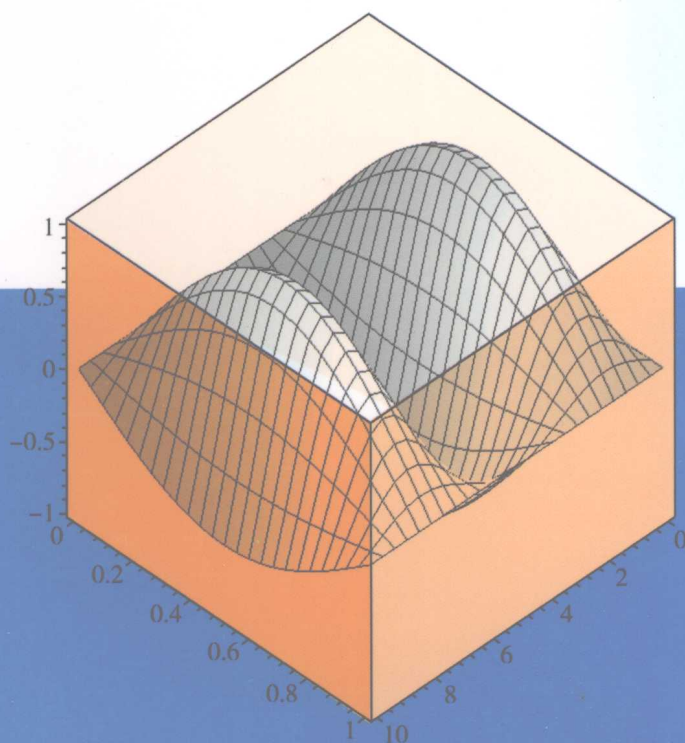


高等工科院校通用教材

数学物理方法 简明教程

(第二版)

郭玉翠



SHUXUE WULI
FANGFA
JIANMING
JIAOCHENG



人民交通出版社
China Communications Press

工科类院校通用教材

数学物理方法 简明教程

郭玉翠

(第二版)

人民交通出版社

内 容 提 要

本书是为高等工科院校各专业开设“数学物理方法”课程的本科生编写的教材,是在第一版的基础上修订而成的。修订后,增加了应用数学软件 Maple 辅助求解定解问题的内容,从而体现了特别强调理论完整和突出应用的特点。

本书可以作为高等工科学校各专业本科生的教材,也可以作为教学参考书或工程技术人员的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法简明教程 / 郭玉翠编. —2 版. —北京: 人民交通出版社, 2007.5
ISBN 978-7-114-06536-1

I. 数… II. 郭… III. 数学物理方法-高等学校-教材
IV. 0411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 064164 号

高等工科院校通用教材

书 名: 数学物理方法简明教程 (第二版)

著 作 者: 郭玉翠

责任编辑: 富砚博

出版发行: 人民交通出版社

地 址: (100011) 北京市朝阳区安定门内大街斜街 3 号

网 址: <http://www.cccpress.com.cn>

销售电话: (010) 85285838, 85285995

总 经 销: 北京中交盛世书刊有限公司

经 销: 各地新华书店

印 刷: 三河市吉祥印务有限公司

开 本: 787 × 1092 1/16

印 张: 14

字 数: 352 千

版 次: 2007 年 5 月 第 2 版

印 次: 2007 年 5 月 第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-114-06536-1

印 数: 0001 - 5000 册

定 价: 29.00 元

(如有印刷、装订质量问题的图书由本社负责调换)

第二版前言

本书是北京邮电大学出版社出版的《数学物理方法简明教程》(第一版)的修订版,此次修订在保持原有内容和特色的基础上,主要做了如下改动:

(1)修改了原版中几处印刷错误。

(2)应读者的要求,增加了例题的数量。因为“数学物理方法”是一门综合性较强的课程,通过各个侧面、不同角度的例题,可以使读者更直接地了解数学物理方程和特殊函数理论以及应用的各个方面,起到加深理解和拓宽眼界的作用。

