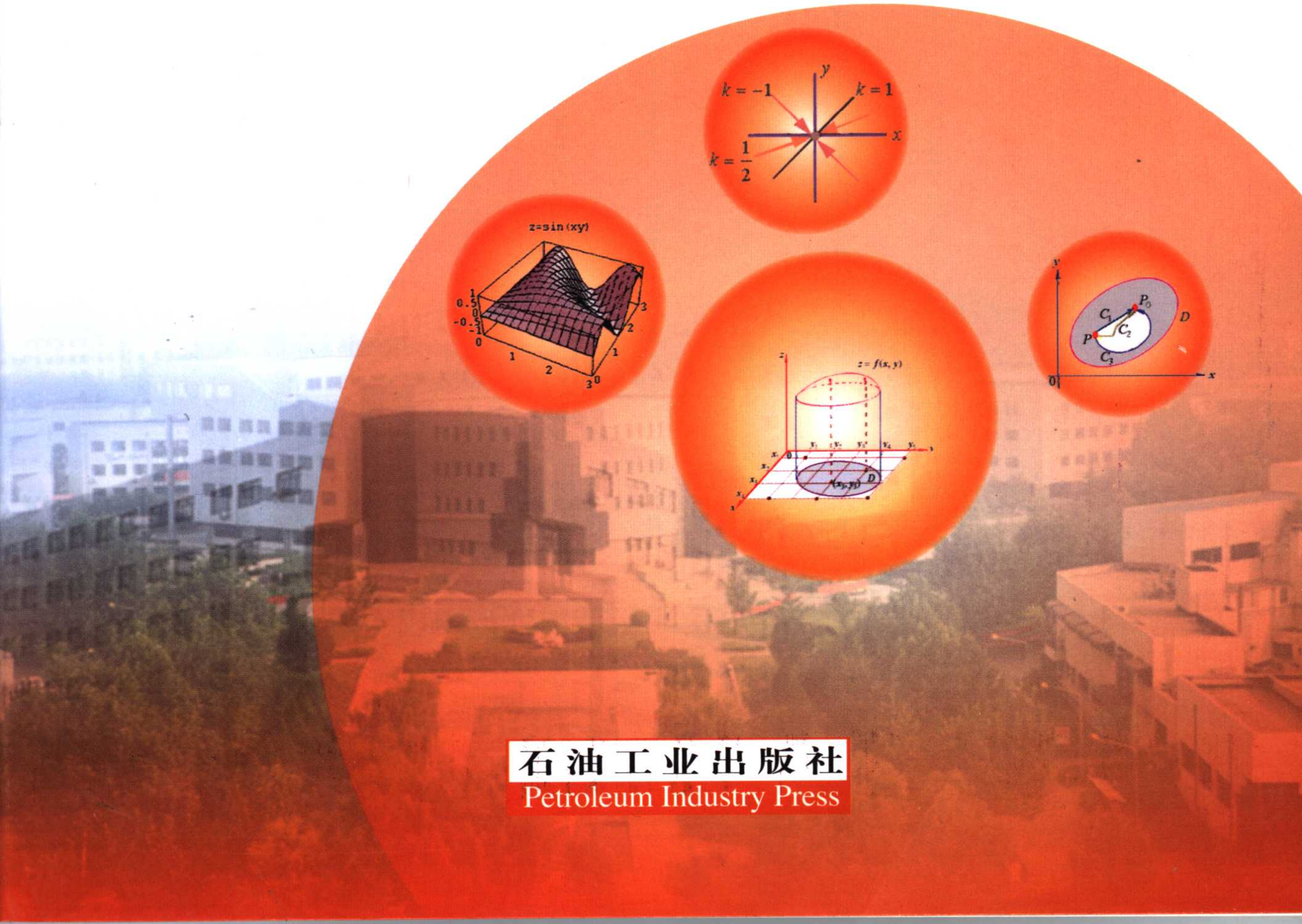
石油高职高专规划教材

高等数学

（下册）

李曰玮　主编



石油工业出版社
Petroleum Industry Press

石油高职高专规划教材

高　等　数　学

（下　册）

李曰玮　主编

石油工业出版社

内 容 提 要

本书根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学基础课程教学基本要求》，并结合石油行业高职高专院校专业特点编写而成。主要内容包括线性代数、拉普拉斯变换、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分学及数学软件包的应用。

