21 世纪高等院校创新教材

高等数学及其应用

（下册）

熊德之　胡端平　主编

科学出版社
www.sciencep.com

高等数学及其应用

（下册）

·21世纪高等院校创新教材·

高等数学及其应用

（下　册）

熊德之　胡端平　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书参照教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》编写而成，分上、下两册，下册内容为多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、场论初步，级数理论、常微分方程，各章均有相应的数学实验单元. 本书例题较多，便于自学；并吸收国内外同类教材的优点，以帮助学生提高数学素养，培养创新意识，掌握运用数学工具去分析和解决实际问题的能力.

本书是普通高等学校工科类各专业高等数学课程的教材，也可以作为相近学科或经济、管理类专业的本科教材，还可以作为教学参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学及其应用. 下册/熊德之，胡端平主编. —北京：科学出版社，2007
（21 世纪高等院校创新教材）
ISBN 978-7-03-018870-0

I. 高… II. ①熊…②胡… III. 高等数学－高等学校－教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 055261 号

责任编辑：江 兰／责任校对：王望容
责任印制：高 嵘／封面设计：方棻 GONGZUOSHI

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 6 月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2007 年 6 月第一次印刷 印张：23 1/2
印数：1—10 000 字数：466 000

定价：32.80 元

前言

高等数学作为理工类、经济管理类各学科的基础课程，它直接关系到学生能否顺利地、高质量地完成学业的问题. 高等数学的教学水平是一个学校教学质量的重要标志，同时，具有数学素质是学生可持续发展的基础. 在当代大学生的知识能力结构中，数学知识和能力是不可少的部分. 因此，各高等学校无疑都将数学教育放在重要的位置上.

在高等教育成为大众化的条件下，高等数学的教与学愈来愈成为难点，如何突破难点成为广大教师和数学界所关注的问题. 近几年来，高校之间就数学课程的教学研究和教学经验进行交流日益频繁，在教育部的关心下，2005 年建立了《大学数学课程报告论坛》，集数学界的专家学者和数学教育工作者之智慧，探讨新的教学理论和方法，旨在提高数学教学的质量. 作为在教学一线的教师，努力解决出现的问题，创造新的方法是我们的责任. 为此，我们编写了这套教材，希望尽微薄的贡献.

一套好的高等数学教材，除了它的科学性之外，它还应有深刻的思想内涵，有生动活泼的风格，反映新的理论与方法，具有可读性. 在教材中，我们努力按照精品课程教材的要求，体现创新教学理念，以利于激发学生自主学习，以利于提高学生的综合素质和创新能力；我们试图在保证理论高度不降低的情况下，适当运用实例和图形，使教学难度降低；我们以单元的方式介绍数学实验，帮助学生直观地了解数学和数学的应用；我们适时介绍有关数学史料，以体现人文精神. 总之，编者们将长期的教学实践经验渗透到教材中，以便达到便于施教授课，并尽量展现高等数学的应用魅力.

本教材分上、下两册，下册由熊德之、胡端平担任主编和制定编写大纲，并进行统稿. 全书分为十二章，第一章、第十章由胡端平编写；第二章、第三章由柳翠华编写；第四章、第五章由熊德之编写；第六章、第十二章由刘华国编写；第七章、第十一章由孙霞林编写；第八章、第九章由王志宏编写；各章的数学实验由李小刚编写.

书中打"*"号的部分可视学生的能力及专业要求由教师决定是否讲授. 大部分章节配有的习题分为 A，B 两组，难度递增.

由于水平有限，书中有不尽人意和缺憾的地方，希望得到广大专家、同行和读者的批评指正.

编　者

2007 年 2 月

目　　录

第七章　多元函数微分法及其应用

上册中所讨论的函数都只有一个自变量，这种函数称为一元函数，一元函数所能描述的只是客观现实中很少一部分事物的变化规律，而更多的情形需要考虑多因素影响下的变化规律. 例如，矩形的面积依赖于长和宽两个变量；长方体的体积依赖于长、宽和高三个变量. 本章将把一元函数的概念推广到多个自变量的情形，也就是多元函数的情形，并在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数的微分法及其应用.

7.1　多元函数的基本概念

从一元函数到二元函数，需要许多新的思想方法，而从二元函数到二元以上的函数，新的思想方法并不多，只是形式和计算上要复杂一些，因此，我们以讨论二元函数为主.