(3)增加了应用计算机软件 Maple 来辅助求解数学物理定解问题的内容。因为“数学物理方法”这门课程作为众多理工科学生的基础课之一,在后续课和完成学业后的科研工作中都有许多应用,需要学生清楚地理解其中的概念和娴熟地掌握解题方法并且了解结果的物理意义。但是由于课程本身的内容多而难,题目繁而杂,被公认为是一门难学的课程。主要体现在公式推导多,求解习题往往要计算复杂的积分或级数等。随着计算机的深入普及,功能强大的数学软件,如 Maple 等为复杂数学问题的求解提供了有力的工具,笔者近年来在科研和教学工作中对应用数学软件求解数学物理问题有了一些体会,现在尝试着将这些内容加到本次修订的教材中。目的是将较繁琐的数学运算,比如求解常微分方程,计算积分,求解复杂代数方程等借助于计算机完成,可使读者更专注于模型(数学物理方程)的建立、物理思想的形成和数学方法应用于物理过程的理论体系等。数学软件 Maple 的符号运算功能强大,它的最大好处是不用编程,可以直接进行符号运算,因此读者不用另外学习编程的知识,更不要求以能编程为学习基础,这会带来极大的方便。读者只要在计算机上装上 Maple 软件,直接输入命令即可,一节课的时间就可以学会使用了。

(4)在第4章和第5章末各增加了一节选学内容,为学有余力的读者更系统地了解特殊函数的某些知识之用。

本书适合工科各专业 34~54 学时的本科生使用。标有 * 的内容可以作为选讲内容。

本书的再版,得到人民交通出版社的大力支持,特别是得到了谢仁物编审和高静芳编辑的热情帮助,对此深表感谢。本书责任编辑富砚博编审的尽心与敬业,更使本书增色不少,在此对富编审表示诚挚的感谢。

由于作者水平有限,疏漏甚至错误还可能在书中出现,敬请读者师友不吝赐教。

编著者

2007 年 2 月

第一版前言

本书为高等工科院校通讯电子类本科学生学习数学物理方法这门课程而编写,参考高等工科院校数学教学大纲并结合编者在北京邮电大学讲授这门课程的经验 and 体会而完成。与同类教材相比,这本教材的特点是:

(1)根据电子通讯类专业的特点,在确保基本概念准确和理论体系完整的前提下,加强实际背景的阐述,突出数学物理方法作为数学应用于物理与工程科学的桥梁作用,以培养学生综合应用数学知识解决实际问题的能力。

(2)在讲法上,先从有实际背景的问题导出基本方程和定解条件,然后按照数学物理方程的各种解法逐步展开,以分离变量法为主,讨论了三类基本方程在直角坐标系、极坐标系、柱坐标系和球坐标系下的分离变量法的一般步骤及其边界条件的处理。“特殊函数”部分,将特殊函数方程的解法与特殊函数方程从求解数学物理定解问题中的引出分开来讲,突出层次,这样不但使学生易于接受,也便于学生进一步学习本书以外的其他特殊函数。因为无论是数学物理方程还是特殊函数,内容都是非常丰富的,作为一本工科院校的工程数学教材,不可能将如此丰富的所有知识都吸收进来。但我们尽量使本书起到引论的作用,为学生打开一扇门。像在实际应用中很重要的格林函数法一章也是分层次处理,讲清问题的基本概念,为深入学习与研究打下基础。

(3)为了适应现代物理学中大量求解偏微分方程的需要,在第8章中对非线性偏微分方程和积分方程作了初步介绍,体现了教材的现代化精神。

本书的编写与出版得到闵祥伟教授的热情鼓励与帮助,得到了北京邮电大学理学院及北京邮电大学出版社的大力支持,在此一并表示深深的感谢。

由于编者水平有限,书中一定存在不少缺点甚至错误,望读者不吝赐教。

编者

2002年12月

目 录

第 1 章 数学物理定解问题——典型方程和定解条件的导出	1
1.1 典型方程的推导	1
1.2 定解条件	11
1.3 定解问题的提法	15
1.4 二阶线性偏微分方程的分类与化简——解的迭加原理	15
习题 1	22
第 2 章 分离变量法	24
2.1 $(1+1)$ 维齐次方程的分离变量法	24
2.2 二维 Laplace 方程的定解问题	36
2.3 非齐次方程的解法	42
2.4 非齐次边界条件的处理	49
习题 2	55
第 3 章 二阶常微分方程的级数解法 本征值问题	57
3.1 二阶常微分方程的级数解法	57
3.2 Legendre(勒让德)方程的级数解	61
3.3 Bessel(贝塞尔)方程的级数解	65
3.4 Sturm-Liouville 本征值问题	70
习题 3	74
第 4 章 Bessel 函数的性质及其应用	76
4.1 Bessel 方程的引出	76
4.2 Bessel 函数的性质	78
4.3 Bessel 函数在定解问题中的应用	85
* 4.4 修正 Bessel 函数	90
* 4.5 可化为 Bessel 方程的方程	96
习题 4	98
第 5 章 Legendre 多项式	100
5.1 Legendre 方程与 Legendre 多项式的引出	100
5.2 Legendre 多项式的性质	103
5.3 Legendre 多项式的应用	109
* 5.4 关联 Legendre 多项式	115
* 5.5 其他特殊函数方程简介	119
习题 5	122
第 6 章 行波法与积分变换法	125
6.1 一维波动方程的 D'Alembert(达朗贝尔)公式	125

