

SHUXUE SIWEI LILUN

国家“九五”重点图书出版规划项目
学科现代教育理论书系·数学·

数学思维理论

新版



马忠林 主编
任樟辉 著

广西教育出版社

国家“九五”重点图书出版规划项目

学科现代教育理论书系·数学·

马忠林 主编

数学思维理论

任樟辉 著

广西教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学思维理论/任樟辉著. —南宁: 广西教育出版社, 2001. 1

(学科现代教育理论书系·数学/马忠林主编)

ISBN 7-5435-3198-4

I. 数… II. 任… III. 数学—思维方法—研究
IV. 01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 03347 号

学科现代教育理论书系·数学·

数学思维理论

马忠林 主编

任樟辉 著

☆

广西教育出版社出版

南宁市鲤湾路 8 号

邮政编码: 530022 电话: 5850219

本社网址 <http://www.gep.com.cn>

读者电子信箱 master@gep.com.cn

全国新华书店经销 广西大学印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 8.25 印张 214 千字

2003 年 1 月第 2 次印刷

印数: 5 001—10 000 册

ISBN 7-5435-3198-4/G·2398 定价: 14.00 元

如发现印装质量问题, 影响阅读, 请与承印厂联系调换

本书内容提要

本书是作者 1990 年出版《数学思维论》以来,进一步探讨数学思维教学与教育专题研究的成果。内容包括数学思维的涵义、功能与研究方法;数学思维的 6 种基本形式;16 种基本的数学思维方式;数学问题解决的 10 个思维策略;中学数学的 8 种重要思维模式以及数学思维教育问题研究等。对于指导中学数学的教学和研究有重要意义。

全书内容既有现代数学发展的思想背景,又有丰富的数学教育的典型实例与之配合,叙述简明通俗,具有严谨的理论性和教学参考的实用性。可以作为高校数学教育课程的选修教材,也可作为广大中学数学教师和中学生发展数学思维的指导用书。

总 序

舒 永 亮

师范院校中有一门必修课,叫做教材教法。它是一门培养教师技能的专业课程,但是历来不受人们所重视。在一些专业学科的教师、专家们的眼里,似乎教材教法不过是剖析中小学的教学大纲和教科书,教会师范生如何去上好一堂课,没有什么学术性。他们认为,上好一堂课,保证教学质量的关键主要是有高的学术水平。这是一种误解。但是这种误解不是没有缘由的。原因之一是,这些专家们不懂得,教育既是一门科学,又是一门艺术,只有高深学问,不懂教育规律,没有掌握教育教学的艺术,课就上不好,或者事倍功半。原因之二是,过去的教材教法课确实存在着不少问题,它只分析现有的教材,不对学科、课程以及教育教学的规律进行研究。因此要解决这个问题,除了改变专家们的误解以外,更重要的是研究这门学科的发展,提高学科的理论水平。我认为,师范院校的教材教法不能只分析一门课如何讲授,更重要的是要研究、分析一门科学的发展历史和

现状,以及其发展的内在逻辑,结合学生的认知特点,遵循教育规律,把它组织成一门学科。学科并不等于科学。一门科学要变成学校里的学科,需要经过一番改造。改造的理论就是一门学问,本身也应该是一门学科。这门学科是跨学科的,它既要研究某门学科的科学规律,例如数学教材教法要研究数学教学规律,又要研究教育规律,要把两者有机地结合起来,从这个意义上来讲,教材教法的名称显得落后了。因此把它改为学科教学论或学科教育学是适宜的。

讲到这门学科还有一段历史,不得不讲一讲。我国学位制度建立之初,在教育类门类中就设有教材教法作为二级学科培养研究生,授予学位。但是它的评议因为涉及文理各学科,因此分散在文理各学科评议组中。由于教材教法主要是研究学科教学的理论,文理各学科评议组的专家们认为难以对他们做出评议。这样这门学科的授权问题就处于无人评议状态。1983年在国务院学位委员会召开第二届博士、硕士授权点学科评议组会议期间,我向当时教育学评议组召集人刘佛年教授提出,把教材教法的硕士授权点拿到教育学组来评议,并把名称改为学科教学论,以提高对它的学术要求,从而提高它的学术地位。这个提议得到刘佛年教授的支持和学位委员会的批准,并在以后专业目录调整时把教材教法正式更名为学科教学论。从此学科教学论有了较大的发展。至今全国已有硕士授权点19个,培养了硕士研究生数百名,出版的专著也有几十部。这是十分可喜的现象。