一元函数的定义域是实数轴 $\mathbf{R}^1$ 上的点集，而二元函数的定义域是坐标平面上的点集. 下面我们分别将 $\mathbf{R}^1$ 中的点集、两点间的距离、区间和邻域等概念推广到坐标平面 $\mathbf{R}^2$ 中，并引进其他概念.

一、平面点集

由平面解析几何知，建立平面直角坐称系后，平面上的点 P 与有序二元实数组 (x,y) 之间就建立了一一对应关系. 这种建立了坐标系的平面称为坐标平面. 二元有序实数组 (x,y) 的全体，即

$$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbf{R}\}$$

就表示坐标平面.

坐标平面上具有某种性质 P 的点的集合，称为平面点集，记做

$$E = \{(x,y) \mid (x,y) \text{ 具有性质 } P\}.$$

例如 $C = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < R^2\}$ 表示以原点为中心，R 为半径的圆内所有点所构成的平面点集.

下面，我们在坐标平面上引进几个重要概念.

1. 邻域

设 $P_0(x_0,y_0)$ 为 xOy 面上的一点，$\delta > 0$ 为常数，称

$$U(P_0,\delta) = \{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\} = \{P \mid |PP_0| < \delta\}$$

为 P_0 的 **δ 邻域**，简称**邻域**（见图 7-1(a)），也就是说，邻域是以 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心，以 $\delta>0$ 为半径的圆内点 $P(x,y)$ 的全体；在 $U(P_0,\delta)$ 中去掉 P_0，记

$$\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}=\{P\mid 0<|PP_0|<\delta\},$$

并称为 P_0 的 **δ 去心邻域**，简称为**去心邻域**（见图 7-1(b)）。在不需要明确指出邻域的半径 δ 时，邻域简记为 $U(P_0)$ 及 $\overset{\circ}{U}(P_0)$。

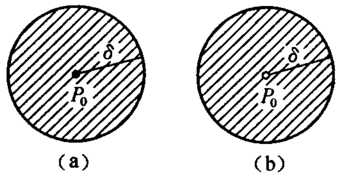


图 7-1

2. 内点、外点、边界点

内点：若 $\exists\,\delta>0$，有 $U(P,\delta)\subset E$，则称点 P 是 E 的**内点**（见图 7-2）。

外点：若点 $P\,\bar{\in}\,E$，且存在 P 点的邻域 $U(P,\delta)$，使 $U(P,\delta)\cap E=\varnothing$，则称点 P 是 E 的**外点**（见图 7-3）。

边界点：若 $\forall\,\delta>0$，邻域 $U(P,\delta)$ 内既有点属于 E，又有点不属于 E，则称点 P 是 E 的**边界点**（见图 7-4）。而 E 的边界点的全体，称为 E 的**边界**。

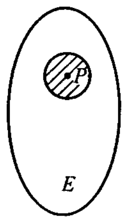


图 7-2

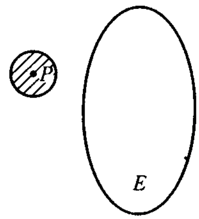


图 7-3

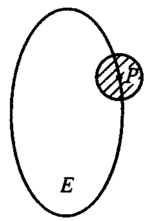


图 7-4

3. 有界集、无界集

若 $\exists\,r>0$，有 $E\subset U(O,r)$，则称 E 是**有界集**，其中 O 是坐标原点。反之，称 E 是**无界集**。

4. 聚点

设 E 是一个平面点集，若点 P 的任意邻域都含有 E 的无穷多个点，则称点 P 为 E 的**聚点**。

可以证明，点 P 是点集 E 的聚点 $\Leftrightarrow\forall\,\delta>0,\overset{\circ}{U}(P,\delta)\cap E\neq\varnothing$。

例如，给出平面点集：

$$E=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\},$$
$$F=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 1\},$$
$$G=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}.$$

我们易看到，E,F,G 内的任何点都是各自的内点，即一个点集的内点必属于它（外

点必不属于它）；E,F 的边界是点集 $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$，而 G 的边界是 $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\mid x^2+y^2=2\}$；显然，$E$ 的边界点不属于 E，而 F,G 的边界点属于 E，即一个点集的边界点可能属于它，也可能不属于它；E,G 是有界集，而 F 是无界集；E,F,G 的一切内点和边界点都是各自的聚点. 由此可知，点集的聚点可以属于它，也可以不属于它.

