高等学校教材

微积分（下）

第二版

主编　苏德矿　吴明华

高等教育出版社

ISBN 978-7-04-021657-8

9 787040 216578 >

定价 23.90元

高等学校教材

微 积 分

（下）

第二版

主　编　苏德矿　吴明华

编　者　苏德矿　吴明华
　　　　金蒙伟　杨起帆

浙江大学数学系

高等教育出版社

内容简介

本书在教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果的基础上，根据教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会修订的新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，并结合教学实践经验修订而成。为适应广大高校教师的教学需求，作者广泛吸取教师使用意见，在保留第一版注重分析综合、将数学建模的基本内容和方法融入教材等特色的基础上，修改了一些重要概念的论述和重要定理的证明，增加了部分教学内容，调整了一些内容的讲述顺序，使本书内容更加丰富，系统更加完整，有利于教师教学和学生学习。

本书分上、下两册。上册共6章，主要内容有：函数与极限，导数与微分，微分中值定理及导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程；下册共6章，主要内容有：矢量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，第二类曲线积分与第二类曲面积分，级数，含参量积分。

本书可作为高等院校工科、理科、经济及管理类专业的微积分教材。读者可登陆以下网址浏览与本书配套的微积分多媒体辅助教学课件：

http://course.zju.edu.cn/eln/cosinfo.jsp?iOrdinal=525

图书在版编目(CIP)数据

微积分.下/苏德矿，吴明华主编.—2版.—北京：高等教育出版社，2007.7

ISBN 978-7-04-021657-8

Ⅰ.微… Ⅱ.①苏…②吴… Ⅲ.微积分-高等学校-教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第073986号

策划编辑 于丽娜 **责任编辑** 李 陶 **封面设计** 张申申 **责任绘图** 尹 莉
版式设计 余 杨 **责任校对** 朱惠芳 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　址**	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	唐山市润丰印务有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
		版　次	2001年2月第1版
开　本	787×960　1/16		2007年7月第2版
印　张	22.75	**印　次**	2007年7月第1次印刷
字　数	420 000	**定　价**	23.90元

物料号　21657-00

郑重声明

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

传　　真：(010) 82086060

E - mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街 4 号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮　　编：100011

目　录

第七章　矢量代数与空间解析几何

在中学我们已经学过平面解析几何和各种数系，本章我们将学习一种新的代数体系——矢量代数. 矢量代数是数学、物理、力学以及工程技术中一种重要的数学工具. 矢量代数与实数代数有很多类似之处但又不完全相同，它可作为由实数体系学习抽象代数体系的桥梁. 空间解析几何通过空间直角坐标系，用代数方法研究空间几何问题. 本章我们先介绍矢量概念以及矢量的某些运算，然后讲述空间解析几何，其主要内容是平面和直线方程，一些常用的空间曲线和曲面的方程以及关于它们的某些基本问题，这些方程的建立和问题的解决是以矢量作为工具的. 同时，本章的内容对以后学习多元函数的微分学和积分学在几何图形的描绘上将起到非常重要的作用.

§1　二阶、三阶行列式及线性方程组

本节作为预备知识，我们介绍二阶、三阶行列式的由来及其概念和展开式，以便在解线性方程组和矢量运算中使用.

§1.1　二阶行列式和二元线性方程组

求解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, & (7.1) \\ a_2x + b_2y = c_2. & (7.2) \end{cases}$$

用消去法解，$(7.1)\times b_2-(7.2)\times b_1$ 消去 y，得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=b_2c_1-b_1c_2,$$

用同样的方法消去 x，得

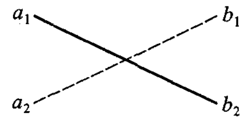
$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1.$$

若 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，可得该方程组的唯一解：

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1},\qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \tag{7.3}$$

为了便于记忆，我们引入二阶行列式概念，并用二阶行列式来表示(7.3)式所表示的解. 注意到上式分子、分母只与方程组的系数及常数项有关，其中

分母 $a_1b_2-a_2b_1$ 中各个乘数按它们原来在方程组中的位置成有序排列，即



我们称实线表示的对角线为主对角线，虚线表示的对角线为副对角线，这样 $a_1b_2-a_2b_1$ 就是主对角线上两个数的乘积减去副对角线上两个数的乘积之差. 我们引进符号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \triangleq a_1b_2-a_2b_1. \tag{7.4}$$

称(7.4)式左端为二阶行列式，其中 a_1、a_2、b_1、b_2 称为行列式的元素，这四个元素排列成二行二列(横写的称为行,竖写的称为列). 称(7.4)式右端为该二阶行列式的展开式，这种展开方法称为对角线法则. 例如，

