高职高专教育“十一五”规划教材

主编 陈水林 黄伟祥

高等数学

GAODENG SHUXUE

湖北长江出版集团
湖北科学技术出版社

高职高专教育“十一五”规划教材

高 等 数 学

主　编　陈水林 黄伟祥
副主编　张 博 赵新敏 李 翔

湖北长江出版集团
湖北科学技术出版社

图书在版编目（C I P）数据

高等数学／陈水林，黄伟祥主编. —武汉：湖北科学技术出版社，
2007.5
ISBN 978-7-5352-3822-1

Ⅰ.高… Ⅱ.①陈… ②黄… Ⅲ.高等数学 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第060823号

高等数学 © 陈水林 黄伟祥 主编

责任编辑：武又文 封面设计：戴 旻

出版发行：湖北长江出版集团 湖北科学技术出版社 电话：87679468
地 址：武汉市雄楚大街268号湖北出版文化城B座12-13层 邮编：430070

印 刷：咸宁市鄂南新华印务有限公司 邮编：437100

787毫米×1092毫米 16开 19印张 470千字
2007年5月第1版 2007年5月第1次印刷

定价：29.80元

内 容 简 介

本书按照教育部最新制定的高职高专《高等数学课程教学基本要求》，结合编者多年的教学实践编写而成，反映了当前高职高专教育培养高素质实用型人才数学课程设置的教学理念.

内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、微分方程、多元函数微分学、二重积分、线性代数初步和 Mathematica 简介及数学实验. 本书每章节后都配有一定数量的习题，并在书后附有习题参考答案与提示.

本书可供高职高专各专业学生使用.

前　言

本书是按照新形势下高职高专高等数学教学改革的精神，针对高职高专学生学习的特点，结合编者多年的教学实践编写而成的．本教材具有以下特色：

1. 依据教育部制定的《高职高专高等数学课程教学基本要求》编写，力求突出实用性，坚持理论够用为度的原则．在尽可能保持数学学科特点的基础上，注意到高职高专教育的特殊性，对教学内容进行了精选，淡化理论性和系统性，对一些定理只给出解释或简单的几何说明，强化针对性和实用性，强化应用要落实到使学生能运用所学数学知识求解实际问题上．

2. 本教材吸取了国内外同类教材的精华，借鉴了近几年我国出版的一批教材的成功经验，因此，本教材具有更强的实用性．书中概念的引入尽可能从实际背景入手，讲解基本概念、基本原理和基本解题技能时，在考虑到学生实际、教学学时等实际情况的基础上，做到由易到难、循序渐进和通俗易懂，不要求过分复杂的计算和证明．

3. 本教材注重基础知识、基本方法和基本技能的训练；注重对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、计算能力和解决实际问题能力的培养，并对解题的步骤和思路进行了适当的归纳．每节后习题的配备类型合理，深度和广度适中．

4. 本教材既考虑到一般理工科专业对高等数学的需要，也兼顾经济类专业的特点，因此，也可以适用于经济类专业．书中注有“*”号的内容可供不同专业，不同要求选用．

5. 鉴于计算机的广泛应用以及数学软件的日臻完善，为了提高学生使用计算机解决数学问题的意识和能力，我们在第十章介绍了 Mathematica 软件的使用方法及数学实验，使学生不但会手算，还会用计算机计算与绘图．书中所有程序均在 Mathematica 中调试通过．

本书由陈水林（湖北工业大学）、黄伟祥（广东水利电力职业技术学院）担任主编，由张博（云南机电职业技术学院）、赵新敏（昌吉职业技术学院）、李翔（武汉语言文化职业学院）担任副主编．参编人员为陈静、费锡仙、王红、胡耀华、许松林．本书由陈水林修改、统稿、定稿．

在本书的编写过程中，湖北工业大学职业技术学院和理学院的领导及教师提出了许多宝贵的意见和建议，编者在此表示诚挚的谢意，同时全国三百多所职业技术学院的领导和教师对本书给予了大力支持，在此一并致谢．欢迎各位读者提出批评和建议．

编者
2007 年 5 月于武汉

目　录

第一章　函数、极限与连续

高等数学是一门研究变量的数学.它的内容和方法被广泛运用到自然科学、工程技术乃至社会科学的许多领域.函数是变量之间相互依存关系的一种抽象描述,是数学中最重要的概念之一.极限方法是研究变量的一种基本方法,高等数学中的许多概念、性质和法则都是通过极限方法来建立的.本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念,以及它们的一些性质.