5. 区域

开集：若平面点集 E 中任一点都是 E 的内点，则称点集 E 为**开集**.

连通集：若平面点集 E 内的任何两点都可以用一条含于 E 的由有限条直线段组成的折线连接起来，则称 E 是**连通集**.

开区域：连通的开集称为**开区域**，简称**区域**.

闭区域：区域 E 连同它的边界组成的点集称为**闭区域**.

例如，$E=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 是区域，而 $F=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$ 是闭区域.

二、n 维空间

平面和空间的二元、三元有序实数组 (x,y) 和 (x,y,z) 的全体构成的集合分别记为 $\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$，n 元有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$n\in\mathbf{N}^+$ 的全体构成的集合记为

$$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,3,\cdots,n\}.$$

平面和空间中的点或向量与有序实数组一一对应. 类似地，$\mathbf{R}^n$ 中的元素 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点或一个 n 维向量，其中 x_i 称为点 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个坐标或 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量. 当 $x_i=0\ (i=1,2,3,\cdots,n)$ 时，$\boldsymbol{x}$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的零元，且称为 $\mathbf{R}^n$ 中的坐标原点或 n 维零向量. 然后，我们在 $\mathbf{R}^n$ 中定义线性运算：设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中任意两个元素，$\lambda\in\mathbf{R}$，规定

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),\quad \lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n),$$

这样定义了线性运算的集合 $\mathbf{R}^n$ 称为 n 维空间.

$\mathbf{R}^n$ 中任意两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之间的距离定义为 $|PQ|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$. 仿照平面上的邻域概念，还可定义 $\mathbf{R}^n$ 中点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的 δ 邻域的概念，记为

$$U(P,\delta)=\left\{Q\,\middle|\,|PQ|<\delta,Q\in\mathbf{R}^n\right\}.$$

有了 $\mathbf{R}^n$ 中的邻域的概念，我们便可以定义 $\mathbf{R}^n$ 中内点、边界点、聚点，从而定义 $\mathbf{R}^n$ 中的区域、闭区域及有界区域等一系列概念.

三、二元函数的概念

我们知道，矩形的面积 S 与它的长 x、宽 y 有关系：$S=xy\ (x>0,y>0)$；一

个商场的某种商品的销售额W与商品的单价P和销售量Q有如下关系:$W=PQ$.一个量由多个量决定的现象不胜枚举,现将它们归于下面的定义.

定义 7.1.1 设D是$\mathbf{R}^2$的一个非空子集,称映射$f:D\to\mathbf{R}$为定义在D上的**二元函数**,通常记为$z=f(x,y)$,$(x,y)\in D$或$z=f(P)$,$P\in D$,其中点集D称为该函数的定义域,x、y称为自变量,z称为因变量,并称$f(D)=\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$为函数的值域,其中$\forall(x,y)\in D$,相应地得到$z=f(x,y)$称为$f$在点$(x,y)$的函数值.

定义 7.1.1 中的函数习惯上记为"$z=f(x,y),(x,y)\in D$",$z=f(x,y)$也常记为$z=\varphi(x,y)$,$z=z(x,y)$等.

类似地,可定义三元函数$u=f(x,y,z)$,$(x,y,z)\in D$.不过,这时的D是空间$\mathbf{R}^3$中的点集.

一般地,若用算式表达的二、三元函数为$z=f(x,y)$,$u=f(x,y,z)$,那么使这两个算式有意义的点(x,y)、(x,y,z)所组成的点集分别作为二、三元函数的自然定义域.因而,对这类函数,它的定义域不再特别标出.

例 7.1.1 求下列函数的定义域:

(1) $z=\arcsin\dfrac{y}{x^2}$;

(2) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

解 (1) 要使$\arcsin\dfrac{y}{x^2}$有意义,必有$x\neq 0$,$\left|\dfrac{y}{x^2}\right|\leqslant 1$,即$x\neq 0$,$-x^2\leqslant y\leqslant x^2$,所以,定义域为$D=\{(x,y)\mid x\neq 0,-x^2\leqslant y\leqslant x^2\}$,其图形是平面上两条抛物线$y=x^2$与$y=-x^2$之间的部分,包括边界,但原点除外(见图 7-5).

