普通高等教育“十一五”规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

Thermal Energy & Power

JISUAN LIUTI LIXUE

计算流体力学

江春波　张永良　丁则平　合编

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS
中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

普 通 高 等 教 育 “ 十 一 五 ” 规 划 教 材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

JISUAN LIUTI LIXUE

计算流体力学

江春波　张永良　丁则平　合编
周雪漪　主审

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书是普通高等教育“十一五”规划教材。

全书共有九章，内容包括：流体运动数学模型、有限差分法、有限单元法、有限体积法、一维非恒定流计算、不可压缩非黏性流体流动、不可压黏性流体流动、对流扩散问题、浅水环流问题。本书强调对计算流体力学基本概念的理解，通过简明的讲解使读者理解复杂的数理问题，注重知识和数值方法的系统性，注重对读者的实践能力的培养。为了加强编程环节的训练，还配备了一些基本流体流动的计算程序。各章均设有一定数量的例题和习题，以供读者检查和巩固所学的基础知识。

本书可作为水利、环境、海洋、机械、化工以及土建类的本科生或研究生计算流体力学课程的教材，也可作为有关工程技术人员从事数值计算的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

计算流体力学/江春波，张永良，丁则平合编．—北京：中国电力出版社，2007

普通高等教育“十一五”规划教材

ISBN 978-7-5083-5876-5

Ⅰ．计…　Ⅱ．①江…　②张…　③丁…　Ⅲ．计算流体力学－高等学校－教材　Ⅳ．035

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 095056 号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路 6 号　100044　http://jc.cepp.com.cn）

航远印刷有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2007 年 8 月第一版　2007 年 8 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米　16 开本　18 印张　436 千字

印数 0001—3000 册　定价 **29.00** 元

前言

为贯彻落实教育部《关于进一步加强高等学校本科教学工作的若干意见》和《教育部关于以就业为导向深化高等职业教育改革的若干意见》的精神，加强教材建设，确保教材质量，中国电力教育协会组织制订了普通高等教育"十一五"教材规划。该规划强调适应不同层次、不同类型院校，满足学科发展和人才培养的需求，坚持专业基础课教材与教学急需的专业教材并重、新编与修订相结合。本书为新编教材。

流体的运动，如空气环流，海洋与江河中水的流动，污染物质在大气或水中的迁移等，这些现象都可用数学方程来描述，称为流体运动的数学模型。在一般情况下找不到这些数学方程的理论解，只能通过物理模型试验或数值计算的方法得到流体运动规律，后者就属于计算流体力学的研究范畴。通过计算流体力学的手段，人们可以获得自然界中流体流动的状态及流体运动对周边建筑结构的影响。如飞行器在空中飞行，通过计算流体力学的手段可以得到飞行器周边的流速和压力分布，以及飞行器受到的升力和阻力；江河洪水问题可通过数值计算获得河道任意位置的流速与水位随时间的变化，以及洪水洪峰的时空演变过程；通过数值计算，不仅可以获得海洋、江河及湖泊水流流速和水位的时空分布，还可计算获得污染物质在水中的输移过程。计算流体力学现已大量应用于水利、环境等工程（如三峡水利工程及南水北调工程）的计算中。随着计算机和计算方法的发展，人们能够对自然界的流体流动进行越来越精细的模拟，计算流体力学已经成为科学研究、工程规划以及人们认识自然的不可缺少的工具。

清华大学自 1986 年以来为本科生开设"计算流体力学"选修课及本校研究生的必修课程，先后出版了一些教材。计算流体力学涉及的知识面广，专业知识深入，要求的教学知识面全。本教材的特点是：①在原有教材[1]基础上更加强调对计算流体力学基本概念的理解，通过简明的讲解使读者理解复杂的数理问题，如有限元计算原理、有限体积法的守恒性等；②注重知识和数值方法的系统性，重点讲解有限差分法、有限元法和有限体积法的基本思路及其解决问题的特点，并适当介绍计算流体力学的最新研究进展，引入新的计算格式，使读者对本学科的发展方向有所认识；③注重提高读者的实践能力，加强对编程环节的训练，配备一些基本流动的计算程序，如一维非恒定流计算、渗流计算、势流计算和黏性流的计算；④在每章后都配备练习题，作为读者检查和巩固所学基础知识的训练。

本书第一章～第三章由江春波教授编写，内容主要为计算流体力学的基础理论和数值计算方法，在保留原有参考书目的基本内容的基础上，适当介绍计算流体力学研究的最新进展，拓宽学生的知识视野。同时考虑到本科生教学的特点，简化对基础理论的证明与推导过程，强调对基本概念、基本原理和方法的阐述。第四章和第五章由丁则平编写，主要介绍有限体积法和一维非恒定流的数值计算。第六章～第九章由张永良教授编写，主要介绍各种流体力学问题的不同数值解法，结合势流和黏性流问题的计算实例，对有限差分方法、有限元方法和有限体积法的应用进行详细的讲解，分别给出各种数值方法的计算实例，这些实例可帮助读者加深对各种流体力学问题的理解，同时可供读者在进行数值计算时作为参考。