第一节　函　　数

一、变量与区间

1. 常量与变量

在日常生活和科学技术中,我们经常遇到各种不同的量,例如长度、面积、体积、温度、时间、距离、速度等等.其中在某一过程中保持不变,始终取一固定数值的量称为**常量**;在某一过程中发生变化,可以取不同数值的量称为**变量**.习惯上,用 a,b,c 等表示常量,用 x,y,z 等表示变量.

例如,一封闭容器在加热过程中,容器内气体的体积和质量都是常量,而其温度与压力则是变量.在某一时期内,一种商品的价格保持不变,它是一个常量,而这种商品每天的销售数量却不同,它是一个变量.

值得注意的是,常量和变量依赖于所研究的过程.同一个量,在某一过程中是常量,而在另一过程中则可能是变量.因此,常量和变量是可以相互转化的.比如重力加速度 g,在地球表面它是一个常量,但到了太空中它就是变量了.

一个变量所能取的数值范围称为变域.一个变量的变域是一个数集,它可以用数轴上的点集来表示.

2. 绝对值、区间与邻域

(1)绝对值

实数 x 的**绝对值**记作 $|x|$,它的定义如下:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

在几何上,$|x|$ 表示实数轴上点 x 到原点的距离,绝对值的以下性质今后将经常用到:

设 a,b 为任意实数,则有

(1) $|a|\geqslant 0$, $|a|=0$ 等价于 $a=0$;　　(2) $|-a|=|a|$;

(3) $|ab|=|a||b|$;　　(4) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$ $(b\neq 0)$;

(5) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$;　　(6) $||a|-|b||\leqslant |a\pm b|\leqslant |a|+|b|$;

(7) $|x|\leqslant a$ 等价于 $-a\leqslant x\leqslant a$ $(a\geqslant 0)$;　　(8) $|x|\geqslant a$ 等价于 $x\leqslant -a$ 或 $x\geqslant a$ $(a>0)$.

(2) 区间

设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$. 数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为以 a,b 为端点的**开区间**，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$

类似地可以说明：

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\},$$
$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\},$$
$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}.$$

$[a,b]$ 称为**闭区间**，$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 都称为**半开区间**.

以上这些区间都称为**有限区间**，数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 除此之外，还有下面几类**无限区间**：

$$(a,+\infty)=\{x|x>a\},$$
$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\},$$
$$(-\infty,b)=\{x|x<b\},$$
$$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x|x\text{是实数}\}=\mathbf{R}.$$

其中 $+\infty$ 与 $-\infty$ 是两个记号(不是数!)分别读作**正无穷大**与**负无穷大**. 以后我们常用"区间 I"泛指以上各种区间，即它可以是有限区间，可以是无限区间，可以是开区间，也可以是闭区间或半开区间，具体指何种区间有时可加一些说明.

(3) 邻域

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 a 的 **δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 称为这**邻域的中心**，δ 称为这**邻域的半径**(图 1－1).

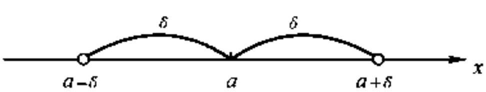

图 1－1

因为 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，所以

$$U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}.$$

有时在不需关注邻域的半径时，邻域 $U(a,\delta)$ 也简记为 $U(a)$.

在点 a 的 δ 邻域中去掉点 a 后，称为点 a 的**去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，或简记为 $\mathring{U}(a)$，即

$$U(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\},$$

其中 $0<|x-a|$ 表示 $x\neq a$.

例 1 $\{x||x-1|<0.5\}$ 表示以点 $a=1$ 为中心，以 0.5 为半径的邻域，也就是开区间 $(0.5,1.5)$，即

$$U(1,0.5)=\{x||x-1|<0.5\}=(0.5,1.5).$$

$\{x|0<|x-1|<0.5\}$ 表示以点 $a=1$ 为中心，以 0.5 为半径的去心邻域，也就是 $(0.5,1)\cup(1,1.5)$，即

$$\mathring{U}(1,0.5)=\{x|0<|x-1|<0.5\}=(0.5,1)\cup(1,1.5).$$

二、函数

1. 函数的概念

在某一个问题中,往往会遇到几个变量,它们并不是孤立地变化的,而是相互联系并按一定的规律变化的.