(2) 要使函数式有意义,必有$y-x>0$,$x\geqslant 0$,$x^2+y^2<1$,所以该函数的定义域为$D=\{(x,y)\mid y-x>0,x\geqslant 0,x^2+y^2<1\}$(见图 7-6).

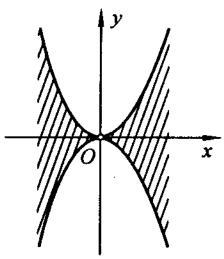


图 7-5

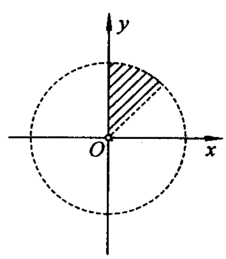


图 7-6

值得注意的是,若对于D中任意一点(x,y),有两个或两个以上的z与点(x,y)对应,我们称$z=f(x,y)$为多值函数.例如,由$x^2+y^2+z^2=R^2$,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 均确定了多值函数 $z=f(x,y)$，我们常把它拆成单值函数来讨论，例如，$x^2+y^2+z^2=a^2$ 拆成 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，它们在 $\mathbf{R}^3$ 中分别表示以原点为中心、a 为半径的上半球面与下半球面，它们在 xOy 面的投影区域均为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}$，这也是两个单值函数的定义域. 以后，对于二、三元函数，如无特别声明，总假定所讨论的函数是单值的.

设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，$\forall P(x,y)\in D$，对应的函数值 $z=f(x,y)$. 于是，在空间就确定了一点 $M(x,y,z)$，当 (x,y) 遍取 D 上的一切点时，便得到一个空间点集：$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$. 这个点集称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形（见图 7-7）. 该二元函数的图形是一张曲面，这张曲面在 xOy 面上的投影，就是函数 $f(x,y)$ 的定义域 D.

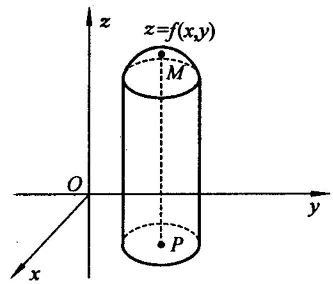


图 7-7

例如，由空间解析几何知，线性函数 $z=ax+by+c$ 的图形是一张平面，而函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的图形是上半锥面，$z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ 的图形是上半椭球面，其中上半锥面和上半椭球面在 xOy 面上的投影就是它们的定义域.

如果存在 $M>0$，使 $|f(x,y)|\leqslant M,(x,y)\in D$，我们称二元函数 $f(x,y)$ 在 D 上有界.

四、n 元函数

定义 7.1.2 设 D 为 $\mathbf{R}^n$ 中的非空点集，映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 称为定义在 D 上的 **n 元函数**. 通常记为 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$，或简记为

$$u=f(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D,$$

也可记为

$$u=f(P),\quad P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D.$$

在定义 7.1.2 中，分别令 $n=2$ 和 $n=3$，便得到二元函数和三元函数的定义，二元及二元以上的函数统称为多元函数.

五、多元函数的极限

为方便见，我们仅就二元函数的情形，讨论函数的极限问题.

定义 7.1.3 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，如果对于 $P(x,y)\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)\ (\delta>0)$，且当 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(P)$ 无限接近于某常数 A，则称常数 A 为二元函数 $f(P)$ 在

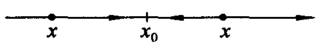
$P_0(x_0,y_0)$ 处的极限，记做

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = A \quad 或 \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A \tag{7.1.1}$$

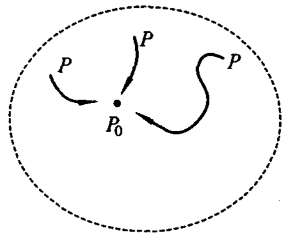
注意到定义 7.1.3 中 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$，最终的结果是点 P 与点 P_0 的距离趋于零，即 $|PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \to 0$.

在形式上，式(7.1.1) 与一元函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 类似，但它们有以下本质的差别.