本书的内容从2004年以来在清华大学本科生教学中使用，并根据本科生教学特点进行多次修改，可供32～64学时的课程讲授使用。如果学时较少，可以把重点放在前4章的数值计算基本方法上，对第五章以后各章内容可进行有选择的讲授，这样不会分割计算流体力学内容的连贯性，但须对学生进行一定实践能力的训练，其余部分内容可以作为自学资料和因材施教的内容。

本书的编写是在国家重点基础研究项目（2006CB403304）、国家自然科学基金项目（50539070）和高等学校博士学科点专项科研基金（20060003038）的资助下进行的，教材中用到了该课题的部分研究理论和成果。在本书编写过程中得到了清华大学周雪漪教授的指导，她对于本书内容的编写提出了很多宝贵建议，在此表示感谢。

由于时间仓促和水平所限，书中还存在不足之处，敬请读者指正。

编　者

2007年7月

目　录

1 流体运动数学模型

流体流动的基本方程，如纳维—斯托克斯（N—S）方程和浅水方程，都是复杂的非线性方程组。这些方程目前在一般情况下还很难找到解析解或精确解。为了分析流体运动情况，经常利用数值离散方法，将控制流体运动的微分方程化为关于离散点上变量的代数方程，通过计算机运算获得流动的压力和流速分布，这一学科称为计算流体力学。在计算流体力学中，首先针对模型方程，分析所采用计算方法的一些基本特征，如方法的精度、收敛性、稳定性以及数值解的误差特征等，且通过对模型方程的试算结果与其精确解进行比较，验证计算方法的可靠性，用于进一步改进计算方法。然后，再将其计算方法用于求解流体力学的基本方程。由于要求解的方程的复杂性，所得结果仍需通过与实验值或人们所公认的一些典型问题的计算结果进行比较，以证实所得结果的可靠性。一般来说，模型方程应该具有对应的流体力学基本方程的基本特征，因为单个线性方程的数学理论较为完善，多采用单个线性方程。

随着计算机和计算技术的飞速发展，计算流体力学得到越来越广泛的应用，从宇宙飞船在太空中飞行过程的数值模拟、天空中大气运动及降雨等过程的气象预报、海洋环流及其水质变化趋势的仿真、江河洪水演变过程及其水环境特性等等，到人们居住的室内空间空气温度与质量模拟、燃气机内燃料的燃烧、水轮机和洗衣机内的水流流态的模拟等等，这些复杂流动都可以通过计算流体力学的手段得以实现。

本书从最简单的流体力学模型出发，对模型方程的特性、定解条件进行介绍，涉及的内容与数理方程的基本理论密切相关。希望对流体力学模型的数学特性进行深入研究的学者可以参考有关数学书籍。

本章将给出在计算流体力学中常采用的几种模型方程，并简要讨论其数学性质，同时讨论模型方程边界条件的处理。对于存在解析解的模型方程，将给出其解析解的表达式，用于验证数值解的精度。

首先对公式中的角标规则进行说明。在公式的同一项中，角标出现两次的为求和指标，也称为哑指标；同一项中只出现一次的角标，为自由指标。举例说明如下，对于二维空间的流体运动欧拉（Euler）方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}\quad i,j=1,2 \tag{1.0 - 1}$$

式中：i 为自由指标，$i=1,2$ 分别代表两个方向的动量方程；j 为求和指标，对于二维情况对 $j=1,2$ 求和；u_i 为流速分量；x_i 为直角坐标；p 为压力；ρ 为流体的密度。上述方程的非求和形式为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1}\\ \frac{\partial u_2}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2}\end{aligned} \tag{1.0 - 2}$$

可见，式（1.0－1）比式（1.0－2）在书写上简单得多，在计算流体力学中经常使用式（1.0－1）的数学表达式。

1.1 计算流体力学的发展与任务

在工农业生产和日常生活中经常会遇到流体的流动现象及流体力学问题。揭示流体的运动规律及与流体运动有关的力学问题，可以通过物理模型实验和数值计算方法来实现。物理模型实验以流体力学的相似理论为指导，把实际流动现象缩小为能在实验室内摆放的物理模型，然后在模型上预演相应的流体运动，从而得到模型流动的规律性，再把模型试验数据按照相似关系换算为原型的成果，以达到解决问题的目的。对于某些流体力学问题，如高速水流的脉动、空化空蚀和掺气等，模型的相似律还没有得到很好的解决，同时多数观测仪器将不可避免局部改变流场、温度场和浓度场，使量测结果带有误差。

