GAODENG SHUXUE
ZONGHE ZHIDAO

高等数学
综合指导

河南理工大学数学与信息科学学院 编

煤炭工业出版社

高等数学综合指导

河南理工大学数学与信息科学学院　编

煤 炭 工 业 出 版 社

·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学综合指导/河南理工大学数学与信息科学学院编 .—北京：煤炭工业出版社，2006

ISBN 7-5020-2921-4

Ⅰ.高… Ⅱ.河… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 069387 号

煤炭工业出版社 出版

（北京市朝阳区芍药居 35 号 100029）

网址：www.cciph.com.cn

北京密云春雷印刷厂 印刷

新华书店北京发行所 发行

*

开本 787mm×1092mm 1/16 印张 22 1/2

字数 528 千字 印数 1—6,400

2006 年 9 月第 1 版 2006 年 9 月第 1 次印刷

社内编号 5720 定价 27.00 元

编 写 委 员 会

主　　编　郑玉敏　景书杰

编写人员　（以姓氏笔画为序）

王洪涛　李艳方　李五明　刘小琼　齐凤华

任　燕　张颖芳　郑玉敏　景书杰　焦　丽

前　　言

高等数学是工科院校的一门重要基础课，及时、综合地复习每部分内容是高等数学教学过程中的重要组成部分，是巩固基本概念、加深理解基本概念、提高学生运算技巧和解决实际问题能力的重要环节，也是从整体结构上学习高等数学所不可缺少的环节．通过多年的教学实践，我们深切地感到：要加强习题课教学，必须有一本供教师和学生使用的难度适中的综合指导教材．为此我们组织了具有多年高等数学教学经验的教师，根据工科高等数学教学大纲的要求，编写了这本《高等数学综合指导》．

按同济大学应用数学系主编的《高等数学》的内容次序，我们安排了26节（共52学时）内容，分两学期使用．其内容既是主选教科书的补充，又具有相对独立性．书中的例题，习题、自测题主要来源于我们多年教学经验的积累，同时也参考了近几年国内出版的高等数学参考资料、原国家教委选定的高等数学试题库的试题、近几年来硕士研究生高等数学入学试题等．选题具有广泛性、典型性、技巧性、灵活性，且数量大、参考性强．本书适用于不同层次的学生学习和从事高等数学教学的教师参考．

每小节均由内容提要、常见错误分析、典型例题分析、考研研究、课堂练习和自测题6部分组成．内容提要扼要地复习有关的定义、定理、公式、应用，阐明注意事项及具体要求；常见错误分析、典型例题分析、考研研究、课堂练习和自测题等是每节的主体，既有用以巩固所学知识的概念题、基本训练题，又有具有一定难度的提高题、智力型综合练习题，以及近几年来的硕士研究生入学考题．

本书由河南理工大学数学与信息科学学院编写．编写分工为：李艳方，第一章；张颖芳，第二章；焦丽，第三章；任燕，第四章；刘小琼，第五章、第六章；王洪涛，第七章；齐凤华，第八章；郑玉敏，第九章、第十章；景书杰，第十一章；李五明，第十二章．景书杰副教授负责全书的设计与统稿工作，郑玉敏副教授负责全书的审阅工作．编写过程得到了数学与信息科学学院成军祥院长和邓继恩副院长的帮助和指导；另外，也得到了数学与信息科学学院其他老师以及教材科马哲伦科长的热情帮助，在此一并表示谢意．

限于作者水平，敬请广大读者对书中的不妥与错误之处批评、指正．

编　者

2006年5月

目　　录

第一章 函数与极限

对函数的研究是数学理论永恒的主题之一. 可以毫不夸张地说，整个高数就是为研究函数的性质而存在的. 因此，学好高数的必要条件之一就是对函数和函数的性质有充分、全面、细致的了解.

极限理论是高等数学区别于初等数学的第一个标志. 它是整个高等数学的理论基础，微积分理论是直接建立在极限理论之上的，而微积分又占据了高数的绝大部分篇幅，正因如此，极限理论的重要性是可想而知的.