6.2	三维波动方程的 Poisson 公式	129
6.3	Fourier 积分变换法求解定解问题	137
6.4	Laplace 变换法求解定解问题	142
	习题 6	148
第 7 章	Green 函数法	151
7.1	引言	151
7.2	Poisson 方程的边值问题	152
7.3	Green 函数的一般求法	157
7.4	用电像法求某些特殊区域的 Dirichlet-Green 函数	160
	习题 7	164
*第 8 章	积分方程和非线性微分方程简介	166
8.1	积分方程的分类与解法	166
8.2	非线性微分方程及其某些解法	184
	习题 8	192
	部分习题答案及习题解答	195
附录 A	正交曲线坐标系中的 Laplace 算符	212
附录 B	Γ 函数的定义和基本性质	215
	参考文献	216

第1章 数学物理定解问题——典型方程和定解条件的导出

这一章将介绍数学物理方程的基本概念,典型方程的推导,定解条件的给出,定解问题的提法以及线性偏微分方程的分类与化简。

所谓数学物理方程,是指从物理学、工程科学与技术科学的实际问题中导出的,反映物理量之间关系的偏微分方程和积分方程。本章主要介绍几个典型的二阶偏微分方程:波动方程、热传导方程、Laplace 方程、Poisson 方程和 Helmholtz 方程等。下面以实例说明。

1.1 典型方程的推导

1.1.1 波动方程

1. 均匀弦的微小横振动

设有一根均匀柔软的细弦,平衡时沿直线拉紧,而且除了受不随时间变化的张力及弦本身的重力外,不受其他外力的作用。下面研究弦做微小横振动的规律。所谓“横向”是指全部运动出现在一个平面内,而且弦上的点沿垂直于 x 轴的方向运动(如图 1.1.1 所示)。所谓“微小”是指运动的幅度及弦在任意位置处切线的倾角都很小,以致它们的高于一次方的项可以忽略不计。

设弦上具有横坐标为 x 的点,在时刻 t 的位置为 M ,位移 NM 记为 u ,显然,在振动过程中位移 u 是变量 x 和 t 的函数,即 $u = u(x, t)$ 。现在来建立位移 u 满足的方程。采用微元法,我们把弦上点的运动先看成小弧段的运动,然后再考虑小弧

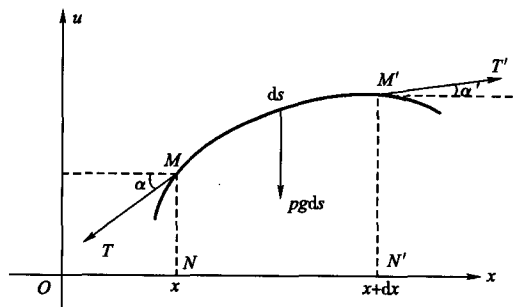


图 1.1.1

段趋于零的极限情况。在弦上任取一弧段 $\widehat{MM'}$, 其长为 ds , 设 ρ 是弦的线密度, 弧段 $\widehat{MM'}$ 两端所受的张力依次记作 T, T' 。由于假定弦是柔软的, 所以在任意点处张力的方向总是沿着弦在该点的切线方向。现在考虑弧段 $\widehat{MM'}$ 在 t 时刻的受力和运动情况。根据 Newton 第二定律, 作用于弧段上任一方向上力的总和等于这段弧的质量乘以该方向上的运动加速度。

在 x 方向弧段 $\widehat{MM'}$ 的受力总和为 $-T\cos\alpha + T'\cos\alpha'$, 由于弦只作横向运动, 所以

$$-T\cos\alpha + T'\cos\alpha' = 0 \quad (1.1.1)$$

按照上述所做的弦作微小振动的假设, 可知在振动过程中弦上 M 点与 M' 点处切线的倾角都很小, 即 $\alpha \approx 0, \alpha' \approx 0$, 从而由

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots$$

可知,当我们略去 α 和 α' 的所有高于一次方的各项时,就有

$$\cos\alpha \approx 1 \quad \cos\alpha' \approx 1$$

代入到式(1.1.1),便可近似得到

$$T = T'$$

在 u 方向弧段 $\widehat{MM'}$ 的受力总和为 $-T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g ds$, 其中 $-\rho g ds$ 是弧段 $\widehat{MM'}$ 的重力。又因为当 $\alpha \approx 0, \alpha' \approx 0$ 时