随着流体力学理论的发展和计算机软硬件性能的提高，流体力学数值模拟有了较大的发展，应用数值计算方法对流体力学问题进行研究已成为一种趋势，在许多方面取得了令人满意的计算成果。计算流体力学解决问题的步骤，首先是根据工程实际建立数学模型，结合数学模型的特点选择数值计算方法并提出合适的边界条件，编制计算机程序将微分方程化为代数方程进行求解。通过数值模拟结果对流动现象进行再现和预测，以及多方案对比分析各种工程措施的效果，对工程建设提出科学指导。

在建立流体运动的数学模型方面，首先根据流体运动质量守恒和动量守恒的原则，建立描述流动的数学方程。如对于机翼绕流问题，可以忽略黏性应力的影响，通过简化得到Euler方程甚至泊松（Poisson）方程，若进一步简化为形如流函数或势函数方程，也称为势流方程；对于黏性流体的运动，建立 N－S 方程，对于紊流问题还需考虑雷诺应力的作用，通过雷诺（Reynolds）方程和紊流模型对问题进行求解；对于涉及到水环境和大气环境的问题，不但要求解水流的运动方程，还需建立描述污染物质迁移的对流扩散方程，甚至是生物生长的动力学方程；对于河道的洪水泛滥和长距离引水问题，需要建立水流运动的圣维南方程或者浅水方程；对于有自由表面的流动还需建立描述自由水面运动的方程。上述描述流体运动和污染物质迁移的方程，在复杂的几何边界下，常常不存在解析解，需要通过数值离散的方法并引入边界条件后获得数值解。目前常用的数值计算方法主要分为有限差分法、有限体积法、有限元法、有限分析法、边界元法等。如何选取数值方法，主要取决于实际物理现象和不同数值方法的特点。如有限差分法，在数值离散上比较直观，计算相对也比较简便；有限元法适用于对复杂几何边界的模拟，在引入自然边界条件上比有限差分法容易，求解椭圆型方程时具有优势；有限体积法兼备了有限差分和有限元法的特点，能够更好地满足流动的通量守恒性，也适用于复杂的几何边界条件，目前也被广泛应用。值得注意的是，随着计算流体力学的发展，各种计算方法都得到了不同改进，有很多新成果出现，具体采用哪种数值方法不但要考虑现有的技术条件，还需要考虑计算流体力学最新研究进展。

数值计算在固体力学领域开展的比较早，各种理论和方法也比较成熟。在流体力学领域数值模拟技术不断取得进步。从流体本身的运动状态上看，从简单的势流到黏性流动，然后又扩充到紊流和有自由水面的流动。势流理论是以边界层理论为基础的。在边界层以外的区

域，惯性力占主导地位而忽略了黏滞力的作用，把水流看成理想流体的流动，用势流理论来求近似解。在工程实际中出现的势流问题，如闸孔出流、渗流、孔口出流等都可以应用势流理论建立基本方程，然后通过数值计算的方法获得离散解。对有自由表面、回流及流体与固体边界分离的问题，开展黏性流体运动的数值解，如不可压缩N－S方程的数值求解。对于高 *Re* 数流动，流动本身为紊流，计算流体力学又从黏性流向紊流扩展。此时，基本控制方程为雷诺方程，在该方程中含有紊动切应力等新的未知数，需要建立紊动切应力与平均流场之间的关系，即紊流模型。

从20世纪60年代初期开始，对紊流模型的研究得到不断的发展。紊流模型主要分为两大类。其一是基于布辛涅斯克提出的涡黏性模型。该模型假设雷诺应力类似于层流的黏性应力，与时均速度的梯度成正比，将雷诺应力的确定转化成求解紊动黏性系数的问题。涡黏性模型包括零方程模型、单方程模型和双方程模型。另一类是雷诺应力模型。该模型直接建立求解雷诺应力的微分方程，并通过适当的模型简化，对其雷诺方程和雷诺应力方程进行求解，在雷诺应力模型的基础上，略去方程中的微分运算，得到代数应力模型。与雷诺应力模型相比，代数应力模型在数值求解上具有省时的特点。代数应力模型是在考虑到雷诺应力的各向异性的情况下建立起来的，可以模拟流线曲率变化较大的流动，如附壁射流中的壁面效应，紊动引起的二次流以及边界弯曲引起的附加应变率等。还有其他的计算紊流的模型和方法，如直接数值模拟模型、水涡模拟模型等。随着计算流体力学的进步，计算区域也从固定区域向变动区域扩展，如海洋潮汐问题、洪水演进、明渠水流以及容器中的水流等，都具有自由表面。由于自由表面位置随时间变化，需要建立表面运动的控制方程，并寻求合理的表面位置计算方法。目前自由面的模拟方法主要包括刚盖法、弹性盖法、高度函数法（HOF）、标记网格法（MAC）、体积率法（VOF）等。