学科名称的更改是十分容易的事,但要把它发展成一门真正的学科并非易事。当时有人提出改为学科教育学,我们认为时机还不成熟,首先要将学科的教学理论研究好。教育学是一个更广泛的概念,它涉及教育系统内部各个领域,而学科教学主要涉及教育系统中教学方面的理论,即使把这部分研究透彻,成为一门学科也是不容易的。当然,有的学者愿意把它称为学科教育学,如果确已研究成熟,这无疑是对教育科学发展的一个贡献。

把教材教法改造成为学科教学论是一次理论上的飞跃。教材教法过去只是教育学中的一个部分。学科教学论则变成了教育科

学中的一个重要分支学科。这种飞跃有没有根据,具备不具备条件呢?1988年我在为《语文教育学》写序时就说,已经具备了必要的条件。这是因为:第一,近几十年来教学论、课程论、心理学、教育测量学、教育评价学等学科有了新的发展,它为学科教学论的建立奠定了理论基础;第二,我国改革开放以来引进了国外的各种教学理论,开拓了我们的视野,启迪了我们的思想;第三,我国有一批长期从事教材教法研究的学者,他们在师范院校有长期的教育实践,积累了丰富的经验,并且有较高的理论修养,这是建立学科教学论的组织基础。应该说,1978—1988年这门学科的建设是有成绩的,不仅培养了众多研究生和出版了多部专著,而且学科体系基本上建立起来了。更为可喜的事是不少专家都在关心这门学科的建设。得到各学科专家的重视是至关重要的,因为学科教学论这门学科毕竟是跨学科的,文理各专业学科是它的基础。

近些年来,许多学者把学科教学论又提高到学科教育学的高度来研究,这又是一次飞跃。学科教育学不仅要研究学科的教学理论问题,而且要从教育学的基本原理出发,从培养人的高度来讨论学科教育的问题。它不仅要揭示学科教学的教学规律,还要揭示学科教学培养人的规律。学科教育学不仅要讨论该门学科如何设置课程,如何编制教材,如何选择教学方法,如何组织教学,更重要的是要分析本门学科在培养人的整体工作中的地位和作用,并从这个角度出发研究课程、教材、教法,研究它与其他课程的关系,与学校中其他教育活动的关系等。

广西教育出版社组织全国学科教育理论工作者和实际工作者编写一套大型丛书《学科现代教育理论书系》,我认为正是时候。这刚好是十多年来的一次大总结、大检阅。证明学科教育学这门新兴学科已经在中国大地上成长起来。我当然不可能通览这套丛书,但是从编辑出版计划中的书目可以看出,它涉及语文、数学、物理、化学、外语等中学教学计划中的主要学科,每门学科又分教学论、课程论、学习论、实验论、教育测量与评价等专著,有的学科还著有教学艺术论及其他更细的内容,真是丰富多彩。作者群中有老一代的学科教育学专家,也有年轻一代学者。我认为,这套丛书

的意义,不仅在于它总结了十多年来我国学科教育学研究的成果,而且在于它展示了学科教育学发展的广阔前景,在于它锻炼了年轻一代学者。这是从教育理论战线上来讲的。至于对我国教育的实际来讲,这套丛书的出版一定有利于我国广大教师业务水平的提高,有利于教育质量的提高。我预祝出版的成功。