例 2 设一圆的半径为 r,则其面积 S 为

$$S=\pi r^2.$$

面积 S 随半径 r 变化而变化,也随 r 确定而确定.

例 3 $F=\frac{9}{5}C+32$,其中 F 是华氏度数,而 C 是摄氏度数.

定义 1 对于实数域 $\mathbf{R}$ 上的两个非空集合 D,Y,若对 D 中的任一元素 x,按照一定的规则 f 对应着 Y 中唯一确定的**数** y,则称这个对应法则 f 是从 D 到 Y 的**函数**,通常简记为

$$y=f(x),x\in D,$$

其中,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,D 称为函数 f 的**定义域**,记作 $D(f)$,即 $D=D(f)$. 当 x 取遍 D 中的一切数时,它对应的 y 值组成的集合 $f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 f 的**值域**,记作 $R(f)$. 显然 $f(D)\subseteq Y\subseteq \mathbf{R}$.

在函数的定义中,当 x 在定义域 D 上取一个值 x_0,所对应的值 y_0 称为函数 f 在 $x=x_0$ 处的值,记作 $y_0=f(x_0)$,$f(x)\big|_{x=x_0}$ 或 $y\big|_{x=x_0}$.

表示函数的记号可以是任意选取的,除了常用的 f 外,还可用其他的英文字母或希腊字母,如 g,F,φ 等. 相应地,函数可记作 $y=g(x)$,$y=F(x)$,$y=\varphi(x)$ 等. 有时为了简便起见,可用 $y=y(x)$ 表示一个函数,这样 y 既代表对应法则又代表因变量. 如果同时研究几个不同的函数,为了表示区别,需用不同的记号来表示它们.

由函数的定义可知,确定一个函数有两个要素,即定义域 D 与对应法则 f. 只有当两个函数的定义域和对应法则完全相同时,才能认为这两个函数是相同的函数. 至于变量本身的具体意义及采用什么记号,那是无关紧要的,比如函数

$$y=f(x),x\in D \text{ 与 } s=f(t),t\in D$$

代表同一个函数.

例 4 判断下列每组的两个函数是否表示同一个函数.

(1) $y=2\ln x$, $y=\ln x^2$;　　　　(2) $y=|x|$, $s=\sqrt{t^2}$.

解 (1) 函数 $y=2\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,而函数 $y=\ln x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,即两个函数的定义域不相同,所以它们不是同一个函数.

(2) 函数 $y=|x|$ 与 $s=\sqrt{t^2}$ 的定义均为 $(-\infty,+\infty)$,且有相同的对应法则,所以,尽管两个函数的自变量、因变量所用的字母不同,但它们表示同一个函数.

例 5 已知函数 $f(x)=x^2+\frac{x}{1-x}+1$,求 $f(0)$,$f(x+1)$,$f\left(\frac{1}{x}\right)$,$\frac{1}{f(x^2)}$.

解 $f(0)=0^2+\frac{0}{1-0}+1=1$,

$$f(x+1)=(x+1)^2+\frac{x+1}{1-(x+1)}+1=\frac{x^3+2x^2+x-1}{x},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}+1=\frac{x^3+x-1}{x^3-x^2},$$

$$\frac{1}{f(x^2)}=\frac{1}{(x^2)^2+\frac{x^2}{1-x^2}+1}=\frac{x^6-x^4-1}{x^2-1}.$$

例 6 求下列函数的定义域:

(1)$f(x)=\dfrac{1}{\ln(2x-1)}$; (2)$f(x)=\sqrt{x^2-4}-\arcsin(5-2x)$.

解 (1)由$\begin{cases}2x-1>0,\\ \ln(2x-1)\neq 0\end{cases}$解得 $x>\dfrac{1}{2}$且 $x\neq 1$,即所求定义域为$\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$.

(2)当$\sqrt{x^2-4}$与 $\arcsin(5-2x)$都有意义时,$f(x)$才有意义,即

$$\begin{cases}x^2-4\geqslant 0,\\ -1\leqslant 5-2x\leqslant 1,\end{cases}\text{即 } 2\leqslant x\leqslant 3.$$

故得定义域为[2,3].

2. 函数的表示法

表示函数的方法主要有以下三种:公式法、列表法和图示法.

(1)公式法

用数学式表示函数的方法称为**公式法**,又称为**解析法**. 本书涉及的函数大多用公式表示. 上面例 4、例 5 和例 6 都是用此方法表示的. 这种表示法便于对函数进行理论上的研究,它的优点是表达清晰,缺点是不够直观,抽象.