在空间维数上，计算流体力学从简单一维到二维流动模拟，扩展到三维流动的模拟。如长直渠道和河道的流动可以作为一维流动考虑；对于河道洪水和湖泊水流，水流边界随着洪水过程而改变，因此常常需要开展二维数值模拟；对于湖泊与河道问题，也常常建立河网模拟，将一维水流和二维水流数值模型进行耦合；对于深水湖泊和近海水流，如果流态在水深方向的变化比较显著，通过建立三维流动模型对问题进行求解。

从模拟未知量个数角度看，计算流体力学从单相流体运动的模拟向多相流动模拟发展，从单纯的流体运动模拟向包括传热、传质方向发展。如模拟电站尾水管道中的水气明满流过渡过程和高拱坝泄洪消能问题，在水中掺混大量气体，需要模拟水、气两项流动。对于火力发电厂的高温排水问题以及燃气机内部的燃烧问题，不但需要模拟流体的运动，还需模拟温度传输过程。由于温度等物理状态量对流体运动产生影响，使得水流和水温变量相互耦合。如深水型水库的水温分层问题，不但温度变化影响流体的密度，同时温跃层的存在也抑制水流的紊动特性，是一个典型的水流水温耦合问题。对于污染物在水体或大气中的输移过程的模拟，如对湖泊和水库中的富营养化问题的数值模拟，首先要通过水流模型计算流场，然后求解氮、磷等营养盐的迁移过程，再通过求解动力学方程模拟藻类的生长过程，达到对水体富营养化发展趋势的预测。

如上文所述随着计算机能力的提高和数值方法的进步，计算流体力学的应用范围越来越广，从陆地河流到海洋，从室内空气循环到全球大气对流等等。由于物理模型实验需要考虑

场地和比尺效应的影响，该方法不但研究成本较高，而且结果换到原型时是否可靠，还有待于深入探讨。数值模拟方法不受比尺效应的影响，可以进行多种计算方案的对比，可以选择不同流体力学参数进行数值实验，对流动结果进行对比分析。但是流体力学数值模拟的精度取决于计算模型和模型参数的选取，数值计算也往往具有误差。因此在科研实际中，常常将流体运动的数值模拟与物理模型试验相互结合，两种方法相互补充。

1.2 数学方程的类型

在数学物理方程中的初边值问题，一般都是以椭圆、抛物线或双曲线型偏微分方程的形式出现。二阶线性偏微分方程的一般形式可写为

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu+g=0 \tag{1.2 - 1}$$

式中：u 为待求未知量；系数 a，b 到 g 可以是 x，y 的函数。与二次曲线方程

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

的分类方法相似，偏微分方程（参考，偏微分方程，南京大学数学系编写，1979）可以划分为如下三类方程：

如 $b^2-4ac<0$，则方程为椭圆型；

若 $b^2-4ac=0$，则方程为抛物型；

若 $b^2-4ac>0$，则方程为双曲型。

例如：拉普拉斯（Laplace）方程 $\nabla^2 u=0$ (1.2 - 2)

扩散方程 $\nabla^2 u=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}$（$\alpha$ 是常数） (1.2 - 3)

波动方程 $\nabla^2 u=\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$（$\beta$ 是常数） (1.2 - 4)

分别是椭圆型、抛物型和双曲型的偏微分方程。以热传导问题为例，稳态的热传导方程：$\nabla^2 T=0$，是椭圆型的偏微分方程；而非稳态的导热方程：$\frac{\partial T}{\partial t}-\alpha\nabla^2 T=0$，是抛物型的偏微分方程。

流体的运动，可以是定常的或非定常的，也可以是线性的或非线性的。微分方程通过数值方法离散后，可得到线性方程组。求解线性代数方程组可以用高斯消元法、矩阵的三角分解法等各种方法求解；对非线性方程组，需通过迭代法（例如 Newton-Lapson 法）求解；对非定常问题，则可采用各种显式和隐式的计算格式求解。

为了介绍流体力学模型，先从一维非恒定对流扩散方程的守恒形式出发。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{\partial(u\Phi)}{\partial x}=\beta\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(\beta\text{ 为大于零的常数}) \tag{1.2 - 5}$$

式中：Φ 为待求的因变量；u 为流速；β 为扩散系数。根据一维流体运动的连续条件，可以将式（1.2 - 5）改写为如下的非守恒形式：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+u\frac{\partial \Phi}{\partial x}=\beta\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \tag{1.2 - 6}$$

将该式中 Φ 改为流速 u，则得一维博格斯（Burgers）方程，即

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.2-7}$$

该模型方程的形式与一维 N－S 方程仅仅相差一个压力梯度项，等号左边分别为时变项、对流项，等式右边称为黏性耗散项（或扩散项）。一维 Burgers 方程经过不同的简化处理，又可得到各种更为简单的模型方程。若略去黏性耗散项，式（1.2－7）简化为一维非线性对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1.2-8}$$