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}} \approx \tan\alpha = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

$$\sin\alpha' \approx \tan\alpha' = \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x}$$

$$ds = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]^2} dx \approx dx$$

设小弧段在时刻 t 沿 u 方向的加速度近似为 $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$, 小弧段的质量为 ρds , 由 Newton 第二运动定律, 有

$$-T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g ds = \rho ds \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.1.2)$$

或

$$T \left[\frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] - \rho g dx \approx \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx \quad (1.1.2')$$

式(1.1.2')右端方括号的部分是由于 x 产生 dx 的变化引起的 $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ 的改变量, 可以用微分近似代替, 即

$$\frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \approx \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] dx = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx$$

于是, 式(1.1.2')成为

$$\left[T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho g \right] dx \approx \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx$$

或

$$\frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + g$$

一般说来, 张力较大时弦振动的速度变化很快, 即 $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$ 要比 g 大得多, 所以又可以把 g 略去。这样, 经过逐步略去一些次要的量, 抓住主要的量, 在 $u(x, t)$ 关于 x 和 t 都是二次连续可微的前提下, 最后得出 $u(x, t)$ 应近似地满足方程

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.1.3)$$

这里 $a^2 = T/\rho$ 。式(1.1.3)称为弦振动方程,也称一维波动方程。

如果在振动过程中,弦上还另受到一个与弦的振动方向平行的外力作用,且假定在时刻 t 弦上 x 点处的外力密度为 $F(x, t)$,显然式(1.1.1)和式(1.1.2)分别为

$$-T\cos\alpha + T'\cos\alpha' = 0$$

$$Fds - T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho gds = \rho ds \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

重复上面的推导,可得有外力作用时弦的振动方程

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (1.1.4)$$

其中 $f(x, t) = \frac{1}{\rho}F(x, t)$,表示 t 时刻单位质量的弦在 x 点所受的外力。式(1.1.4)称为弦的强迫振动方程。

方程(1.1.3)和(1.1.4)的差别在于方程(1.1.4)的右端多了一个与未知函数 u 无关的项 $f(x, t)$,这个项称为自由项。包括有非零自由项的方程称为非齐次方程。自由项恒等于零的方程称为齐次方程。方程(1.1.3)为一维齐次波动方程,方程(1.1.4)为一维非齐次波动方程。

2. 均匀弹性杆的微小纵振动

一根弹性杆,如果其中任意小段受外界影响发生纵振动,必然使杆上与它相邻的部分发生伸长或缩短,这段杆的伸长或缩短又使与它相邻的部分产生伸长或缩短,以此类推,杆上任意小段的纵振动必然传播到整根杆。这种振动的传播就是波。

现在推导杆的纵振动方程。设杆的弹性模量(杆伸长单位长度所需要的力)为 E ,质量密度为 ρ ,作用于杆上的外力密度为 $F(x, t)$ 。

取 x 轴沿杆的轴线方向,以 $u(x, t)$ 表示 x 点、 t 时刻的纵向位移。使用微元法,考虑杆上的一小段 $[x, x + \Delta x]$ 的运动情况。以 $\sigma(x, t)$ 记杆上 x 点、 t 时刻的应力(杆在伸缩过程中各点相互之间单位截面上的作用力),其方向沿 x 轴,现在求杆上 x 点、 t 时刻的应变(相对伸长)。如图 1.1.2 所示, $A'B'$ 表示 AB 段(平衡位置)在 t 时刻所处的位置,则 AB 段的相对伸长是

$$\frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} \quad (1.1.5)$$

而 x 点的应变则是

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

由于振动是微小的(不超过杆的弹性限度),由 Hooke 定律有

$$\sigma(x, t) = E \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (1.1.6)$$

设杆的横截面为 S (设为常数),则由 Newton 第二定律, $[x, x + \Delta x]$ 段的运动方程是

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} \bigg|_{\xi=x+\theta_1 \Delta x} = \sigma(x + \Delta x, t)S - \sigma(x, t)S + F(x + \theta_2 \Delta x, t)S \Delta x$$

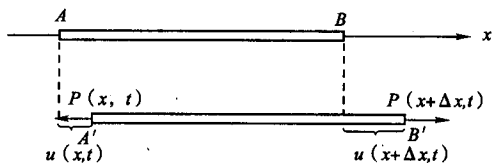


图 1.1.2 弹性杆的微小纵振动

$$\begin{aligned}
 &= ES \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x+\Delta x} - ES \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x} + F(x + \theta_2 \Delta x, t) S \Delta x \\
 &\approx ES \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=x} \Delta x + F(x + \theta_2 \Delta x, t) S \Delta x
 \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