公式法包含一类函数,称为**分段函数**,它是在定义域内不同区间上用不同式子表示的一个函数. 下面我们介绍几个常用的分段函数.

例 7 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

其图形如图 1-2 所示.

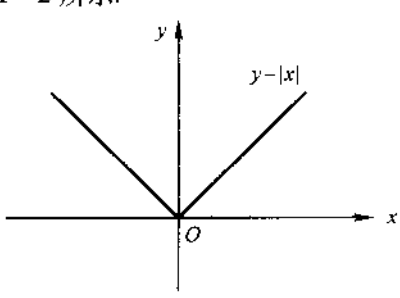

图 1-2

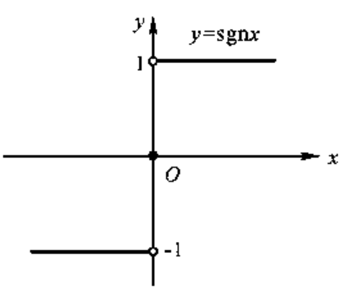

图 1-3

例 8 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

其图形如图 1 - 3 所示.

例 9 设 x 为任一实数. 不超过 x 的最大整数称为 x 的**整数部分**,记作 $[x]$. 例如,

$$\left[\frac{1}{3}\right]=0,[\sqrt{2}]=1,[\pi]=3,\left[-\frac{1}{7}\right]=-1.$$

取整函数

$$y=[x],x\in(-\infty,+\infty).$$

其图形如图 1 - 4 所示.

注意 分段函数不是由几个函数组成,而是一个函数.

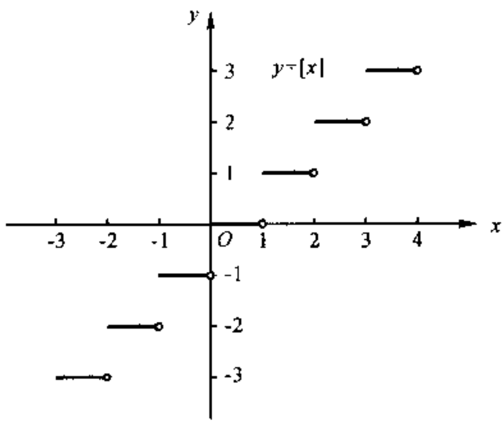

图 1 - 4

(2) 列表法

若变量 x 与 y 之间有函数关系,将一系列自变量 x 的数值与对应的函数值 y 列成表格表示函数的方法称为**列表法**.

例 10

M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	180	95	90	80	85	83	280	300	200	80	98	190

其中 Y 表示某家庭月电费,单位元,M 表示 2006 年间的月份.

这是用表格表示的函数,其中 M 为自变量,Y 为因变量. 当 M 在 1 至 12 之间任取一值时,从表中可查到与其对应的 Y 的值,这种表示法使用方便,但自变量的取值有限.

(3) 图示法

用图形表示函数的方法称为**图示法**. 这种方法直观性强,函数的变化一目了然,且便于研究函数的几何性质,但不便于作理论研究. 这种方法常和解析表达式同时使用. 其实前面已经这样使用了,如例 8 和例 9.

3. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性

定义 2 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$,如果存在正数 M,使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

对任一 $x\in I$ 都成立,则称函数 $f(x)$ 在 I 上**有界**. 如果不存在这样的正数 M,则称函数 $f(x)$ 在 I 上**无界**.

例如函数$f(x)=\sin x$在区间$(-\infty,+\infty)$内有$|\sin x|\leqslant 1$,所以函数$f(x)=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内有界(当然也可取大于1的任何数作为M而使$|f(x)|\leqslant M$成立).

又如函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$(1,2)$内,因$\left|\dfrac{1}{x}\right|<1$,所以函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(1,2)$内有界.但函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内是无界的($x$趋近于0时,不存在确定的正数$M$,使$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$成立).

(2)函数的单调性

定义3 设函数$f(x)$的定义域为D,区间$I\subset D$.如果对于区间I上任意两点x_1及x_2,当$x_1<x_2$时,都有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数$f(x)$在区间I上是**单调增加**的(图1-5);如果对于区间I上任意两点x_1及x_2,当$x_1<x_2$时,都有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数$f(x)$在区间I上是**单调减少**的(图1-6).