式（1.2－8）是一维 N－S 方程的惯性力部分，适用于无黏性流体的运动。若将 Burgers 方程（1.2－8）的非线性的对流项作线性化处理，即将 u 当作常数 α，则得

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}=\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.2-9}$$

得到的是一维线性对流扩散方程，该方程适合于污染物质在流体中的运动，包括对流与扩散两个物理过程。若再进一步简化，忽略扩散项（二阶导数项），式（1.2－9）中 $\alpha\neq 0$，$\beta=0$，则得一维纯对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1.2-10}$$

式（1.2－10）为线性方程，表示物质的浓度 u 的时空变化主要受流体运动的速度 α 支配。若当流动速度较小，对流项可以忽略时，式（1.2－9）中，$\alpha=0$，$\beta\neq 0$，则得一维扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.2-11}$$

通过式（1.2－11）能够确定标志物质的浓度在静止流体中的扩散规律，温度在固体或静止液体中传播也可由式（1.2－11）确定。对于恒定不可压缩势流问题，流速满足

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x},v=\frac{\partial\phi}{\partial y},w=\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{1.2-12}$$

则流速势函数满足：

$$\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \tag{1.2-13}$$

公式（1.2－13）称为 Laplace 方程。

式（1.2－10）、式（1.2－11）和式（1.2－13）分别属于双曲型、抛物型和椭圆型微分方程。下面将以这三类方程为模型方程讨论其定解条件。

1.3 椭圆型方程

椭圆型方程的标准形式为

$$\nabla^2\phi=0 \quad 或 \quad \nabla^2\Psi=f \tag{1.3-1}$$

式（1.3－1）中第二个方程为 Poisson 方程，式中 ϕ 和 Ψ 分别为恒定势流中的势函数和流函数。椭圆型方程不仅用来描述恒定不可压势流问题（例如理想恒定不可压缩圆柱绕流问题），在恒定渗流问题、浅水环流问题、波浪问题及其 N－S 方程的求解（根据连续方程和运动方程导出的压力 Poisson 方程）中也常遇到这类方程。由于只存在空间坐标的二阶导数项，属

椭圆型问题，也称为边值问题。域上任一点的解仅取决于边界上每一点的边界条件，方程在封闭域上求解。其定解条件是在封闭边界上给定边界条件，而无需初始条件。

边界条件有 3 种形式：

第一类边界条件为在边界 Γ 上给定函数 ϕ 值，即

$$\phi\,|_{\Gamma} = f_1(x,y,z) \tag{1.3-2}$$

称之为本质边界条件或狄立克里（Dirichlet）条件，$f_1(x,y,z)$ 为已知函数。

第二类边界条件为在边界 Γ 上给定函数 ϕ 的法向导数值，即

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_{\Gamma} = f_2(x,y,z) \tag{1.3-3}$$

称之为自然边界条件或诺曼（Neumann）条件，$f_2(x,y,z)$ 为已知函数。

第三类边界条件，在边界上用第一类和第二类边界条件的组合式表示为

$$\left(a\frac{\partial \phi}{\partial n} + b\phi\right) = f_3(x,y,z) \tag{1.3-4}$$

其中 $a,b \geqslant 0$，$f_3(x,y,z)$ 是已知函数。

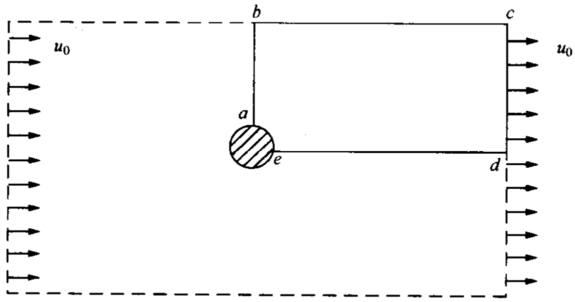

图 1.3-1　流动区域示意图

给定边界条件时，可在封闭域上全部给定第一类边界条件，也可全部给定第三类边界条件，但不能在封闭域上全部给定第二类边界条件即全部给定函数导数值，否则它将使最终求解的代数方程组无法得到唯一的解。

例如均匀来流为 u_0 的理想恒定不可压缩圆柱绕流问题，其基本方程为

$$\nabla^2 \phi = 0$$

因流动具有对称性，求流场时仅取四分之一区域进行分析，如图 1.3-1 所示，其定解条件为

$$cd:\frac{\partial \phi}{\partial x} = u_0,\quad ab:\phi = 0,\quad bc,ed:\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0,\quad ae:\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