其中常数 θ_1, θ_2 满足 $0 \leq \theta_i \leq 1$ ($i=1, 2$), 并利用了 Hooke 定律式, 而且将函数 $\frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x+\Delta x}$ 在 $\xi=x$ 处展开为泰勒级数并取了前两项。以 $S\Delta x$ 除上式的两端后, 令 $\Delta x \rightarrow 0$ 取极限, 得到

$$\rho u_{tt}(x, t) = Eu_{xx}(x, t) + F(x, t) \quad (1.1.8)$$

记

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho}$$

则方程最后变为

$$u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t)$$

这就是杆的纵振动方程, 也是一维波动方程。由以上两个例子可见, 不同物理过程中的规律, 可以用同一个数学物理方程来表示, 并且这种性质不只是存在于以上两个例子之间, 在以下的推导中, 我们还可以看到这种现象。正因为如此, 才有可能用一种物理现象去模拟另一种物理现象。

3. 传输线方程

对于直流电或低频的交流电, 电路的 Kirchhoff 定律指出同一支路中电流相等。但对于较高频率的电流(指频率未高到能显著地辐射电磁波的状况), 电路中导线的自感和电容效应不可忽略, 因而同一支路中电流可能不再相等。

现在考虑一来一往的高频传输线, 将它抽象成具有分布参数的导体(图 1.1.3), 我们来研究这种导体内电流流动的规律。在具有分布参数的导体中, 电流通过的情况, 可以用电流强度 I 与电压 V 来描述, 此处 I 与 V 都是 x, t 的函数, 记作 $I(x, t)$ 与 $V(x, t)$ 。以 R, L, C, G 分别表示下列参数:

- R ——每一回路单位的串联电阻;
- L ——每一回路单位的串联电感;
- C ——每单位长度的分路电容;
- G ——每单位长度的分路电导。

采用微元法, 根据 Kirchhoff 第二定律, 在长度为 Δx 的传输线中, 电压降应该等于电动势之和, 即

$$V - (V + \Delta V) = R\Delta x \cdot I + L\Delta x \cdot \frac{\partial I}{\partial t}$$

两边除以 Δx , 并且令 $\Delta x \rightarrow 0$ 取极限, 得

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -RI - L \frac{\partial I}{\partial t} \quad (1.1.9)$$

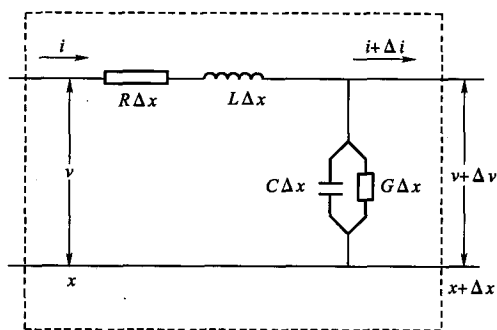


图 1.1.3

另外,由 Kirchhoff 第一定律,流入节点 x 的电流应该等于流出该节点的电流,即

$$I = (I + \Delta I) + C\Delta x \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + G\Delta x \cdot (V + \Delta V)$$

同样,等式两边除以 Δx ,并且令 $\Delta x \rightarrow 0$ 取极限,并注意 $\Delta x \cdot \Delta V$ 是高阶无穷小,忽略不计,得

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial V}{\partial t} - GV \quad (1.1.10)$$

将方程(1.1.9)与方程(1.1.10)合并,即得 I, V 应满足如下方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial x} + C \frac{\partial V}{\partial t} + GV = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x} + L \frac{\partial I}{\partial t} + RI = 0 \end{cases}$$

从这个方程组消去 V (或 I), 即可得到 I (或 V) 所满足的方程。例如,为了消去 V ,我们将方程(1.1.10)对 x 微分(假定 V 与 I 对 x, t 都是二次连续可微的),同时在方程(1.1.9)两端乘以 C 后再对 t 微分,并把两个结果相减,即得

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + G \frac{\partial V}{\partial x} - LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - RC \frac{\partial I}{\partial t} = 0$$

将方程(1.1.9)中的 $\frac{\partial V}{\partial x}$ 代入上式,得

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial I}{\partial t} + GRI \quad (1.1.11)$$

这就是电流 I 满足的微分方程。采用类似的方法从方程(1.1.9)与方程(1.1.10)中消去 I 可得电压 V 满足的方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial V}{\partial t} + GRV \quad (1.1.12)$$