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

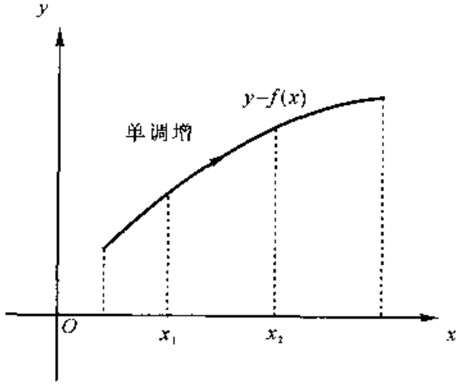

图 1-5

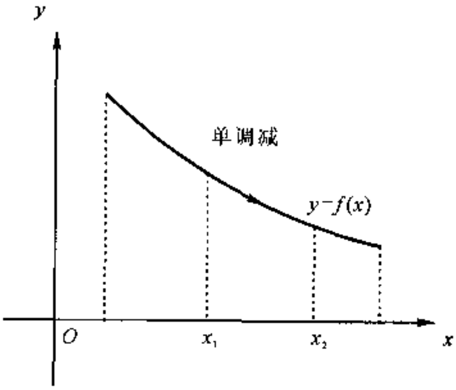

图 1-6

如图1-5和图1-6所示,单调增加函数的图形是沿x轴正向逐渐上升的;单调减少函数的图形是沿x轴正向逐渐下降的.

例如,$f(x)=x^2$在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的,在区间$(-\infty,0]$上是单调减少的,在区间$(-\infty,+\infty)$内不是单调的.

又例如$f(x)=\ln x$在区间$(0,+\infty)$内是单调增加的.

(3)函数的奇偶性

定义4 设函数$f(x)$的定义域D关于坐标原点对称.如果对于任意的$x\in D$,总有

$$f(-x)=f(x)$$

成立,则称$f(x)$为**偶函数**;如果对于任意的$x\in D$,总有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立,则称$f(x)$为**奇函数**.

例如$f(x)=x^2$在$(-\infty,+\infty)$内是偶函数.$f(x)=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内是奇函数.

由定义可知,偶函数的图形关于y轴对称(图1-7),奇函数的图形关于原点对称(图1-8).

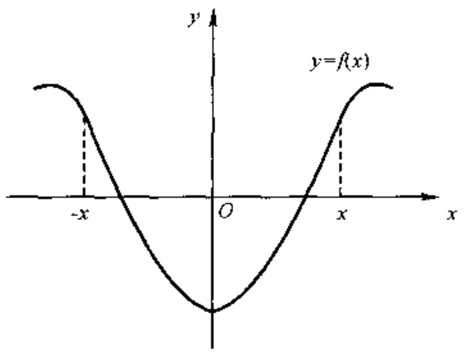

图 1-7

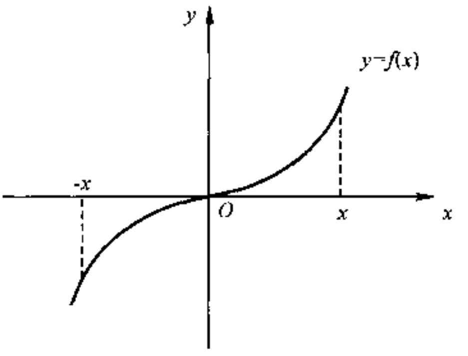

图 1-8

(4)函数的周期性

定义 5 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个非零的常数 T,使得若 $x\in D$,有 $x\pm T\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**周期函数**. T 称为 $f(x)$ 的**周期**. 讨论周期函数时,所说的周期是指**最小正周期**. 例如 $\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数.

显然,周期为 T 的周期函数 $y=f(x)$ 的图形沿 x 轴相隔一个周期 T 重复一次.

4. 反函数与复合函数

(1)反函数

函数 $y=f(x)$ 反映了 y 是怎样随 x 变化而变化的,但变量间的关系往往是相互制约的,故 y 的变化也常会引起 x 的变化.

例如,在自由落体运动中,物体下落的路程 h 与时间 t 的函数关系为

$$h=\frac{1}{2}gt^2 \quad (t\geqslant 0).$$

若已知下落路程 h,求时间 t,就必须把 h 作为自变量,而把 t 作为关于 h 的函数,由 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 得

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

这时称函数 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ 为函数 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 的反函数,而称 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 为函数 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ 的直接函数.