1.4 抛物型方程

描述标志物质在静止液体中的扩散过程的方程大多为抛物型方程，其最简单的形式为一维扩散方程（1.2-11），它在时间坐标中是抛物型，在空间坐标中是椭圆型，通常也称为抛物型问题。这类问题在实际计算中常称为初值问题（也称混合问题），其定解条件是必须同时给定边界条件和初始条件。初始条件即在全域上给定初始时刻的函数值，边界条件因含有椭圆算子，故和椭圆型方程一样在封闭域上给定。边界条件有三种形式，它的给定方法也与椭圆型方程相同。例如一维非恒定热传导问题如图 1.4-1 所示。

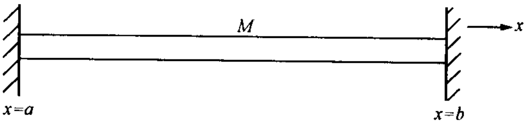

图 1.4-1　一维非恒定热传导问题

基本方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial T}{\partial t}=\beta\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(a\leqslant x\leqslant b,t>0)\\ \text{初始条件：}\quad&T(x,0)=F(x)(a\leqslant x\leqslant b)\\ \text{边界条件：}\quad&T(a,t)=f_1(t)(t>0)\\ &T(b,t)=f_2(t)(t>0)\end{aligned}\right\}\qquad(1.4-1)$$

式中：$F(x)$，$f_1(t)$，$f_2(t)$ 为给定的已知函数。这样域内任意点 M 的 $T(x,t)$ 才能有定解。

在计算方法上，对每一个给定时刻必须算出一个温度场。但是，由于时间坐标是单程坐标，给定时刻的温度场不受以后温度场的影响，故可将非恒定问题化简为一个基本步骤的多次重复，即给出时刻 t 的温度场，求出时刻 $t+\Delta$ 的温度场。这种沿某个单程坐标轴逐步推进的计算方法称为步进法。

对于一维无限长问题，模拟部分不受两端边壁的限制，这时一维抛物型方程只给出初始条件而不需边界条件即可求解，在数学上称为抛物型初值问题或柯西（Cauchy）问题，其一维形式为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial C}{\partial t}=\beta\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(-\infty<x<\infty,t>0)\\ &C(x,0)=F(x)\end{aligned}\right\}\qquad(1.4-2)$$

式（1.4-2）可描述污染物质在静止流体中的扩散，表示其浓度 C 在时间和空间上的变化规律。可用分离变量法（请参考数理方程方面的书籍）求得其解析解为

$$C(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\beta t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-\eta)^2}{4\beta t}\right]F(\eta)\mathrm{d}\eta$$

$$(-\infty<x<\infty,t>0)\qquad(1.4-3)$$

式（1.4-3）表明浓度分布按指数规律急剧衰减，设初始浓度分布为一个尖峰波，它随时间的演变过程见图 1.4-2，波峰将随时间的变化而消失，波形趋于平缓，说明浓度分布与初始分布 $F(x)$，扩散系数 β 及时间 t 有关。

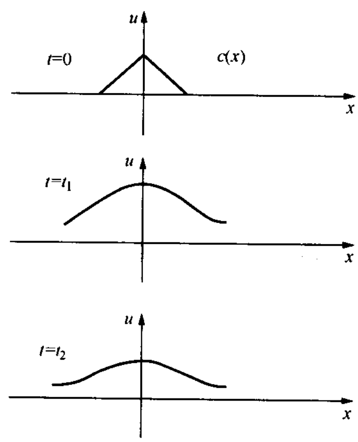

图 1.4-2 纯扩散问题

1.5 双曲型方程

双曲型方程的一阶形式，如一维纯对流方程式（1.2-10）。如果将该方程两端对时间求导数，并将等式右端的时间导数项以空间导数替代，可以得到二阶形式的波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad(1.5-1)$$

一阶方程组可以化为二阶偏微分方程来定型，如有压管道中水击的运动方程与连续方程可简化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}&=\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}\\ \frac{\partial h}{\partial t}&=\frac{\alpha^2}{g}\frac{\partial u}{\partial x}\end{aligned}\right\}\qquad(1.5-2)$$

式中：u 为断面平均流速；α 指水击传播的波速；h 为管道中的压力。对第一方程作 $\partial/\partial t$，对第二方程作 $\partial/\partial x$，然后两式相减则得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.5-3}$$

二阶波动方程也能化为由两个独立方程组成的一阶方程组，请读者自己推导。

双曲型方程常在管道非恒定流即水击问题、明渠非恒定流（如一维圣维南方程组）及洪水演进、河口潮流等计算中遇到。实际计算中常为初边值（初始值和边界值混合）问题。其定解条件分别叙述如下。

首先讨论一阶线性的纯对流方程，其初值问题定解表达式为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}=0(-\infty<x<\infty,t>0)\\&\text{初始条件}:u(x,0)=F(x)\end{aligned}\right\} \tag{1.5-4}$$