本章我们将回顾一下函数的概念和基本性质，然后集中精力研究数列和函数的极限、函数的连续性等.

第一节 函 数

一、内容提要

1. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 变量 x 称为自变量，变量 y 称为因变量. x 的变化域 D 称为函数的定义域，变量 y 的取值范围称为函数的值域.

2. 函数的几种特性

(1) 有界性 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在 $M>0$，使得对于一切 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界. 若不存在这样的 M，则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

(2) 单调性 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调增加（或单调减少）的，区间 I 称为函数的单调增加（或单调减少）区间. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

(3) 奇偶性 设函数 $y=f(x)$ 在关于原点的对称区间 D 上有定义。如果对于任一 $x\in D$，恒有 $f(x)=f(-x)$（或 $f(x)=-f(-x)$），则称 $f(x)$ 为偶函数（或奇函数）.

(4) 周期性 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个不为零的数 l，使得对于任一 $x\in D$，有 $(x\pm l)\in D$，且 $f(x\pm l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期. 通常我们所说的周期是指最小正周期.

3. 复合函数

若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D，值域为 V^*，且

$V^* \subset U$，则对 D 内的每一个数 x，经过中间变量 u 都可以唯一地确定一个值 y，于是 y 经过中间变量 u 而成为 x 的函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$. 这种函数称为复合函数.

4. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 Z，如果对于 Z 中任一 y 值，从关系式 $y=f(x)$ 中唯一确定一个 x 值，则称变量 x 为变量 y 的函数，记为 $x=\varphi(y)$，称它为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

习惯上，采用字母 x 表示自变量，字母 y 表示函数，因此 $y=f(x)$ 的反函数常写成 $y=\varphi(x)$，有时亦记为 $y=f^{-1}(x)$.

$y=f(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 的图像在同一坐标系内关于直线 $y=x$ 对称.

严格单调函数一定存在反函数，且反函数与原函数有相同的单调性.

特别强调

◆ 函数关系是特殊的映射，它可以是"多对一"或"一对一"（自变量对应因变量）的，但绝不能是"一对多"的，这一点可以从函数的定义中得到.

◆ 一个函数存在反函数的充分必要条件是它是一个一一对应（或称一一的）.

◆ 原函数与它的反函数只有在同一坐标系中才是关于 $y=x$ 对称的.

◆ 单调函数一定存在反函数，但反之，并不是存在着反函数的函数都是单调的. 例如，函数

$$y=\begin{cases} x, & x\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty), \\ 1-x, & x\in(0,1) \end{cases}$$

不是单调函数，但它有反函数.

◆ 一个函数是奇（偶）函数的必要条件是它的定义域是关于原点对称的，即如果一个函数的定义域不是关于原点对称的，则它一定不是奇（偶）函数.

二、常见错误分析

【例 1】已知

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\geqslant 0, \\ x^3, & x<0, \end{cases}$$

求 $f(-x)$.

错解

$$f(-x)=\begin{cases} (-x)^2+1, & x\geqslant 0, \\ (-x)^3, & x<0, \end{cases}$$

即

$$f(-x)=\begin{cases} x^2+1, & x\geqslant 0, \\ -x^3, & x<0. \end{cases}$$

分析 计算 $f(-x)$ 时，应将原来的函数关系式中出现变量 x 的地方通通用 $(-x)$ 代替，特别对分段表示的函数，要将表示自变量取值范围中的 x 也用 $(-x)$ 代替.

解答

$$f(-x)=\begin{cases} (-x)^2+1, & -x\geqslant 0, \\ (-x)^3, & -x<0. \end{cases}$$

即

$$f(-x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant 0,\\ -x^3, & x>0.\end{cases}$$

【例 2】已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^4+\frac{1}{x^4}$，求 $f(x)$ 的表达式.

