号在时间轴上发生了平行移动,“反褶”是指信号对纵轴进行时间反转,“尺度”是指信号对纵轴进行时间轴的比例变换。

例 1-5 已知 $f(t)$ 如图 1-7 所示,分别画出信号 $f(t-1)$, $f(t+1)$, $f(-t)$, $f(2t)$, $f\left(\frac{t}{2}\right)$ 的波形。

解 (1) 平移 $f(t-1)$ 表示信号向右平移了一个单元,如图 1-8(a) 所示。 $f(t+1)$ 表示信号向左平移了一个单元,如图 1-8(b) 所示。

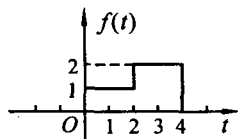


图 1-7 原始信号

(2) 反褶 $f(-t)$ 表示信号以纵轴对称反转, 如图 1-8(c) 所示。

(3) 尺度变换 $f(2t)$ 表示信号以纵轴为中心压缩了 2 倍, 如图 1-8(d) 所示。 $f\left(\frac{t}{2}\right)$ 表示信号以纵轴为中心扩展了 2 倍, 如图 1-8(e) 所示。

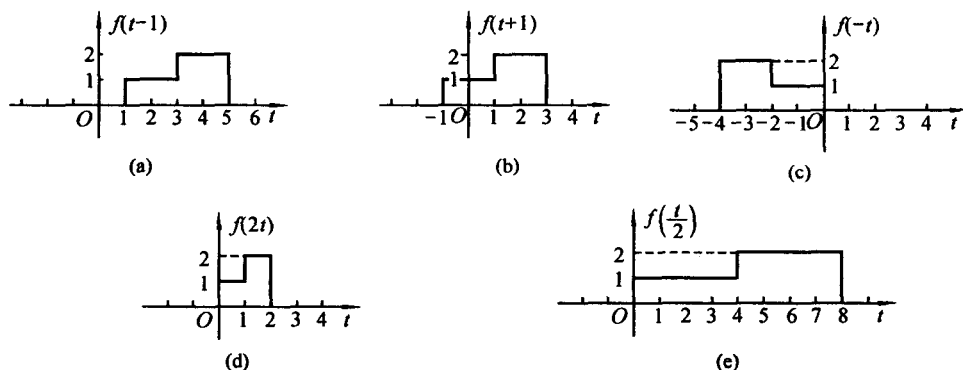


图 1-8 信号基本变换

1.2.4 奇异信号

奇异信号是指其导数不能用一般函数表示的信号, 在连续系统中主要有 δ 函数、阶跃函数等。

δ 函数定义为

$$\delta(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 & (t = 0) \\ 0 & (t \neq 0) \end{cases}$$

如图 1-9 所示, $p(t)$ 表示宽为 Δt , 高为 $\frac{1}{\Delta t}$ 的脉冲, 其面积 $S = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = \frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta t = 1$ 。

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} p(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \left[\epsilon\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - \epsilon\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) \right] \right\} = \delta(t)$$

称 $\delta(t)$ 为单位冲激函数, 其图形如图 1-10 所示。 $A\delta(t-1)$ 表示在 $t=1$ 这一点上的冲激函数, 其冲激强度为 A , 如图 1-11 所示。

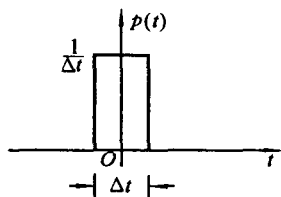


图 1-9 脉冲信号

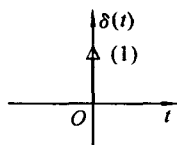


图 1-10 δ 函数

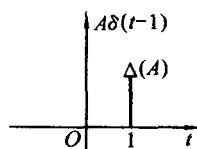


图 1-11 δ 函数的平移

由定义可知,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A\delta(t-1)dt = A$$

单位阶跃函数定义为

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

如图 1-12 所示,表示在 $t = 0$ 这点上波形有一个跳变。

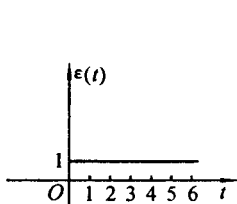
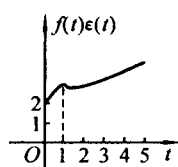
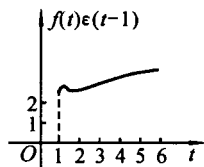