$x \to x_0$ 是 x 沿直线从 x_0 两侧趋于 x_0，即趋近的方式只有两个，当然这种趋近的方式可以用连续的方式进行，也可以用任何点列的方式进行(见图 7-8(a))；但在平面上，$P \to P_0$ 是位于 $\mathring{U}(P_0) \cap D$ 内的任何点 P，从任何方向趋于 P_0，而且趋近的方式是沿任何曲线或点列趋近 P_0(见图 7-8(b)). 这样一来，势必使二元函数的极限问题比一元函数复杂得多.



(a) $x\to x_0$



(b) $P\to P_0$

图 7-8

据二元函数极限的定义，当 $P(x,y)$ 沿着任意两个不同的方向或曲线趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，所对应的函数 $f(P)$ 趋于不同的两个结果，这时就可断言，当 $P(x,y) \to P_0(x_0,y_0)$ 时，二元函数 $f(P)$ 的极限不存在.

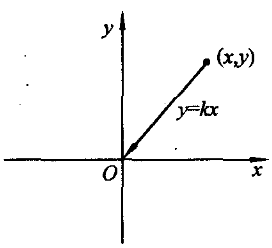


图 7-9

例 7.1.2 讨论 $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点(0,0) 的极限问题.

解 取 (x,y) 沿斜率为 k 的直线趋近(0,0)，即 (x,y) 沿直线 $y = kx$ 趋于(0,0)，如图 7-9 所示，从而

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2} \tag{7.1.2}$$

显然当 k 不同时，上式右端的结果不同，从而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

由式(7.1.2) 知，(x,y) 沿 x 轴(即 $k=0$) 趋于(0,0) 同沿 y 轴(即 $k=\infty$) 趋于(0,0) 的结果是一致的. 事实上

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y)=0,\qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y)=0$$

看来，尽管$(x,y)\to(x_0,y_0)$时，函数$f(x,y)$的极限不存在，但选择特殊的趋近路径可能有特殊的结果. 常见的特殊路径有两种：

先从(x,y)沿水平直线（即将y固定），趋于(x_0,y)，再从(x_0,y)沿直线$x=x_0$趋于(x_0,y_0)，即

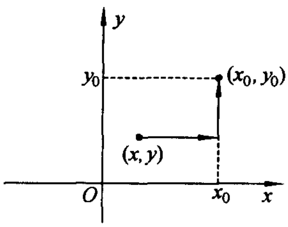
$$(x,y)\xrightarrow{x\to x_0}(x_0,y)\xrightarrow{y\to y_0}(x_0,y_0)\quad（见图 7-10(a)）$$

将这种极限记做

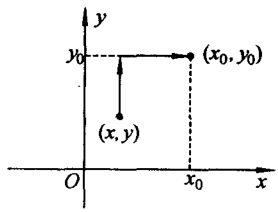
$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) \tag{7.1.3}$$

同样还有

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)\quad（见图 7-10(b)） \tag{7.1.4}$$



(a)



(b)

图 7-10

显然，当$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$时，则式(7.1.3)、式(7.1.4)的极限均为A，反之不然，例 7.1.2 就是反例.

为区别起见，把$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=A$称为二重极限，而式(7.1.3)和式(7.1.4)的极限称为累次极限.

同一元函数的极限运算一样，二元函数的极限有以下的四则运算法则.

设$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$，$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=B$，则有

1. 和差法则

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[f(x,y)\pm g(x,y)]=A\pm B.$$

2. 积法则

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[f(x,y)g(x,y)]=AB.$$

特殊地，

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[kf(x,y)]=k\cdot\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=kA.$$

3. 商法则

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0).$$

例 7.1.3 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{x-xy-4}{x^2y+xy-y^3}$； (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin xy}{x}$.

解 (1) 原式 $=\dfrac{0-0\times1-4}{0^2\times1+0\times1-1^3}=4$；

(2) 原式 $=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot y=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}y=1\times2=2$.

例 7.1.4 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

解 当$(x,y)\to(0,0)$时，分母$\sqrt{x}-\sqrt{y}\to0$，因此，不能用商法则，我们希望用恒等变形的方法，将极限为零的因子去掉.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2-xy)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}x(\sqrt{x}+\sqrt{y})=0.\end{aligned}$$

定义 7.1.3 是对二元函数极限的描述性定义.

下面用"ε-δ"语言来描述极限的概念.