设 $\alpha>0$，因 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，当 $\alpha=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$时，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0$，说明存在一簇特征线（当 α 为常数时，为一条直线），即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\alpha,\text{或 } x-\alpha t=\zeta\quad(\zeta\text{ 为常数}) \tag{1.5-5}$$

在这样的特征线上满足特征关系

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0\text{ 或 }u(x,t)=\text{const} \tag{1.5-6}$$

若需确定以初始条件代入，可得其解析解为

$$u(x,t)=u(\zeta,0)=F(\zeta)=F(x-\alpha t) \tag{1.5-7}$$

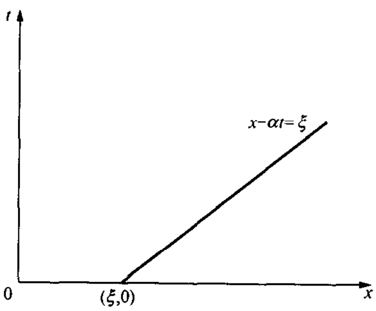

图 1.5-1 一维线性纯对流方程的特征线示意图

式（1.5-7）说明：$x-t$ 平面上任一点 (x,t) 上的 $u(x,t)$ 值，只要过 (x,t) 点作特征线 $x-\alpha t=\zeta$，它与初值线 $(t=0)$ 上的交点为 $(\zeta,0)$，初始函数 $F(x)$ 在该交点的值就是待求点的 u 值，见图 1.5-1。特征线的方向，代表初始扰动传播的方向，因为 $\alpha>0$，它表示向右传播的扰动波，若初始扰动 $F(x)$ 呈一尖峰波形，则该波形以速度 α 向右移动，在 t 时刻移动了 αt 距离，而波形不变，见图 1.5-2。称初值线（$t=0$）上的点 $(\zeta,0)$ 为该点 (x,t) 解的依赖区，而直线 $x-\alpha t=\zeta$ 称为初值点 $(\zeta,0)$ 的影响区。

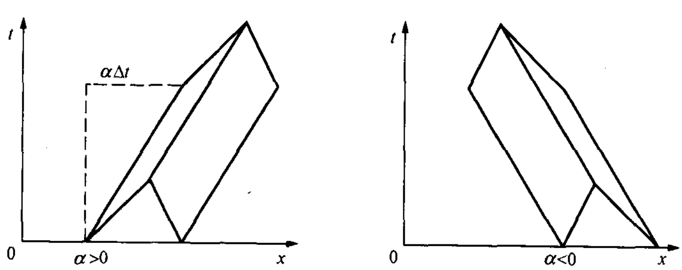

图 1.5-2 纯对流问题示意图

再看二阶波动方程的初值问题，其定解式为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(-\infty<x<\infty,t>0,\alpha>0)\\&\text{初始条件:}u(x,0)=F(x)\\&\qquad\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x,0)}=G(x)\end{aligned}\right\}\tag{1.5 - 8}$$

其初始条件不仅要给定初始扰动 $F(x)$，还要给定初始扰动速度，即待求函数的导数值。该问题的解析解（参考数理方程教材）可表示为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[F(x+\alpha t)+F(x-\alpha t)]+\frac{1}{2\alpha}\int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t}G(\zeta)\mathrm{d}\zeta\tag{1.5 - 9}$$

由此看出，求解 $u(x,t)$ 在点 $(x_0,t_0)(t_0>0)$ 的值，仅依赖于 x 轴上的区间 $[x_0-\alpha t_0,x_0+\alpha t_0]$ 上的初始函数 $F(x)$ 和 $G(x)$ 值，而与该区间以外的初始值无关。因此称区间 $[x_0-\alpha t_0, x_0+\alpha t_0]$ 为点（x_0，t_0）的依赖区域或依赖区间。若要求出点（x_0，t_0）的依赖区域，只要过（x_0，t_0）点作两条特征线：

$$\left.\begin{aligned}x-\alpha t&=x_0-\alpha t_0\\x+\alpha t&=x_0+\alpha t_0\end{aligned}\right\}\tag{1.5 - 10}$$

它们与 x 轴截出的区间 $[x_0-\alpha t_0, x_0+\alpha t_0]$ 即为依赖区域（见图 1.5 - 3）。

相反，在 x 轴上任意点（x_0，0），作两条特征线 $x-\alpha t=x_0$ 和 $x+\alpha t=x_0(t>0)$，而形成的角形域，称为初值点（x_0，0）的影响区（见图 1.5 - 4）。