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\times3-4\times5=-14.$$

这样，二元线性方程组在其系数行列式 $D\triangleq\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq0$ 的条件下，解的公式可写成

$$x=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{D_y}{D},$$

其中，$D_x\triangleq\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，即用方程组右端常数项取代 D 中 x 的系数位置；$D_y\triangleq\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$，即用方程组右端常数项取代 D 中 y 的系数位置. 也可直接写成

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

上述方法称为解二元线性方程组的**克拉默(Cramer)法则.**

下面讨论当方程组的系数行列式 $D=0$ 的情形. 这时由消去法可得

$$D\cdot x=D_x,\quad D\cdot y=D_y.$$

1. 当 $D=0$ 而 D_x，D_y 中至少有一个不等于零时，这时上述二个等式不能同时成立，因此方程组无解；

2. 当 $D=0$ 而 D_x，D_y 均等于零时，可得

$$a_1b_2-a_2b_1=0,\ c_1b_2-c_2b_1=0,\ a_1c_2-a_2c_1=0,$$

即有$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$. 这表明方程组中一个方程可由另一个方程乘上一常数得到，这时方程组有无穷多组解.

综上可知：

1. 当$D\neq 0$时，二元线性方程组有唯一确定解$x=\frac{D_x}{D}$，$y=\frac{D_y}{D}$；
2. 当$D=0$时，而D_x，D_y中至少有一个不等于零时，方程组无解；
3. 当$D=0$，$D_x=0$，$D_y=0$时，方程组有无穷多组解.

例 1 求解方程组$\begin{cases}2x+y=5,\\5x+2y=12.\end{cases}$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1\\5 & 2\end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

所以方程组有唯一确定解：

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix}5 & 1\\12 & 2\end{vmatrix}}{-1}=\frac{-2}{-1}=2,\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 5\\5 & 12\end{vmatrix}}{-1}=\frac{-1}{-1}=1.$$

例 2 求解方程组$\begin{cases}2x+y=5,\\4x+2y=3.\end{cases}$

解 因为$D=\begin{vmatrix}2 & 1\\4 & 2\end{vmatrix}=0$，而$D_x'=\begin{vmatrix}5 & 1\\3 & 2\end{vmatrix}=7\neq 0$，所以方程组无解，易知上述二个方程为矛盾方程.

例 3 求解方程组$\begin{cases}2x+y=5,\\4x+2y=10.\end{cases}$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1\\4 & 2\end{vmatrix}=0,D_x=\begin{vmatrix}5 & 1\\10 & 2\end{vmatrix}=0,D_y=\begin{vmatrix}2 & 5\\4 & 10\end{vmatrix}=0.$$

所以方程组有无穷多组解. 事实上，第二个方程可由第一个方程乘以 2 得到，亦即可把该方程组看成一个方程$2x+y=5$,故有无穷多组解.

§1.2 三阶行列式和三元线性方程组

求解三元线性方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3.\end{cases}\tag{7.5}$$

用消去法，先从前两个方程消 z，再消去 y，可得

$$(a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1)x$$
$$= b_1c_2d_3 + b_2c_3d_1 + b_3c_1d_2 - b_1c_3d_2 - b_2c_1d_3 - b_3c_2d_1.$$

当 x 的系数 $D \triangleq a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 \neq 0$ 时，可解得 x；同理可解得 y 和 z. 即有

$$x = \frac{1}{D}(b_1c_2d_3 + b_2c_3d_1 + b_3c_1d_2 - b_1c_3d_2 - b_2c_1d_3 - b_3c_2d_1);$$

$$y = \frac{1}{D}(a_1c_3d_2 + a_2c_1d_3 + a_3c_2d_1 - a_1c_2d_3 - a_2c_3d_1 - a_3c_1d_2);$$

$$z = \frac{1}{D}(a_1b_2d_3 + a_2b_3d_1 + a_3b_1d_2 - a_1b_3d_2 - a_2b_1d_3 - a_3b_2d_1).$$

所以，当 $D\neq 0$ 时，方程组(7.5)有上述唯一解.

为了便于记忆，与二元线性方程组类似，我们引进符号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \triangleq a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1.$$

上述等式左端称为三阶行列式，其中 a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，b_3，c_1，c_2，c_3 为三阶行列式的元素，这 9 个元素按原三元线性方程组的位置排列成三行三列；右端为三阶行列式的展开式，该展开式也可采用对角线法则：即主对角线(图7－1 中用实线相连的三组所示)三项之和减去副对角线(图 7－1 中用虚线相连的三组所示)三项之和的差，共六项之代数和.