错解 因为

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=x^4+\frac{1}{x^4},$$

所以

$$f(x)=x^4.$$

分析 显而易见，若 $f(x)=x^4$，则有

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^4\neq x^4+\frac{1}{x^4}.$$

上段推演的错误在于由错误的观察而引进了一个实际上不成立的关系式

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right).$$

解答 为求 $f(x)$ 的表达式，可令 $x+\frac{1}{x}=t$，此时，左式 $=f(t)$，现将右式恒等变形，也表示成 t 的函数，即

$$\begin{aligned}f(t)&=x^4+\frac{1}{x^4}=\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right]^2-2\\&=(t^2-2)^2-2\\&=t^4-4t^2+2.\end{aligned}$$

故

$$f(x)=x^4-4x^2+2.$$

三、典型例题分析

【例 1】求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}+\arcsin\frac{2x+1}{3}$；

(2) $y=\frac{1}{\ln|x-1|}$.

分析 熟记下列简单函数的定义域：

$y=\frac{1}{x}$，$x\neq 0$；　　$y=\sqrt{x}$，$x\geqslant 0$；

$y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$，$x>0$；　　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$|x|\leqslant 1$.

求较复杂函数的定义域，就是求解各个简单函数的定义域所应满足的不等式组的解集.

解

(1) 由 $\begin{cases}2x-x^2>0,\\ \left|\frac{2x+1}{3}\right|\leqslant 1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<2,\\ -2\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

故定义域为

$$0<x\leqslant 1 \quad 或 \quad (0,1].$$

(2) 由 $\begin{cases}\ln|x-1|\neq 0,\\ |x-1|\neq 0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0,\ x\neq 2,\\ x\neq 1.\end{cases}$

故定义域为

$$\{x\mid x\neq 0, x\neq 1, x\neq 2\} \quad 或 \quad (-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty).$$

【例 2】设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，则函数 $f\left(x+\frac{1}{4}\right)+f\left(x-\frac{1}{4}\right)$ 的定义域是(　　).

A. $[0,1]$　　B. $\left[-\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right]$　　C. $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$　　D. $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$

分析　分别考察 $f\left(x+\frac{1}{4}\right)$ 和 $f\left(x-\frac{1}{4}\right)$，求两个函数定义域的交集.

解

$$\begin{cases}0\leqslant x+\frac{1}{4}\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-\frac{1}{4}\leqslant 1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4},\\ \frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{5}{4},\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}.$$

故答案为 D.

【例 3】设 $y=f(x)$ 的定义域为 $(0,1]$，$\varphi(x)=1-\ln x$，求复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域.

分析　$y=f(x)$ 的定义域是指 x 的变化范围，$y=f[\varphi(x)]$ 的定义域同样也是指 x 的变化范围. 已知 $y=f(x)$ 的定义域求 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域的一般方法是令 $t=\varphi(x)$，解出 x 的变化范围.

解　令 $t=\varphi(x)$，由题意知 $y=f(t)$的定义域为$(0,1]$，即 $0<1-\ln x\leqslant 1$，解得 $1\leqslant x<\mathrm{e}$，所以 $f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $[1,\mathrm{e})$.

【例 4】下列函数 f 与 φ 是否相等，为什么？

(1) $f(x)=\frac{x}{x}$，$\varphi(x)=1$；

(2) $f(x)=x$，$\varphi(x)=\sqrt{x^2}$.

分析　两个函数相等是指 $\forall x\in D$（定义域），$f(x)=\varphi(x)$，故两函数若相等，则它们的定义域必相同. 一般地，两函数相等记为 $f(x)\equiv g(x)$.

解

(1) $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 不相等. 因为 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$，而 $\varphi(x)$ 的定义域为 R. 故两函数不可能相等.

(2) $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 不相等. 因为当 $x<0$ 时，$\varphi(x)=-x$，而 $f(x)=x$. 故 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 不相等.

【例 5】函数 $y=-\sqrt{x-1}$的反函数是（　　）.