方程(1.1.11)或方程(1.1.12)称为传输线方程。

根据不同的具体情况,对参数 R, L, C, G 作不同的假定,就可以得到传输线方程的各种特殊形式。例如,在高频传输的情况下,电导与电阻所产生的效应可以忽略不计,也就是说可令 $G = R = 0$, 此时方程(1.1.11)与方程(1.1.12)可以分别简化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} &= \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \end{aligned}$$

这两个方程称为高频传输线方程。

若令 $a^2 = \frac{1}{LC}$, 这两个方程与方程(1.1.3)完全相同。从而再一次表明,同一个方程可以用来描述不同的物理现象。

一维波动方程只是波动方程中最简单的情况,在流体力学、声学及电磁场理论中,还要研究高维的波动方程。

4. 电磁场方程

从物理学我们知道,电磁场的特性可以用电场强度 E 与磁场强度 H 以及电感应强度 D

与磁感应强度 $\mathbf{B}$ 来描述。联系这些量的 Maxwell 方程组为

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.1.13)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1.14)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.1.15)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (1.1.16)$$

式中 $\mathbf{J}$ 为传导电流的面密度; ρ 为电荷的体密度。

这组方程还必须与下述场的物质方程

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (1.1.17)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.1.18)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.1.19)$$

相联立, 其中 ε 是介质的介电常数, μ 是导磁率, σ 为导电率。我们假定介质是均匀而且是各向同性的, 此时 ε, μ, σ 均为常数。

方程(1.1.13)与方程(1.1.14)都同时包含有 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{H}$, 从中消去一个变量, 就可以得到关于另一个变量的微分方程。例如先消去 $\mathbf{H}$, 在方程(1.1.13)两端求旋度(假定 $\mathbf{H}, \mathbf{E}$ 都是二次连续可微的)并利用方程(1.1.17)与方程(1.1.19)得

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \sigma \operatorname{rot} \mathbf{E}$$

将方程(1.1.14)与方程(1.1.18)代入上式得

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

由公式 $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H}$, 及 $\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, 代入上式后得到 $\mathbf{H}$ 所满足的方程

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

这里 ∇^2 称为 Laplace 算子或 Laplace 算符。在三维直角坐标系中, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, 在二维直角坐标系中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 。

同理, 从方程(1.1.13)与方程(1.1.14)中消去 $\mathbf{H}$, 即得到 $\mathbf{E}$ 所满足的方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

如果介质不导电($\sigma = 0$), 则上面两个方程简化为

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon \mu} \nabla^2 \mathbf{H} \quad (1.1.20)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon \mu} \nabla^2 \mathbf{E} \quad (1.1.21)$$

方程(1.1.20)与方程(1.1.21)称为(矢量形式的)三维波动方程。

若取 $\mathbf{E}$ 或 $\mathbf{H}$ 的任一分量为 u , 则可将上述三维波动方程以标量函数的形式表示出来, 即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1.1.22)$$

其中 $a^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$, u 是 E (或 H) 的任意一个分量。方程(1.1.22)是标量形式的三维波动方程。

1.1.2 热传导方程和扩散方程

1. 热传导方程

常识告诉我们,热量具有从温度高的地方向温度低的地方流动的性质,即一块热的物体,如果体内每一点的温度不全一样,则在温度较高点处的热量就要向温度较低点处流动,这种现象就是热传导。由于热量的传导过程总是表现为温度随时间和点的位置的变化,所以,解决热传导问题都要归结为求物体内部温度的分布。现在我们来推导均匀且各向同性的导热体在传热过程中温度所满足的微分方程。与上例类似,我们不是先讨论一点处的温度,而是先考虑一个区域的温度。为此,采用微元法,在物体中任取一个闭曲面 S , 它所包围的区域记作 V (图 1.1.4)。假设在时刻 t 、区域 V 内点 $M(x, y, z)$ 处的温度为 $u(x, y, z, t)$, $\mathbf{n}$ 为曲面元素 ΔS 的法向(从 V 内指向 V 外)。

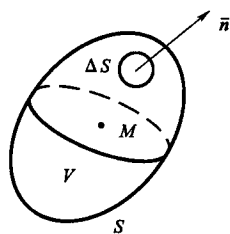


图 1.1.4

由传热学中的 Fourier 实验定律可知,物体在无穷小时间段 dt 内,流过一个无穷小面积 dS 的热量 dQ 与时间 dt 、曲面面积 dS 以及物体温度 u 沿曲面 dS 的法线方向的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 三者成正比,即

$$dQ = -k \frac{\partial u}{\partial n} dS dt = -k (\text{grad} u)_n dS dt = -k \text{grad} u \cdot d\mathbf{S} dt$$