定义 6 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 $Y=f(D)$. 如果对于 Y 中每一个 y,都可由方程

$$f(x)=y$$

唯一确定出 x,则得到一个定义在集合 Y 上的新函数,称它为 $y=f(x)$ 的**反函数**. 记作

$$x=f^{-1}(y),\ y\in Y$$

对反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说,原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

通常,我们用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,故我们常将 $y=f(x)$, $x\in D$ 的反函数写成 $y=f^{-1}(x)$, $x\in Y=f(D)$. 显然,反函数的定义域等于直接函数的值域,反函数的值域等于直接函数的定义域,且 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数.

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称(图 1-9).

由反函数的定义可得求反函数的步骤如下：

(1)从 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$；

(2)交换字母 x 与 y 的位置，并注意到反函数的定义域为直接函数的值域.

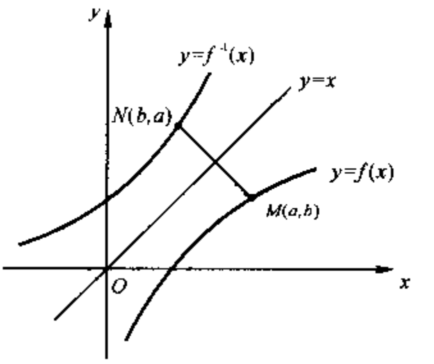

图 1-9

例 11 求下列函数的反函数

(1) $y=2x-1, x\in(-\infty,+\infty)$；

(2) $y=e^x+1, x\in(-\infty,+\infty)$.

解 (1)先从 $y=2x-1$ 解出 x，得

$$x=\frac{1}{2}(y+1),$$

再交换 x 与 y 的位置，得所求的反函数为

$$y=\frac{1}{2}(x+1), x\in(-\infty,+\infty).$$

(2)从 $y=e^x+1$ 解出 x，得

$$x=\ln(y-1),$$

再交换 x 与 y 的位置，得所求的反函数为

$$y=\ln(x-1), x\in(1,+\infty).$$

(2)复合函数

在实际问题中，有时两个变量之间的联系并不是直接的，而是通过另一个变量而联系起来的. 例如：底面半径为 r，高度为 h（h 为常数）的圆柱体的体积 $V=Sh$，而圆柱体的底面积 $S=\pi r^2$，故 V 与 r 之间通过 S 建立了函数关系 $V=Sh=\pi r^2h$，它是由函数 $V=Sh$ 与 $S=\pi r^2$ 复合而成的复合函数.

定义 7 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $u=\varphi(x)$ 的值域或其部分包含在 $y=f(u)$ 的定义域中，则 y 通过 u 的联系也是 x 的函数，称为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，记作

$$y=f[\varphi(x)],$$

其中，x 是自变量，u 称为**中间变量**.

例 12 设 $y=\sin u, u=2x^2+1$，则 $y=\sin(2x^2+1)$ 是由 $y=\sin u$ 与 $u=2x^2+1$ 复合而成的复合函数.

例 13 设 $y=\ln u, u=-1-x^2$，因 $u=-1-x^2$ 的值域与 $y=\ln u$ 的定义域无公共部分，故 $y=\ln u$ 与 $u=-1-x^2$ 不能构成复合函数.

复合函数也可由 3 个或 3 个以上的函数复合而成.

例 14 $y=\sqrt{e^{\arcsin x}-1}$ 是由 $y=\sqrt{u}, u=e^v-1$ 与 $v=\arcsin x$ 复合而成的复合函数.

三、初等函数

1. 基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**.

(1)常数函数 $y=C$（C 为常数）

常数函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，不论 x 取何值，y 都取常数 C，其图形如图 1-10 所示.

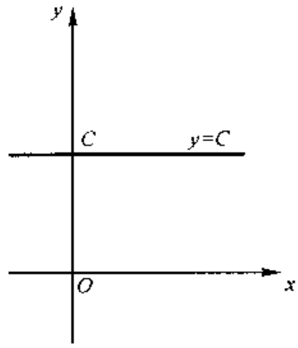

图 1-10

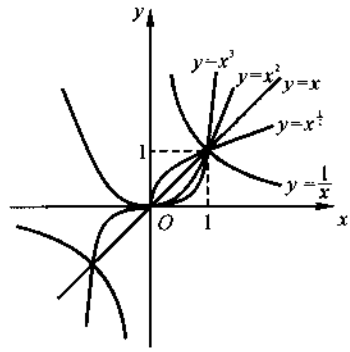

图 1-11

(2)幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 为实数)

幂函数的定义域随 α 不同而异,但不论 α 取何值,它在区间$(0,+\infty)$内总有定义.