本书可作为石油、化工等行业高等职业学校、高等专科学校、成人高校理工类专业的教材，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下册/李曰玮主编.
北京：石油工业出版社，2007.10
石油高职高专规划教材
ISBN 978-7-5021-6275-7

Ⅰ. 高…
Ⅱ. 李…
Ⅲ. 高等数学-高等学校：技术学校-教材
Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 154427 号

出版发行：石油工业出版社
（北京安定门外安华里 2 区 1 号 100011）
网 址：www.petropub.com.cn
发行部：（010）64523620
编辑部：（010）64523546
经 销：全国新华书店
印 刷：中国石油报社印刷厂

2007 年 10 月第 1 版 2007 年 10 月第 1 次印刷
787×1092 毫米 开本：1/16 印张：12.25
字数：314 千字

定 价：20.00 元
（如出现印装质量问题，我社发行部负责调换）

前　言

本教材根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学基础课程教学基本要求》及石油行业高职高专院校专业特点编写而成，可作为石油、化工等行业高等职业学校、高等专科学校、成人高校理工类专业的教材，也可供工程技术人员参考。

高等数学是石油等各行业高职高专院校各专业必修的一门重要的基础课程。它对培养提高学生的思维素质、创新能力、科学精神、治学态度以及用数学知识解决实际问题的能力都有非常重要的作用。学好高等数学不但是学好其他课程的前提，也是石油等行业工程技术人员所必须具备的基本素质。

经过多年的教学研究与实践，我们认识到石油行业高职高专院校的数学教育必须培养如下三方面的能力：一是用数学思想、概念、方法消化、吸收工程概念和工程原理的能力；二是把实际问题转化为数学模型的能力，结合数学建模突出“以应用为目的，突出石油特色、工科特色，以必需够用为度”的教学原则，加强对读者应用意识、兴趣、能力的培养；三是突出数学概念与实际问题的联系，结合高职高专的特点，适度淡化深奥的数学理论，强调了几何说明，结合具体内容进行数学建模训练，注重双向翻译能力的培养，进而升华为求解数学模型的能力。

本教材以培养学生的“创造能力和应用能力”为指导思想，把学生应用数学意识的培养贯穿于教材的始终，让学生学得生动活泼，使师生素质教育跃上一个新的高度。

本教材力求在实施素质教育的理论与实践研究上从定性、定量上进一步优化，并在部分专业上进行应用，突出石油行业特色，其最终目的是要探索出一套符合中国国情、中国特色的高职数学建模的理论体系（通过问题讨论，培养创新能力；通过问题的引申，培养创造能力；通过问题背景，培养创新能力；通过挖掘内部条件，培养创新能力），以数学建模为手段，激发读者学习数学的积极性，学会团结协作，建立良好的人际关系，培养相互合作的工作能力。以数学建模的方法为载体，使读者获得适应未来社会生活和进一步发展必需的重要数学事实（包括数学知识、数学活动经验）以及基本思想方法和应用技能。

本教材让读者变苦读为巧读，融会贯通课本知识，让读者对所学知识进行规律性的把握和思维能力的培养，让学生在社会主义市场经济条件下成为具有综合能力、素质的复合型人才。

本书的构架结构安排、统稿、定稿由史金海（河北石油职业技术学院）、李曰玮（渤海石油职业学院）承担，上册主编史金海，副主编黄杰（克拉玛依职业技术学院）、窦连江（天津工程职业技术学院），主审李晓民（河北石油职业技术学院）；下册主编李曰玮，副主编齐万春（天津石油职业技术学院），主审臧爱珍（天津石油职业技术学院）。参加高等数学（下册）编写的有：天津石油职业技术学院齐万春，渤海石油职业学院李曰玮、李文国、刘瑞楼、孔琳玲、窦连江。其中齐万春编写第一章、第二章，李曰玮、李文国、刘瑞楼编写第三章，齐万春、李曰玮编写第四章，李曰玮、孔琳玲、刘瑞楼编写第五章，窦连江编写第

六章。本书的编写得到了各参编院校领导的大力支持和帮助，在此我们一并表示衷心的感谢。

由于编者经验不足，水平有限，书中问题在所难免，敬请读者和同行指正。

编者

2007 年 8 月

目　　录

第一章 线性代数

在自然科学和工程技术中，有许多问题中的变量之间是线性关系，而行列式和矩阵是研究线性代数的重要工具. 本章主要讨论 n 阶行列式的性质和计算、矩阵及其运算、逆矩阵、矩阵的秩和求解线性方程组.