其中 $k = k(x, y, z)$ 称为物体的热传导系数。当物体为均匀且各向同性的导热体时, k 为常数。负号是由于热量的流向和温度梯度的正向,即 $\text{grad} u$ 的方向相反而产生的。这就是说 $\frac{\partial u}{\partial n} = \text{grad} u \cdot \mathbf{n} > (<) 0$ 时,物体的温度沿 $\mathbf{n}$ 的方向增加(减小),而热流方向却与此相反,故沿 $\mathbf{n}$ 的方向通过曲面的热量应该是负(正)的。

利用上面的关系,从时刻 t_1 到时刻 t_2 ,通过曲面 S 流入区域 V 的全部热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\iint_S k \text{grad} u \cdot d\mathbf{S} \right] dt$$

流入的热量使 V 内温度发生了变化,在时间间隔 $[t_1, t_2]$ 内区域 V 内各点温度从 $u(x, y, z, t_1)$ 变化到 $u(x, y, z, t_2)$, 则在 $[t_1, t_2]$ 时间间隔内,体积 V 内温度升高所需要的热量为

$$Q_2 = \iiint_V c\rho [u(x, y, z, t_1) - u(x, y, z, t_2)] dV$$

其中, c 为物体的比热(即单位质量的物体升高单位温度所需要的热量), ρ 为物体的密度。对各向同性的物体来说,它们都是常数。

由于热量守恒,流入的热量应等于物体温度升高所需吸收的热量,即

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\iint_S k \text{grad} u \cdot d\mathbf{S} \right] dt = \iiint_V c\rho [u(x, y, z, t_1) - u(x, y, z, t_2)] dV$$

此式左端的曲面积分中 S 是闭曲面。假设函数 u 关于 x, y, z 具有二阶连续偏导数, 关于 t 具有一阶连续偏导数, 可以利用 Gauss 公式将它化为三重积分, 即

$$\iint_S k \text{grad} u \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V k \text{div}(\text{grad} u) dV = \iiint_V k \nabla^2 u dV$$

同时, 右端的体积分可以写成

$$\iiint_V c\rho \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt \right) dV = \int_{t_1}^{t_2} \left(\iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV \right) dt$$

因此有

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\iiint_V k \nabla^2 u dV \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV \right) dt \quad (1.1.23)$$

由于时间间隔 $[t_1, t_2]$ 及区域 V 都是任意取的, 并且被积函数是连续的, 所以式(1.1.23)左右恒等的条件是它们的被积函数恒等, 即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1.1.24)$$

其中 $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ 。方程(1.1.24)称为三维热传导方程。

若物体内有热源, 其强度为 $F(x, y, z, t)$, 则相应的热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t) \quad (1.1.25)$$

其中 $f = \frac{F}{c\rho}$ 。

作为特例, 如果所考虑的物体是一根细杆(或一块薄板), 或者即使不是细杆(或薄板), 而其中的温度 u 只与 x, t (或 x, y, t) 有关, 则方程(1.1.24)就变成一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1.26)$$

或二维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1.1.27)$$

2. 扩散方程

物质因空间浓度不均匀而从浓度高的地方向浓度低的地方运动, 这种现象称为扩散。选择物质的浓度 $u(x, y, z, t)$ 作为描写扩散现象的特征物理量, 浓度的不均匀性用浓度的梯度 $\text{grad} u$ 来表征。扩散现象的强弱用扩散流强度 $\mathbf{q}$ (单位时间通过单位截面的物质流量) 来描述。扩散满足如下规律: 浓度的不均匀程度和由此引起的扩散现象的强弱之间的关系为

$$\mathbf{q} = -k \text{grad} u \quad (1.1.28)$$

或写成分量形式

$$\begin{aligned}
 q_1 &= -k \frac{\partial u}{\partial x} = -ku_x \\
 q_2 &= -k \frac{\partial u}{\partial y} = -ku_y \\
 q_3 &= -k \frac{\partial u}{\partial z} = -ku_z
 \end{aligned} \tag{1.1.28'}$$

其中 q_1 、 q_2 和 q_3 分别表示 q 沿 x 、 y 和 z 方向的分量。 k 是扩散系数,不同的物质扩散系数不同。负号表示扩散转移的方向(浓度减少的方向)与浓度梯度(浓度增大的方向)相反。