图 1-12 单位阶跃函数



(a)



(b)

图 1-13 有始函数

阶跃函数可以表示信号的起始点。 $f(t)\varepsilon(t)$ 表示信号从 $t = 0$ 点开始, $f(t)\varepsilon(t-1)$ 表示信号从 $t = 1$ 点开始,如图 1-13 所示。

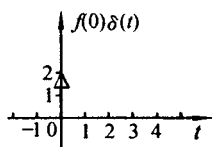
δ 函数有如下主要性质。

(1) 抽样性。

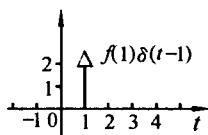
$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$ 表示抽取 $f(t)$ 中 $t = 0$ 那点的函数值,而 $f(t)\delta(t-1) = f(1)\delta(t-1)$ 表示抽取 $f(t)$ 中 $t = 1$ 那点的函数值,如图 1-14 所示。若对上两式在无穷区间内积分,则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-1)dt = f(1) \quad (1-1)$$

因为由单位冲激函数的定义有, $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1, \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-1)dt = 1$ 。



(a)



(b)

图 1-14 δ 函数的抽样性

(2) $\delta(t)$ 与 $\varepsilon(t)$ 的关系。

δ 函数的积分 $\int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$ 与 $\varepsilon(t)$ 的定义完全相同,因而 $\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau$ 。

对该式两边微分,有

$$\delta(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (1-2)$$

(3) $\delta(t)$ 为偶函数。

从图 1-9 可看出, $p(-t) = p(t)$ 。当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,

$$\delta(-t) = \delta(t) \quad (1-3)$$

因而 δ 函数为偶函数。

(4) δ 函数的尺度变换。

从图 1-9 可知, 当 $p(t)$ 在时间轴上发生比例变化时, $p(t)$ 变成了 $p(at)$, 其波形在时间轴上扩展了 $\frac{1}{|a|}$ 倍, 故

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [p(t)] dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \cdot \left[\epsilon\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - \epsilon\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) \right] \right\} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [p(at)] dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \frac{\left[\epsilon\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - \epsilon\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) \right]}{|a|} \right\} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|a|} \delta(t) dt = \frac{1}{|a|} \end{aligned}$$

$$\text{又} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [p(t)] = \delta(t), \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [p(at)] = \delta(at)$$

$$\text{所以} \quad \delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad (1-4)$$

上式表示 δ 函数在时间轴上发生尺度变换, 反映到冲激强度发生了相应的变化。

(5) 冲激偶 $\delta'(t)$ 。

δ 函数的微分称为冲激偶, $\delta'(t)$ 表示在 $t=0$ 处有上下对称的两个冲激, 故曰冲激偶, 如图 1-15 所示, 有

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} p(t) = \delta(t), \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} p'(t) = \delta'(t)$$

一般, $A\delta'(t)$ 表示幅度为 A 的冲激偶, 如图 1-15(d) 所示。

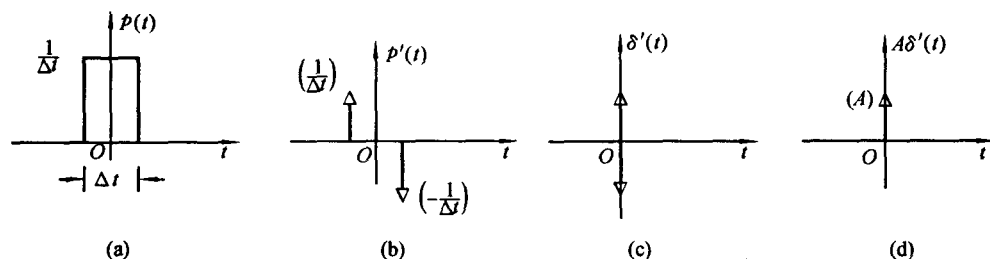


图 1-15 冲激偶及图示

由图 1-15(c) 可知,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) dt = 0$$

由分部积分, 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \delta'(t) dt = \varphi(t) \delta(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t) \delta(t) dt = -\varphi'(0) \quad (1-5)$$

由函数乘积微分, 得

$$\begin{aligned} [\delta(t)f(t)]' &= \delta'(t)f(t) + \delta(t)f'(t) \\ f(t)\delta'(t) &= [\delta(t)f(t)]' - f'(t)\delta(t) \\ &= f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t) \end{aligned}$$

则