A. $y=x^2+1\ (-\infty<x<+\infty)$　　B. $y=x^2+1\ (x\geqslant 0)$

C. $y=x^2+1\ (x\leqslant 0)$　　D. $y=x^2-1\ (-\infty<x<+\infty)$

分析　因为原有函数的值域是 $(-\infty,0]$，所以反函数的定义域应当是 $(-\infty,0]$. 四个选项中只有 C 符合这个要求.

解 选C.

【例 6】设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$，$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

分析 函数复合时应注意相应的自变量所取的形式.

解

$$f[f(x)]=\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=1-\frac{1}{x};$$

$$f\{f[f(x)]\}=f\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=x;$$

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{1}{1-\dfrac{1}{f(x)}}=\frac{1}{1-(1-x)}=\frac{1}{x}.$$

【例 7】下列结论对吗?

(1) 初等函数在其定义域内都是连续的;

(2) 分段函数一定不是初等函数;

(3) 复合函数一定是初等函数.

解 基本初等函数在其定义域内是连续的，而初等函数在其定义区间内是连续的. 定义区间与定义域有所不同，定义区间是包含于定义域内的区间，定义域不一定是区间，可能包含孤立点，或者只包含孤立点. 例如初等函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2}{x+1}+4}$的定义域为 $(-1,+\infty)$ 及 $x=-2$. 这里 $(-1,+\infty)$ 是 $f(x)$ 的定义区间，而 $x=-2$ 是 $f(x)$ 的定义域内的一个孤立点，由于函数在 $x=-2$ 的邻近没有意义，不具备讨论连续性的前提条件，当然也就谈不上函数在该点连续了. 因此，只能说 $f(x)$ 在其定义区间 $(-1,+\infty)$ 内是连续的，而不能说 $f(x)$ 在其定义域内是连续的. 再如 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{-\sin x}$是初等函数，而它的定义域为 $D=\{x\,|\,x=k\pi,\ k\in Z\}$. 该函数没有定义区间，它在定义域内任一点都不连续，所以结论 (1) 是错误的，正确的应是初等函数在其定义区间内是连续的. 对于 (2) 中的结论，由初等函数的定义可知一般分段函数不是初等函数，因为它不是用一个式子表示的函数，但有些分段函数却满足初等函数的定义. 例如

$$y=\begin{cases}x-1, & x>1,\\ 0, & x=1,\\ 1-x, & x<1\end{cases}$$

是由 $y=\sqrt{u}$，$u=(x-1)^2$ 复合而成的，且可由 $y=\sqrt{(x-1)^2}$表示，所以是初等函数，即 (2) 中的结论也是错误的. 至于 (3) 中的结论也不正确，例如

$$y=\begin{cases}3x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1\end{cases}$$

$g(x)=\ln x$，则复合函数

$$f[g(x)]=\begin{cases}3\ln x+1, & 1\leqslant x\leqslant \mathrm{e},\\ (\ln x)^2, & x>\mathrm{e}\end{cases}$$

就不是初等函数.

【例 8】判定下列函数的奇偶性

(1) $y=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$;

(2) $y=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$ $(a>1)$.

分析 奇偶性的判定一般从 $f(-x)$ 出发.

解

(1) $f(-x)=\ln\dfrac{-x-1}{-x+1}=\ln\dfrac{x+1}{x-1}=-\ln\dfrac{x-1}{x+1}=-f(x)$,

故 $f(x)$ 为奇函数.

(2) $f(-x)=\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\dfrac{1-a^x}{1+a^x}=-\dfrac{a^x-1}{a^x+1}=-f(x)$,

故 $f(x)$ 为奇函数.

四、考研研究

1. 考试内容

函数的概念及表示法；函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；反函数，复合函数，基本初等函数的性质及图形，初等函数.

2. 考试要求

深入理解函数的概念，了解函数的类型，熟练掌握函数的性质；了解分段函数，复合函数的概念，能够熟练列出简单问题的函数关系.

3. 考题研究

【例 1】设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 的定义域.