现在应用扩散规律方程(1.1.28)或方程(1.1.28')来研究浓度在空间中的分布和在时间中的变化。在空间中任取一个微小六面体,位于 x 和 $x+dx$, y 和 $y+dy$,以及 $z+dz$ 之间,如图 1.1.5 所示,这个平行六面体内浓度的变化取决于扩散流强度 q 是向它汇聚或从它发散,也就是取决于穿过它的表面的流量。

现在假设扩散只沿 x 方向进行,扩散流并不穿过前后和上下四面,而只穿过左右两面。设 $q_1|_x dydz$ 从左面流入, $q_1|_{x+dx} dydz$ 从右面流出,因此通过左右两面的净流量是

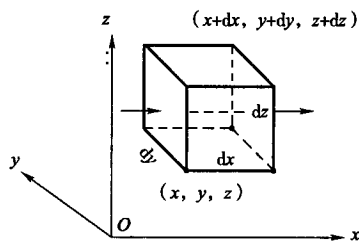


图 1.1.5

$$Q_1 = -(q_1|_{x+dx} - q_1|_x) dydz = -\frac{\partial q_1}{\partial x} dx dydz$$

将扩散规律方程(1.1.28')的第一式代入,得

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial x}(ku_x) dx dydz$$

如果小六面体中没有源和汇(即这种物质的原子或分子既不从其他物质转化出来也不转化成其他物质),则浓度对时间的变化率为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{Q_1(\text{净流量})}{dx dy dz} = \frac{\partial(ku_x)}{\partial x} \tag{1.1.29}$$

这就是一维扩散方程。如果扩散系数在空间中是均匀的,则扩散方程(1.1.29)简化成为 $u_t = ku_{xx}$ 。如果引入记号 $a^2 = k$,则一维扩散方程就成为

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{1.1.30}$$

这和一维热传导方程(1.1.26)是一样的。

如果考虑空间 x 、 y 、 z 三个方向都有扩散发生,如同计算通过左右两面的流量一样,计算通过前后和上下四面的流量,而通过小六面体的总流量是通过六个面的流量之和,则方程(1.1.30)成为三维扩散方程

$$u_t - \left[\frac{\partial(ku_x)}{\partial x} + \frac{\partial(ku_y)}{\partial y} + \frac{\partial(ku_z)}{\partial z} \right] = 0 \tag{1.1.31}$$

如果扩散系数在空间是均匀的,则方程(1.1.31)变为

$$\begin{aligned}
 u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) &= 0 \\
 \text{即 } u_t - a^2 \nabla^2 u &= 0
 \end{aligned} \tag{1.1.32}$$

这个方程与三维热传导方程(1.1.24)是一样的。

在这里我们简单介绍一下源和汇的问题。假设所研究的物质具有放射性,退变的半衰期

是 β ,则单纯由退变所导致的浓度的时间变化率为 $-\frac{\ln 2}{\beta}u$,这样一维和三维的扩散方程(1.1.30)和方程(1.1.32)应分别修改为

$$u_t - a^2 u_{xx} + \frac{\ln 2}{\beta} u = 0$$

和

$$u_t - a^2 \nabla^2 u + \frac{\ln 2}{\beta} u = 0$$

又如所研究的物质由于链式反应而增值,浓度的增值时间变化率为 $b^2 u$,这样一维和三维的扩散方程(1.1.30)和方程(1.1.32)应分别修改为

$$u_t - a^2 u_{xx} - b^2 u = 0$$

和

$$u_t - a^2 \nabla^2 u - b^2 u = 0$$

1.1.3 Poisson 方程和 Laplace 方程

1. 静电场方程

现在从方程(1.1.16)与方程(1.1.17)推导出静电场的电位所满足的微分方程。将方程(1.1.17)代入方程(1.1.16),得

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho$$

而电场强度 $\mathbf{E}$ 与电位 u 之间存在关系

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} u$$

于是有

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

而 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \nabla^2 u$,于是静电场的电位满足

$$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (1.1.33)$$

这个非齐次方程叫做 Poisson 方程。

如果静电场是无源的,即 $\rho = 0$,则方程(1.1.33)变成

$$\nabla^2 u = 0 \quad (1.1.34)$$

这个方程叫做 Laplace 方程,即无源静电场的电势满足 Laplace 方程。

2. 稳定温度场方程

在热传导问题中,如果物体内部不存在热源,物体周围的环境温度不随时间变化,则经过相当长时间以后,物体内部各点处的温度将不随时间变化,趋于稳定状态,这时 $u_t = 0$,热传导方程(1.1.24)变成 Laplace 方程

$$\nabla^2 u = 0$$

既稳定温度场也满足 Laplace 方程。

1.1.4 Helmholtz 方程

下面的方程