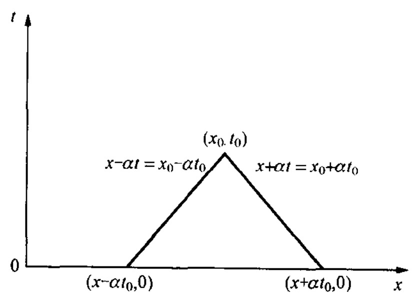

图 1.5 - 3 依赖区域示意图

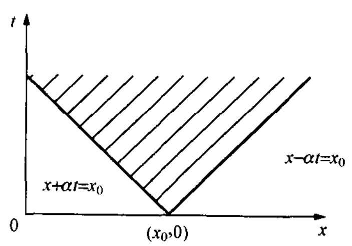

图 1.5 - 4 影响区域示意图

通过以上分析说明二阶双曲型方程初值问题与抛物型方程初值问题的定解初始条件是不同的。以下说明双曲型混合问题的边界条件提法与其他两类方程边界条件的提法不同之处。

一阶双曲型方程混合问题定解式为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}=0(x_1\leqslant x\leqslant x_2,t>0,\alpha>0)\\&\text{初始条件:}u(x,0)=F(x)\\&\text{边界条件:}u(x_1,t)=\Psi_1(t)\end{aligned}\right\}\tag{1.5 - 11}$$

当 $\alpha>0$ 时，特征线向右倾斜，根据解的依赖区分析，只能在左边界即 $x=x_1$ 线上给定边界条件 $u(x_1,t)=\Psi_1(t)$，在右边界上的值由初值或左边值所决定而不能另外给定，见图

1.5-5；当 $\alpha<0$ 时，特征线向左倾斜，只能在右边界即 $x=x_2$ 线上给定边界条件，写为 $u(x_2,t)=\Psi_2(t)$，才能有定解（见图 1.5-6）。

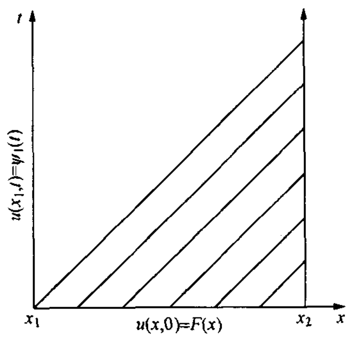

图 1.5-5 正特征线与边界条件示意图

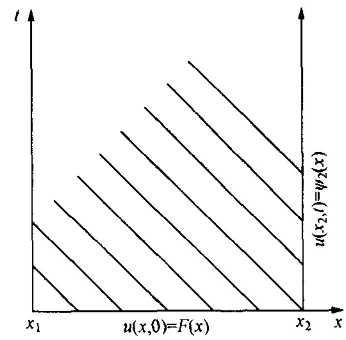

图 1.5-6 逆特征线与边界条件示意图

1.6 一维对流扩散方程

一维对流扩散方程式（1.2-9）初值问题的定解式为

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\alpha\dfrac{\partial u}{\partial x}=\beta\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ u(x,0)=F(x)\end{array}\right\}\quad(-\infty<x<\infty,t>0)\tag{1.6-1}$$

该问题的解析解为

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\beta t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-\eta-\alpha t)}{4\beta t}\right]F(\eta)\mathrm{d}\eta$$

$$(-\infty<x<\infty,t>0)\tag{1.6-2}$$

式（1.6-2）说明在既有对流又有扩散的情况下，初始扰动 $F(x)$ 以速度 α 向右传播，同时又有衰减使波峰消失，波形趋于平缓，如图 1.6-1 所示。比较一维扩散方程式（1.4-2）、一维对流方程式（1.5-4）、一维对流扩散方程式（1.6-1），和图 1.4-2、图 1.5-2、图 1.6-1，可以看出对流项和扩散项的作用：对流项中 α 的正负代表扰动是向右还是向左传播，α 绝对值的大小反映扰动流速大小，扩散项中 β 总是大于零，其值反映扰动波的衰减程度。

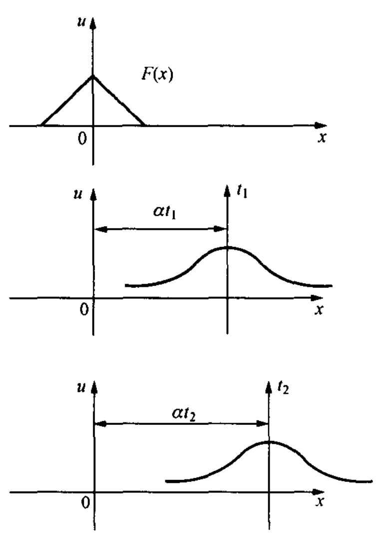

图 1.6-1 对流扩散问题示意图

这里介绍了三个模型方程的解析解，目的是用来检验数值解的方法和结果的可靠性和准确性，以验证数值模型。

流体的运动规律可以通过偏微分方程来描述，如不可压缩流动的 N-S 方程和污染物质在水中输移的对流扩散方程。这些微分方程在一般情况下不存在解析解。采用数值解