考点 复合函数.

分析 解出 $\varphi(x)$ 然后确定其定义域.

解 因为 $f(x)=e^{x^2}$，所以 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}$.

又因为 $f[\varphi(x)]=1-x$，所以 $e^{\varphi^2(x)}=1-x$，故 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$. 由 $\varphi(x)\geqslant 0$ 可得

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)},$$

因此 $\varphi(x)$ 的定义域为 $\ln(1-x)\geqslant 0$，即 $x\leqslant 0$ 或 $(-\infty,0]$.

【例 2】设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$$

则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　　D. $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

考点 分段函数的复合函数.

分析 分段函数一般来说不是初等函数，分段函数的讨论是高等数学的重点之一，分段函数的复合函数一般采用分层次讨论的方法.

解

$$f[f(x)]=\begin{cases}1, & 当|f(x)|\leqslant 1,\\ 0, & 当|f(x)|>1.\end{cases}$$

而
$$|f(x)|\leqslant 1,\ x\in(-\infty,+\infty).$$
所以
$$f\{f[f(x)]\}=1,$$
故应选 B.

五、课堂练习（1-1）

1．下列各组函数中，哪些是等价的？

(1) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$ 与 $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^3}}$；

(2) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}^2 x-2\log_{\frac{1}{3}} x\log_3^2 x}$ 与 $y=\log_{\frac{1}{3}} x-\log_3 x$；

(3) $y=\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x$ 与 $y=1$.

2．设
$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0,\end{cases}\qquad \psi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0,\end{cases}$$
求 $\varphi[\varphi(x)],\varphi[\psi(x)],\psi[\varphi(x)],\psi[\psi(x)]$.

3．试证两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，一个奇函数与一个偶函数的乘积是奇函数.

4．设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$（$a$，$b$，$c$ 均为常数，且 $|a|\neq|b|$），求 $f(x)$.

5．求函数 $y=\sqrt{\pi+4\arcsin x}$ 的反函数.

六、自测题（1-1）

1．填空题

(1) 若 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，则 $f(\ln x)$ 的定义域是________.

(2) 若 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$，则 $f(x)=$________.

(3) 设 $f(x+2)=2^{x^2+4x}-x$，则 $f(x-2)=$________.

(4) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$________.

(5) 若 $f(x)$、$g(x)$ 都是奇函数，则 $f[g(x)]$ 是________.

(6) 设 $f(x)=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$（$a>0$），则 $f^{-1}(x)=$________.

2．选择题

(1) 设函数 $f(x)=x\tan x\,\mathrm{e}^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是（　　）.

A. 偶函数　　B. 无界函数　　C. 周期函数　　D. 单调函数

(2) 下列函数中是偶函数的有（　　）.

A. $y=x\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$　　B. $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$

C. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$　　D. $y=(1+x^2)\sin(x+1)^2$

(3) 函数 $y=|\sin x|+|\cos x|$是周期函数，它的最小正周期为（　　）.

A. 2π　　B. π　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

(4) 在（-1, 0）内，下列函数中（　　）是单调增加的.

A. $y=|x|+1$　　B. $y=5x-2$　　C. $y=-4x+1$　　D. $y=|x|-2x$

(5) 设 $f(x)=\frac{x}{x-1}$，若以 $f(x)$ 表示 $f(3x)$，则 $f(3x)=$（　　）.

A. $\frac{3f(x)}{3f(x)-1}$　　B. $\frac{3f(x)}{3f(x)+1}$　　C. $\frac{3f(x)}{2f(x)-1}$　　D. $\frac{3f(x)}{2f(x)+1}$

3. 计算题

(1) 求函数 $f(x)=\ln(1-\ln x)$ 的定义域.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0,\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}0, & x\geqslant 0,\\ -x^2, & x<0,\end{cases}$

求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x<1,\\ x^3, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 3^x, & x>2,\end{cases}$

求 $f^{-1}(x)$.