序

马忠林

中国是数学发祥地之一。远在公元6世纪我国古算家已完成了《算经十书》这样的伟大著作,成为长达近二千年流传着的算学教材,作为我国数学教育(初期)媒介,起着巨大作用,直至清末算学教育也仍以此为鉴。我国早期的数学教育,实际上是来自田园、作坊、家庭,其教学形式不外是父教子、师带徒的个别传授。后来才进而发展为私塾、家馆及学社式的教学,这可称之为数学教育的萌芽时期。这一时期的数学教育,严格地说,只是一种教学行为。因为它并没有明确的教育制度、教学目的,甚至缺乏必要的教学手段等。

18世纪欧洲工业革命以后,西方传教士东来中国,设立教会学校,西算开始输入中国。至本世纪初,我国改学堂为学校,数学也被列入教学课程,开始使用翻译的西书及国人编纂的数学教科书,开始讲究教学方法,教学组织形式也已由个别教育改为班级制的集体教育,这就更有利于大量地培养懂科学和数学的人才。数学教育的这种进步,是可喜的。但仍有其很大局限性,因为人们还不甚了解数学教育的重要

性,教学基本上是注入式的,在这种教育制度下只能培养出死记硬背知识的“书生”。这时期,除教科书外,很少有可供教师和学生阅读、参考的读物。此可谓近代数学教育的特点。

本世纪初期,由于社会、经济、科学技术的不断发展和进步,传统的数学教育已不适应客观的需要,教育改革已提到日程上来了。首先,在本世纪初英国皇家理科大学教授培利(J. Perry)在他的以“数学教育”为题的讲演中,提倡数学的实用性,批判了英国保守的传统教育。继之,德国的克莱茵(F. Klein)、法国的波莱尔(Borel)、美国的穆尔(Moore)等相继响应培利的革新数学教育的倡议,并提出种种改良数学教育方案。后来人们把这次向传统数学教育挑战的改革称为培利—克莱茵运动。此可谓数学教育的先声。

更大的数学教育改革运动,是20世纪60年代的数学教育现代化运动(新数运动)。其涉及面之广,改革程度之深,是前所未有的。一举突破了传统数学教育的旧框框,企图编写理想的、新的教材,实行新的教学组织形式。改革虽不能说完美成功,但一改过去长期沉寂的数学教育,进行新的尝试与实践,还是难能可贵的。

到20世纪60年代,数学教育的重要性已引起世人的瞩目。1969年国际数学教育委员会(ICMI,成立于1908年)恢复了组织,并于同年在里昂(法)召开了战后第一次国际数学教育会议(ICME I)。并相继在艾克西特(英)、卡尔斯洛赫(西德)、伯克利(美)、阿德里德(澳)、布达佩斯(匈)召开了会议,广泛开展国际交流,研讨数学教育的改革。会议中心议题,通常为“如何适应变革着的社会的数学教育”。正如国际数学教育会议主席、法国南巴黎大学教授卡汉(Kahane)所说:“世界不啻是一个数学教育实验室,ICME实为一个交流经验的基地。”国际数学教育界多年来的交流,成果累累。

1949年以来,我国国民经济迅速发展,与此相应,党和政府一贯重视科学、重视教育,数学教育进行了多次改革,中学数学教学大纲已作了6次修订,编写了多种教材,研讨教学方法,改革教育制度,教学质量不断提高。

近十年来,我国数学界还开展了频繁的国际数学交流,不但了

解了外国的数学教育改革的情况,而且结合我国实际取其长、弃其短,对数学教育进行了大力改革。

数学教育界同仁近十年来,在党的领导下,做出了巨大努力,进行了有效的工作,在教育制度、教材、教学方法各方面进行多种实验,有些取得了可喜成果。当前数学教育改革的研究,已深入到理论研究领域。各级研究会及学报、杂志发表了大量很好的研究文章,出版了多种专著,数学教育已初步形成系统化、科学化,能指导数学教学实践的一门科学——数学教育学。从事这门科学的研究队伍规模之大和研究成果之丰,在我国数学教育史上是前所未有的。所以说,我国数学教育研究,进入了一个新时期。