定义 7.1.4 设函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的聚点，A 为常数，$\forall\varepsilon>0$，若 $\exists\delta>0$，使当 $P(x,y)\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$ 时，都有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处的**极限**，记做

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A\quad\text{或}\quad f(x,y)\to A((x,y)\to(x_0,y_0)),$$

也可记做

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A\quad\text{或}\quad f(P)\to A\quad(P\to P_0).$$

类似地，可以定义 n 元函数的极限.

例 7.1.5 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$，求证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

证 这里函数 $f(x,y)$ 的定义域为 $D=\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$，点 $O(0,0)$ 为 D 的聚点. 因为

$$|f(x,y)-0|=\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant x^2+y^2,$$

可见，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，则当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$，即 $P(x,y)\in$

$D \cap \mathring{U}(O,\delta)$ 时，总有 $|f(x,y)-0|<\varepsilon$ 成立，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

利用极限的四则运算法则也可得同样的结果：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2\sin\frac{1}{x^2+y^2}+\lim_{(x,y)\to(0,0)}y^2\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$
$$=0+0=0.$$

这里利用了与一元函数极限类似的运算法则："无穷小与有界量的乘积仍为无穷小量". 本题若令 $u=x^2+y^2$，则当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$u\to 0$，于是

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\lim_{u\to 0}u\sin\frac{1}{u}=0.$$

显然，这种代换的结果是把二元函数极限问题化成了一元函数极限问题.

例 7.1.6 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

证 因 $x^2+y^2\geqslant 2|x||y|$，于是 $0\leqslant\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=|x|\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\leqslant |x|\dfrac{|xy|}{2|xy|}=\dfrac{1}{2}|x|$，因 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1}{2}|x|=0$，由夹逼定理，得 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

本题若令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则 $(x,y)\to(0,0)$ 等价于 $r\to 0$，因此

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2}=\lim_{r\to 0}r\cos^2\theta\sin\theta=0.$$

六、多元函数的连续性

由二元函数极限的概念，不难说明二元函数连续性.

定义 7.1.5 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的聚点，且 $P_0\in D$，如果 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**连续**.

如果函数 $f(x,y)$ 在 D 的每一点都连续，那么就称函数 $f(x,y)$ **在 D 上连续**，或者称 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数.

以上关于二元函数的连续性概念，可相应地推广到 n 元函数 $f(P)$ 上去.

例 7.1.7 讨论二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, y\text{ 任意},\\ 0, & x=0, y\text{ 任意}\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性.

解 当 $x\neq 0$ 时，

$$|f(x,y)-0|=\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x+y|;$$

当 $x=0$ 时，

$$|f(x,y)|=0.$$

因此,不论 x,y 为何值,都有 $|f(x,y)|\leqslant|x+y|$. 于是,由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)=0$ 可得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0),$$

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

定义 7.1.6 设函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D, $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点,如果 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 不连续,则称 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的**间断点**.

例如,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

点 $O(0,0)$ 是函数定义域 $D=\mathbf{R}^2$ 的聚点,在前面我们已讨论函数 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处极限不存在,故点 $O(0,0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的一个间断点.

又如 $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$,点 $(0,0)$ 是它的间断点.

再如 $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$, $x^2+y^2=1$ 是它的间断线.

我们依照上面的定义,还可定义 n 元函数的间断点.

与一元函数类似,利用多元函数的极限运算法则可以证明,多元连续函数的和、差、积、商(在分母不为零处)仍是连续函数,多元连续函数的复合函数亦是连续函数.

与一元初等函数类似,一个多元初等函数是指能用一个算式表示的多元函数,这个算式是由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而得到的. 例如, $\dfrac{x+x^2-y^2}{1+y^2}$, $\sin(x^2+y^2+z)$, e^{xy^2} 等都是多元初等函数.

根据连续函数的和、差、积、商的连续性以及连续函数的复合函数的连续性,再利用基本初等函数的连续性,我们进一步可得出如下结论:

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的. 所谓定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

由多元初等函数的连续性,如果要求它在点 P_0 处的极限,而该点又在此函数的定义区域内,则极限值就是函数在该点的函数值,即 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)$.

例 7.1.8 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{x+y}{xy}$.

解 函数 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{xy}$ 是初等函数,其定义域为 $D=\{(x,y)\mid x\neq 0, y\neq 0\}$, $P_0(1,2)$ 为 D 的内点,故存在 P_0 的某一邻域 $U(P_0)\subset D$,而任何邻域都是