第一节 行列式的概念和性质

一、二阶、三阶行列式

定义 1 由 2^2 个数构成的记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为二阶行列式，并且规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

等式右端叫做二阶行列式的展开式.

例 1 $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 3\times5-2\times(-4)=23$.

定义 2 由 3^2 个数构成的记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为三阶行列式，并用对角线法则定义，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

等式右端叫做三阶行列式的展开式.

三阶行列式的值等于各实线上三个元素的乘积之和减去各虚线上三个元素的乘积之和，如图 1–1 所示.

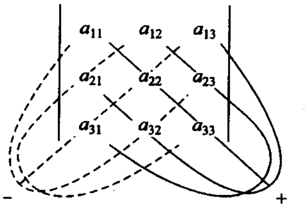


图 1–1

例 2 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 的值.

解 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\times3\times3+(-1)\times0\times2+2\times2\times(-4)-$

$$(-1)\times3\times(-4)-1\times2\times2-2\times0\times3=-23.$$

二、n 阶行列式

定义 3 由 n^2 个数构成的记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，称为 n 阶行列式，其中 a_{ij} 表示 n 阶行列式的第 i 行第 j 列的元素 $(i,j=1,2,\cdots,n)$.

当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

行列式左上角至右下角的对角线称为行列式的主对角线，主对角线上的元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为主对角元素. 由行列式右上角至左下角的对角线称为行列式的次对角线，次对角线上的元素 $a_{1n},a_{2n-1},\cdots,a_{n1}$ 称为次对角元素.

注意：对角线法则只适用于二阶、三阶行列式的展开. 要计算 n 阶行列式，先给出几个概念.

定义 4 在 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中，去掉 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 所在的第 i 行与第 j 列，余下的（$n-1$）阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$，称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

例 3 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$，求 M_{23}，A_{23}.

解 在 D 中去掉元素 a_{23} 即 5 所在的第二行与第三列后即得

$$M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-16，A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=16.$$

三、行列式的性质

应用行列式的性质，可以简化行列式的计算.

定义 5 将行列式 D 的行与同序号的列互换后所得行列式，称为 D 的转置行列式，记为

D^{T}. 即如果 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

性质 1　将行列式转置，行列式的值不变，即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

例 4　$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=D^{\mathrm{T}}$.

性质 1 说明，行列式中行与列的地位一样，所以，凡是对行成立的性质，对列也成立.

性质 2　行列式 D 等于它的任意一行（或列）的所有元素与其各自的代数余子式乘积之和，即 $D=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}$ 或 $D=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}$.其中 $i,j=1,2,\cdots,n$. 即行列式可以按任意一行（或列）展开.

例 5　设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

（1）将 D 按第一行展开，并计算 D 的值；

（2）将 D 按第二列展开，并计算 D 的值.

解　（1）将 D 按第一行展开，即

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=1\times(-1)^2M_{11}+2\times(-1)^3M_{12}+4\times(-1)^4M_{13}$$
$$=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=18.$$

（2）将 D 按第二列展开，即

$$D=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}=2\times(-1)^3M_{12}+0\times(-1)^4M_{22}+4\times(-1)^5M_{32}$$
$$=-2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=18.$$

可见，选择有零元素的行或列展开计算量小.

性质 3　用数 k 乘行列式的某一行（或列）的所有元素，等于用数 k 乘此列式.

例如 $\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

即行列式的某一行（或列）的公因子可以提到行列式外面.

例如 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -5 & -10 & -15 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-5\times3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-45$.

用 r_i 表示行列式的第 i 行，c_i 表示第 i 列，第 i 行（或列）乘以数 k 记作

$$r_i\times k\ （或 c_i\times k）.$$

由性质 3 可得如下推论：

推论 1 如果行列式的某一行（或列）的所有元素都是零，则行列式的值为零.

性质 4 如果行列式的某一行（或列）的所有元素都可以写成两数之和，则该行列式可以写成两个行列式的和.

例如
$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2 & a_{13}+b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

性质 5 如果行列式中两行（或列）对应元素完全相同，那么行列式的值为零.

例如
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3 - b_1a_2a_3 - a_1b_2a_3 - a_1a_2b_3 = 0.$$

由性质 3 和性质 5，可得如下推论：

推论 2 如果行列式中某两行（或列）对应元素成比例，那么行列式的值为零.