在系统研究我国数学教学的历史和现状之后,我们深感前人在数学教育方面留下来的资料远远不能适应数学教育与研究之所需。有鉴于此,我们就非常需要加强学科理论基础工程建设。因此,把我国现阶段的一些研究成果分专论汇集起来,把它作为文化财富奉献给吾侪同仁,留给后人,的确是一件有意义的事。毋庸讳言,这套丛书的出版,在我国还是初创。其内容可能不够成熟,但我们希望它在现阶段能供读者有所参考,得到读者的培植,使它在读者关怀下发挥些微作用。如果读者在阅读中,还能有些收获,则更是作者、编者、出版者深感荣幸和欣慰的。

广西教育出版社从事业职责出发,付出巨大努力出版这套丛书,这是值得称赞的。

多年来渴望此类教育理论丛书出版,兹当它得以面世之际,赘数言以为序。

总序	顾明远
序	马忠林
前言	(1)
第一章 数学思维概述	(1)
第一节 数学思维的涵义	(2)
第二节 数学思维与数学教育心理、数学方法的关系	(6)
第三节 数学思维的功能	(8)
第四节 研究数学思维的方法	(11)
第二章 数学思维的基本形式	(14)
第一节 数学抽象思维	(15)
第二节 数学逻辑思维	(21)
第三节 数学形象思维	(25)
第四节 数学直觉思维	(45)
第五节 数学猜想思维	(51)
第六节 数学灵感思维	(60)

第三章 基本的数学思维方式	(67)
第一节 数与符号思维方式.....	(69)
第二节 形式推理思维方式.....	(72)
第三节 公理结构思维方式.....	(75)
第四节 数学模型思维方式.....	(78)
第五节 变量函数思维方式.....	(83)
第六节 空间想象思维方式.....	(86)
第七节 无穷分析思维方式.....	(90)
第八节 概率统计思维方式.....	(94)
第九节 系统优化思维方式.....	(96)
第十节 计算逼近思维方式.....	(100)
第十一节 化归映射思维方式.....	(104)
第十二节 相似类比思维方式.....	(108)
第十三节 探索归纳思维方式.....	(118)
第十四节 模式构造思维方式.....	(123)
第十五节 反例反驳思维方式.....	(127)
第十六节 数觉审美思维方式.....	(130)
第四章 数学问题解决的思维策略	(135)
第一节 问题解决与数学思维.....	(136)
第二节 模式识别.....	(140)
第三节 变换映射.....	(143)
第四节 差异消减.....	(145)
第五节 数形结合.....	(148)
第六节 进退互用.....	(150)
第七节 分合相辅.....	(152)
第八节 动静转换.....	(155)

第九节 正反沟通	(156)
第十节 引辅增设	(159)
第十一节 以美启真	(162)
第五章 中学数学中的重要思维模式	(173)
第一节 数学思维模式的意义	(173)
第二节 逼近模式	(177)
第三节 叠加模式	(179)
第四节 变换模式	(182)
第五节 映射模式	(185)
第六节 方程模式	(188)
第七节 轨交模式	(190)
第八节 退化模式	(194)
第九节 递归模式	(195)
第六章 数学思维教育问题选析	(199)
第一节 数学教学过程思维设计的案例分析	(200)
第二节 数学直觉思维的培养	(204)
第三节 数学发散思维的培养	(209)
第四节 数学猜想思维的培养	(221)
第五节 数学创造性思维的培养	(228)
第六节 提出数学问题能力的培养	(235)
主要参考文献	(244)

第一章 *数学思维概述*

研究数学思维当然要从其涵义开始(其中关于思维与数学思维的论述可参阅拙著《数学思维论》,这里不再涉及),并阐明要探讨哪些内容,这也就与相关的学科有一个关系问题,于是分析数学思维与数学教育心理、数学学习、数学方法等的研究之间的关联和区别;其次要讲一下研究数学思维的意义,亦即数学思维的功能;最后要谈一下研究数学思维的方法,以期对读者有一点启发与参考。

数学思维研究在国际上也有类似的提法,不过名称用词略有不同,比较接近的学科是数学教育心理学与认知科学,以及数学方法论和教学法。美国的《数学评论》杂志在1991年版的研究主题分类表中,已列出两项有关数学教育的研究主题:

00—01 教学阐述(教科书,教学论文,等等);

00A35 数学方法论,教学法。

数学思维理论是与数学教学内容及数学教学方法都有关的一门交叉性的数学教育研究的新兴学科,当然应该归入这个范围,只要这种理论能够经受数学教育实践的考验,取得良好的教育效果,自然是值得重视的。

第一节 数学思维的涵义

“数学思维”一词,初看起来是我们数学工作者用惯了的、其涵义不言自明的名词,通常是指人们在数学活动(数学研究与数学教育)中的思想的或心理的过程与表现,然而细究起来就相当复杂甚至是不容易讲清的东西。由于数学思维涵义的广泛性,就其本身而言,可以探讨数学思维的特性、过程、形式、方式、方法、规律等,也可以从各种不同的角度去研究,例如从教育学、心理学、认知科学、学习论、方法论,或者从思维科学、逻辑学、生理学、脑科学、分子生物学等多个角度去考察。而从数学本身出发,也可以从数学研究与数学教育这两个不同侧面去探讨。

数学思维是针对数学活动而言的,它是通过对数学问题的提出、分析、解决、应用和推广等一系列工作,以获得对数学对象(空间形式、数量关系、结构模式)的本质和规律性的认识过程。这个过程是人脑的意识对数学对象信息的接收、分析、选择、加工与整合。它既是高级的神经生理活动,也是一种复杂的心理操作。数学思维与数学知识具有密不可分、互为表里的血肉关系。数学思维是一种内隐的心智活动,而数学知识是这种活动的外现结果。平时提到的数学意识、观念以及数学的精神、思想、方法等则是数学思维活动的结晶,或者说是数学思维的宏观概括。

日本学者藤田(Fujita)在1985年指出:“数学智力”包括“数学

常识”与“数学思维能力”。^①另一位日本数学家米山国藏则认为,对于学生们而言,作为知识的数学,通常是出校门后不到一两年,很快就忘掉了。然而,不管他们从事什么工作,那些深深地铭刻于头脑中的数学的精神、思维方法、研究方法、推理方法和着眼点等(若培养了这方面的素质的话)都随时随地发生作用,让他们受益终生。^②

美国的“学校数学课程与评估标准”(1989年)^③提出的学生的数学素养既包括探索、猜想和逻辑推理的能力,也包括有效地利用多种数学方法解决问题的能力,它有五个方面,即:①懂得数学的价值;②对自己的数学能力有信心;③成为数学问题的解决者;④学会数学交流;⑤学会数学推理。

我国的数学教育专家在“数学教育高级研讨班纪要”(1999年)^④中指出数学素质包括:广博的数学知识、准确的科学语言、良好的计算能力、周密的思维习惯、敏锐的数量意识,以及解决问题的数学技术。

从上述中国、日本、美国三国的具有代表性的观点来看,无论数学智力,数学的精神、思想和方法,数学素养及数学素质,数学思维都是它们的构成要素,是这些提法的不可或缺的重要成分。

苏联学者奥加涅相则特别强调数学思维是人们认识具体的数学科学,或是应用数学于其他科学技术和国民经济等的过程中的辩证思维。同时它的特性是由数学学科本身的特点及数学用以认识现实世界现象的方法所决定的,并受一般思维方式的制约。

在我国数学教育界,王仲春教授等认为:“数学思维是指人类关于数学对象的理性认识过程,包括应用数学工具解决各种实际问题的思考过程。”^⑤

这里,特别值得注意的是,我国著名数学家与数学教育家王梓

① 国际展望:九十年代的数学教育.张奠宙等译.上海:上海教育出版社,1990.

② [日]米山国藏著.数学的精神、思想和方法.毛正中等译.成都:四川教育出版社,1986.

③ 丁尔升主编.现代数学课程论.南京:江苏教育出版社,1997.259

④ 数学教育高级研讨班纪要.数学教育学报,1999(2):2

⑤ 王仲春等编著.数学思维与数学方法论.北京:高等教育出版社,1989.56