(4) 设 $f\left(\frac{x}{x-1}\right)=af(x)+\varphi(x)$（$a^2\neq 1$），其中 $\varphi(x)$ 是当 $x\neq 1$ 时有定义的函数，求 $f(x)$.

(5) 设$f(x-1)=\begin{cases}x, & x>1,\\ x-2, & x\leqslant 1,\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}-e^x, & x>0,\\ e^x, & x\leqslant 0,\end{cases}$

求 $f(x)\cdot g(x)$.

第二节　极　　限

一、内容提要

1. 数列极限的定义Ⅰ（收敛）

设 $\{x_n\}$ 是一个数列，a 是实数. 如果对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时有

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \quad 或 \quad x_n\to a\ (n\to\infty).$$

如果数列没有极限，就称数列是发散的.

2. 数列极限的定义Ⅱ（发散到 $+\infty$）

设 $\{x_n\}$ 是一个数列，若 $\forall M>0$，总 $\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|x_n|>M$，则称数列 $\{x_n\}$ 趋于 $+\infty$，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty.$$

3. 数列极限的性质

(1) 唯一性　若数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，则极限值唯一.

(2) 有序性　若$\lim_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim_{n\to\infty}y_n=b$，且$a>b$，则总存在一个正整数N，当$n>N$时，不等式$x_n>y_n$成立；若$\lim_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim_{n\to\infty}y_n=b$，且$\exists N>0$，当$n>N$时，有$x_n>y_n$，则$a\geqslant b$.

(3) 有界性　如果数列$\{x_n\}$收敛，那么数列$\{x_n\}$一定有界.

(4) 收敛数列与其子数列间的关系　如果数列$\{x_n\}$收敛于a，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是a.

(5) 四则运算性　若数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$都收敛，则

① $\{x_n\pm y_n\}$也收敛，且$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\pm\lim_{n\to\infty}y_n$；

② $\{x_n\cdot y_n\}$也收敛，且$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n$；

③若$\lim_{n\to\infty}x_n\neq 0$，则$\left\{\dfrac{y_n}{x_n}\right\}$也收敛，且$\lim_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}$.

4. 函数极限的定义

(1) 当$x\to x_0$时，函数$f(x)$以A为极限的定义　如果对于$\forall\varepsilon>0$，总$\exists\delta>0$，使得对于适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$的一切x，对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$恒成立，则称常数A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记作$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$.

(2) 当$x\to\infty$时，函数$f(x)$以A为极限的定义　如果对于$\forall\varepsilon>0$，总$\exists X>0$，使得对于适合不等式$|x|>X$的一切x，对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数A为函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记作$\lim_{x\to\infty}f(x)=A$. 类似地，当$x\to+\infty(x\to-\infty)$时，只需将上述定义中的$|x|>X$，改为$x>X(x<-X)$，便得$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$ $[\lim_{x\to-\infty}f(x)=A]$的定义.

(3) 单侧极限：

①左极限　记号$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=A$（或$f(x_0-0)=A$），表示$x<x_0$且$x\to x_0$时，函数$f(x)$以A为极限，此时称A为函数$f(x)$在x_0处的左极限.

②右极限　记号$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=A$（或$f(x_0+0)=A$），表示$x>x_0$且$x\to x_0$时，函数$f(x)$以A为极限，此时称A为函数$f(x)$在x_0处的右极限.

显然，函数$f(x)$在x_0处极限存在的充分必要条件是函数$f(x)$在x_0处的左、右极限存在并且相等.

5. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小　如果$\lim_{x\to x_0}f(x)=0$（或$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$），则称函数$f(x)$当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时为无穷小.

(2) 无穷大　如果对于$\forall M>0$，总$\exists\delta>0$（或$\exists X>0$），使得对于适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$（或$|x|>X$）的一切x，恒有$|f(x)|>M$，则称函数$f(x)$当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时为无穷大，记作$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty$.

无穷小（除零外）与无穷大都是变量，并且它们都是对于自变量的某一变化过程而言的.