性质 6 将行列式某一行（或列）的所有元素都乘以数 k 后对应加到另一行（或列）的元素上，行列式的值不变.

例如
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1+ka_1 & b_2+ka_2 \end{vmatrix} = a_1(b_2+ka_2) - a_2(b_1+ka_1)$$
$$= a_1b_2 - a_2b_1 + k(a_1a_2 - a_1a_2) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

用数 k 乘以第 i 行（或列）加到第 j 行（或列）记作 $r_j + kr_i$（或 $c_j + kc_i$）.

由性质 3 和性质 6，可得行列式的如下性质：

性质 7 交换行列式的任意两行（或列），行列式的值变号.

例如
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = -(b_1a_2 - a_1b_2) = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}.$$

交换 i，j 两行（或列）记作 $r_i \leftrightarrow r_j$（或 $c_i \leftrightarrow c_j$）.

例 6 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 的值.

解 由于 D 的第四列有两个零元素，所以由性质 6 将第四列化为只有一个非零元素，再按第四列展开.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)^5\begin{vmatrix}-3&2&-3\\2&3&1\\-1&2&1\end{vmatrix}\xlongequal[c_3+c_1]{c_2+2c_1}-\begin{vmatrix}-3&-4&-6\\2&7&3\\-1&0&0\end{vmatrix}$$

$$=-(-1)\times(-1)^4\begin{vmatrix}-4&-6\\7&3\end{vmatrix}=30.$$

下列三种形式的行列式分别称为**上三角行列式**、**下三角行列式**和**对角行列式**，它们的值都等于主对角线上所有元素的乘积.

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

其中上三角行列式和下三角行列式统称为**三角行列式**.

例 7 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a&a\\a&x&a&\cdots&a&a\\a&a&x&\cdots&a&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\a&a&a&\cdots&x&a\\a&a&a&\cdots&a&x\end{vmatrix}$ 的值.

解

$$D_n=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a&a\\a&x&a&\cdots&a&a\\a&a&x&\cdots&a&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\a&a&a&\cdots&x&a\\a&a&a&\cdots&a&x\end{vmatrix}\xlongequal[c_1+c_n]{\substack{c_1+c_2\\c_1+c_3\\\vdots}}\begin{vmatrix}x+(n-1)a&a&a&\cdots&a&a\\x+(n-1)a&x&a&\cdots&a&a\\x+(n-1)a&a&x&\cdots&a&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\x+(n-1)a&a&a&\cdots&x&a\\x+(n-1)a&a&a&\cdots&a&x\end{vmatrix}$$

$$
\begin{array}{l} r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ \cdots \\ \underline{\underline{r_n - r_1}} \end{array}
\begin{vmatrix}
x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & a \\
0 & x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a
\end{vmatrix} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}
$$

$$
=(x+na-a)(x-a)^{n-1}.
$$

第二节　克莱姆法则

含有 n 个方程的 n 元线性方程组的一般形式为

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad\qquad \cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}, \tag{1}
$$

其中 x_j（$j=1,2,\cdots,n$）为未知量，a_{ij}（$i,j=1,2,\cdots,n$）称为线性方程组的系数，$b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为常数项.

由系数 a_{ij} 组成的 n 阶行列式

$$
D=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix},
$$

称为线性方程组（1）的系数行列式.

定理（克莱姆法则） 若线性方程组（1）的系数行列式 $D\neq 0$，则方程组（1）有唯一解 $x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2\cdots,n)$，其中行列式 D_j 是把 D 中的第 j 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 换成方程组（1）的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 后得到的行列式.

例 1　解线性方程组

$$
\begin{cases}
2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\
x_1 - 3x_2 \qquad\quad - 6x_4 = 9 \\
\qquad 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\
x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0
\end{cases}.
$$

解　因为方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_2]{r_1-2r_2}\begin{vmatrix}0&7&-5&13\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\0&7&-7&12\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}7&-5&13\\2&-1&2\\7&-7&12\end{vmatrix}\xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2}-\begin{vmatrix}-3&-5&3\\0&-1&0\\-7&-7&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&3\\-7&-2\end{vmatrix}=27\neq0.$$