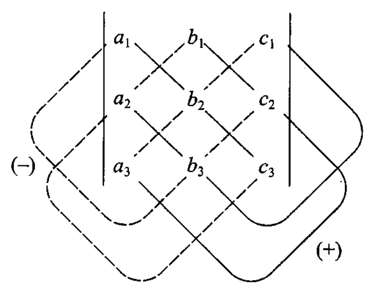


图 7－1

这样，方程组(7.5)中的系数所组成的三阶行列式为：$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. 并记

$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，即将方程组右端的常数项分别取代 D 中 x 的系数位置；

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$，即将方程组右端的常数项分别取代 D 中 y 的系数位置；

$$D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$，即将方程组右端的常数项分别取代 D 中 z 的系数位置.

这样，当 $D\neq 0$ 时，方程组(7.5)的解可简记为

$$x=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{D_y}{D},\quad z=\frac{D_z}{D}.$$

上述方法称为解三元线性方程组的克拉默法则.

例 4　求解方程组 $\begin{cases} 2x-3y+z=-1, \\ x+y+z=6, \\ 3x+y-2z=-1. \end{cases}$

解

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(-4+1-9)-(3+2+6)=-23,$$

$$D_x=\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(2+6+3)-(-1-1+36)=-23,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}=(-24-1-3)-(18+2-2)=-46,$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(-2-1-54)-(-3+3+12)=-69.$$

因为 $D\neq 0$，所以方程组有解

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-23}{-23}=1,\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-46}{-23}=2,\quad z=\frac{D_z}{D}=\frac{-69}{-23}=3.$$

用对角线法则计算行列式有时运算较繁，况且这种方法对三阶以上的行列式不再成立，所以需要新的计算法，在线性代数课程中通过对行列式的更一般的定义与性质讨论可得解决方法. 我们现在利用其中的性质来简化三阶行列式的计算，为此，首先引入余子式和代数余子式这两个新的概念 .

定义 7.1　把行列式中某一元素所在的行和列划去，留下来的行列式称为这个行列式对应于该元素的余子式.

例如，行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$对应于元素 b_2 的余子式为$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

定义 7.2　设行列式中某一元素所在的行数为 i，列数为 j，将对应该元素的余子式乘以$(-1)^{i+j}$所得的式子称为对应于该元素的代数余子式.

例如，行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$对应于 b_1 的代数余子式为：$(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$. 其中，因为 b_1 在第一行第二列，所以 $i=1$，$j=2$.

由于

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1)$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2),$$

再用二阶行列式记括号内的表达式，便得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{7.6}$$

其中三个二阶列式$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$是三阶行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$中第一行元素 a_1，b_1，c_1 所对应的余子式，而(7.6)式右端是第一行元素 a_1，b_1，c_1 与其对应的代数余子式的乘积之和. 于是得到三阶行列式等于它的第一行元素与对应于它的代数余子式的乘积之和，也称为按第一行的展开式. 同时这个方法可推广到按任一行或任一列元素的展开，即有：

三阶行列式等于它的任一行(或任一列)的各元素与对应于它的代数余子式的乘积之和.

另外，上述方法还可推广到三阶以上的行列式.

例 5　用按行展开法求$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

解　按第一行展开，有

$$\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&1&1\\3&1&-2\end{vmatrix}=2\times\begin{vmatrix}1&1\\1&-2\end{vmatrix}-(-3)\times\begin{vmatrix}1&1\\3&-2\end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix}1&1\\3&1\end{vmatrix}$$

$$=2\times(-3)+3\times(-5)+1\times(-2)$$

$$=-6-15-2=-23;$$

按第二行展开，有

$$\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&1&1\\3&1&-2\end{vmatrix}=-1\times\begin{vmatrix}-3&1\\1&-2\end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix}2&1\\3&-2\end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix}2&-3\\3&1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\times5+1\times(-7)-1\times11=-5-7-11=-23.$$

习题 7－1

1. 分别用对角线法则和按行展开法计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}2&2&1\\5&0&5\\5&2&3\end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix}1&-4&-1\\-1&8&3\\2&0&1\end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix}2&3&1\\2&1&3\\3&1&2\end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$.

2. 解方程 $\begin{vmatrix}1&3&1\\x&4&1\\x^2&0&-2\end{vmatrix}=0.$

3. 用克拉默法则解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases}3x+5y=19,\\2x+3y=12;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x-y+z=6,\\3x+2y-5z=-13,\\x+3y-2z=1.\end{cases}$

4. 验证

$$\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\kb_1&kb_2&kb_3\end{vmatrix}=0.$$

§2 矢量概念及矢量的线性运算

§2.1 矢量概念

人们在日常生活和生产实践中常遇到两类量，一类如温度、距离、体积、