所以方程组有唯一解，又因为

$$D_1=\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\9&-3&0&-6\\-5&2&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}=81,\quad D_2=\begin{vmatrix}2&8&-5&1\\1&9&0&-6\\0&-5&-1&2\\1&0&-7&6\end{vmatrix}=-108,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&1&8&1\\1&-3&9&-6\\0&2&-5&2\\1&4&0&6\end{vmatrix}=-27,\quad D_4=\begin{vmatrix}2&1&-5&8\\1&-3&0&9\\0&2&-1&-5\\1&4&-7&0\end{vmatrix}=27.$$

所以，$x_1=\dfrac{D_1}{D}=3,\quad x_2=\dfrac{D_2}{D}=-4,\quad x_3=\dfrac{D_3}{D}=-1,\quad x_4=\dfrac{D_4}{D}=1$.

如果线性方程组（1）的常数项均为零，即

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\qquad\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases},\tag{2}$$

则方程组（2）称为齐次线性方程组. 此时 $D_j=0(j=1,2,\cdots,n)$, 若方程组（2）的系数行列式 $D\neq0$，则由克莱姆法则得到它有唯一解

$$x_j=0\quad j=1,2,\cdots,n.$$

全部由零组成的解称为零解. 于是便得如下结论：

推论 1 若齐次线性方程组（2）的系数行列式 $D\neq0$，则方程组只有零解.

推论 2 齐次线性方程组（2）有非零解的必要条件是系数行列式 $D=0$.

例 2 若齐次线性方程组 $\begin{cases}(\lambda+3)x_1+14x_2+2x_3=0\\-2x_1+(\lambda-8)x_2-x_3=0\\-2x_1-3x_2+(\lambda-2)x_3=0\end{cases}$ 有非零解，求 λ 的值.

解 若方程组有非零解，由推论 2，必有系数行列式的值等于零. 而

$$D=\begin{vmatrix}\lambda+3 & 14 & 2\\ -2 & \lambda-8 & -1\\ -2 & -3 & \lambda-2\end{vmatrix}\xlongequal{c_1-2c_3}\begin{vmatrix}\lambda-1 & 14 & 2\\ 0 & \lambda-8 & -1\\ 2-2\lambda & -3 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+2r_1}\begin{vmatrix}\lambda-1 & 14 & 2\\ 0 & \lambda-8 & -1\\ 0 & 25 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-8 & -1\\ 25 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)^2=0.$$

即当方程组有非零解时，$\lambda=1$或$\lambda=3$.

第三节　矩阵的概念及运算

一、矩阵的概念

1. 矩阵的定义

定义 1　由$m\times n$个数$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$排成的$m$行$n$列的数表

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

称为m行n列**矩阵**，简称$m\times n$矩阵，矩阵常用大写字母$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$,$\cdots$表示，也可记为$(a_{ij})_{m\times n}$. 其中a_{ij}称为矩阵第i行第j列的元素，如上所述矩阵可以记作$\boldsymbol{A}$或$\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

当$m=n$时，称$\boldsymbol{A}$为n阶矩阵或n阶方阵，n阶方阵的左上角到右下角的对角线称为主对角线，主对角线上的元素$a_{11},a_{22},\cdots,a_{mn}$叫做主对角元素.

2. 几种特殊的矩阵

当$m=1$或$n=1$时，矩阵只有一行或只有一列，即

$$\boldsymbol{A}=(a_{11}\quad a_{12}\quad\cdots\quad a_{1n})\text{或}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{bmatrix}.$$

所有元素都是零的$m\times n$矩阵，称为**零矩阵**，记作$\mathbf{0}$.

如果n阶矩阵主对角线以外的元素全为零，则称矩阵为**对角形矩阵**，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}.$$

主对角线上元素都是 1 的对角形矩阵称为**单位矩阵**，记作$\boldsymbol{E}$或$\boldsymbol{I}$. 例如$\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$是

3 阶单位矩阵.

把矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的各元素变号得到的矩阵，称为 A 的**负矩阵**，记为 $-A$，即

$$-A=(-a_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix}-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn}\end{bmatrix}.$$

3. 矩阵的相等

如果两个 $m\times n$ 矩阵 $A_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $B_{m\times n}=(b_{ij})_{m\times n}$，对应位置上的元素相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，则称矩阵 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

二、矩阵的运算

1. 矩阵的加法与减法

定义 2 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，把 A、B 对应位置上的元素相加得到的 m 行 n 列矩阵，称为矩阵 A 与 B 的和，记为 $A+B$. 即

$$A+B=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

例 1 现有某种物资（单位：吨）要从 3 个产地 a_i $(i=1,2,3)$ 运往 4 个销地 b_j $(j=1,2,3,4)$，两次调运方案分别为矩阵 A 和矩阵 B，即

$$A=\begin{array}{c}\\ a_1\\ a_2\\ a_3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}b_1 & b_2 & b_3 & b_4\end{array}\\ \begin{bmatrix}25 & 20 & 12 & 0\\ 17 & 0 & 13 & 18\\ 0 & 10 & 15 & 20\end{bmatrix}\end{array},\quad B=\begin{array}{c}\\ a_1\\ a_2\\ a_3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}b_1 & b_2 & b_3 & b_4\end{array}\\ \begin{bmatrix}18 & 15 & 20 & 30\\ 20 & 18 & 17 & 0\\ 23 & 15 & 0 & 10\end{bmatrix}\end{array}.$$

则两次调运后从各产地运往各销地的物资调运量（单位：吨）共为

$$A+B=\begin{bmatrix}25 & 20 & 12 & 0\\ 17 & 0 & 13 & 18\\ 0 & 10 & 15 & 20\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}18 & 15 & 20 & 30\\ 20 & 18 & 17 & 0\\ 23 & 15 & 0 & 10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}25+18 & 20+15 & 12+20 & 0+30\\ 17+20 & 0+18 & 13+17 & 18+0\\ 0+23 & 10+25 & 15+0 & 20+10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}43 & 35 & 32 & 30\\ 37 & 18 & 30 & 18\\ 23 & 35 & 15 & 30\end{bmatrix}.$$

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，由矩阵加法运算和负矩阵概念，则称 $A-B=A+(-B)=(a_{ij})_{m\times n}+(-b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 A 与 B 的差.

例 2 设 $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & 4 & 5\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-3 & 2 & -4\\ 1 & 5 & -2\end{bmatrix}$，求 $A-B$.

解 $A-B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & 4 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3 & 2 & -4\\ 1 & 5 & -2\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2+3 & 1-2 & 0+4\\ -3-1 & 4-5 & 5+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -1 & 4\\ -4 & -1 & 7\end{bmatrix}.$$

矩阵的加、减法满足下列运算律.

设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{0}$都是$m\times n$矩阵，则：

（1）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.　　（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

（3）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}$.　　（4）$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$.

2. 数与矩阵的乘法

定义3　设k是任意实数，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，用数$k$乘矩阵$\boldsymbol{A}$的每一个元素所得到的矩阵，称为数$k$与矩阵$\boldsymbol{A}$的乘积，记为$k\boldsymbol{A}$，即$k\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$.

注意：（1）用数k乘矩阵$\boldsymbol{A}$是用k乘$\boldsymbol{A}$的所有元素，而用数k乘行列式是用k乘行列式的某一行（或列）的所有元素.

（2）一个数k乘n阶矩阵$\boldsymbol{A}$后取行列式，其值等于k的n次幂乘$\boldsymbol{A}$的行列式，不等于k乘$\boldsymbol{A}$的行列式，即$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$. $|k\boldsymbol{A}|=k|\boldsymbol{A}|$是常犯的错误.

例3　设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求$3\boldsymbol{A}$，$3|\boldsymbol{A}|$，$|3\boldsymbol{A}|$.

解　$3\boldsymbol{A}=3\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 12 & 6 & -6 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，

$$3|\boldsymbol{A}|=3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-48，\quad |3\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 12 & 6 & -6 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-432.$$

数与矩阵的乘法满足下列运算律.

设矩阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$都是$m\times n$矩阵，k、l是数，则：

（1）$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$.　　（2）$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$.

（3）$(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})=l(k\boldsymbol{A})$.　　（4）$1\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

3. 矩阵的乘法

某城市甲、乙两家商场同时销售a、b、c三种品牌的家用电器，用矩阵$\boldsymbol{A}$表示各商场销售这三种家电的每日平均销售量（单位：台），用矩阵$\boldsymbol{B}$表示三种家电的单位售价和利润（单位：千元）

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 15 & 20 & 11 \\ 18 & 15 & 20 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} 甲 \\ 乙 \end{array}，\quad \boldsymbol{B}=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 单价 & 利润 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 0.5 \\ 7 & 0.9 \\ 6 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}.$$