例如,$y=x,y=x^2,y=x^3,y=x^{\frac{1}{2}},y=x^{-1}=\frac{1}{x}$(图 1-11)都是常用到的幂函数.

(3)指数函数 $y=a^x$(a 为常数,$a>0,a\neq1$)

指数函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$,过定点$(0,1)$. 当 $a>1$ 时,$y=a^x$ 单调增加,当 $0<a<1$ 时,$y=a^x$ 单调减少,如图 1-12 所示.

以无理数 $\mathrm{e}=2.71828\cdots$为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$,是科技中常用的指数函数.

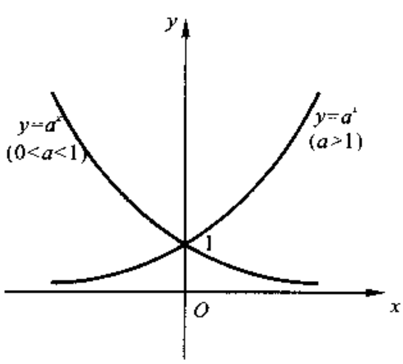

图 1-12

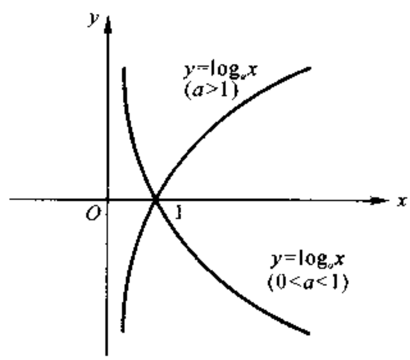

图 1-13

(4)对数函数 $y=\log_a x$(a 是常数,$a>0,a\neq1$)

对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数. 对数函数的定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$,过定点$(1,0)$. 当 $a>1$ 时,$y=\log_a x$ 单调增加,当 $0<a<1$ 时,$y=\log_a x$ 单调减少,如图 1-13 所示.

特别地,以无理数 e 为底的对数函数 $\log_e x$ 称为自然对数,记作 $\ln x$.

(5)三角函数

三角函数是下列六个函数的统称,它们分别为(图 1-14 至图 1-17):

正弦函数 $y=\sin x$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$,奇函数,周期为 2π;

余弦函数 $y=\cos x$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$,偶函数,周期为 2π;

正切函数 $y=\tan x$,定义域为 $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$,n 为整数,值域为$(-\infty,+\infty)$,奇函数,周期为 π;

余切函数 $y=\cot x$,定义域为 $x\neq n\pi$,n 为整数,值域为$(-\infty,+\infty)$,奇函数,周期为 π;

正割函数 $y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$;

余割函数 $y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$.

其中 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是有界函数:$|\sin x|\leqslant 1$,$|\cos x|\leqslant 1$,$y=\tan x$ 与 $y=\cot x$ 为无界函数.

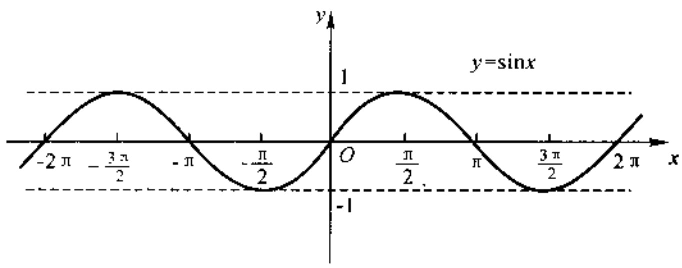

图 1-14

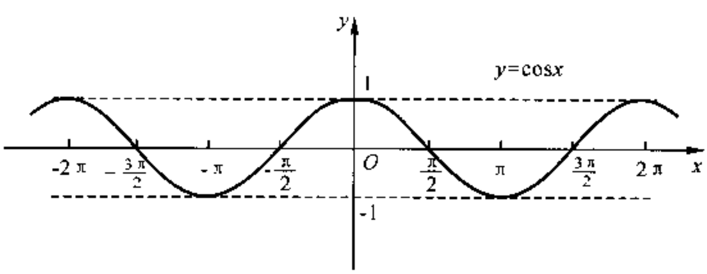

图 1-15

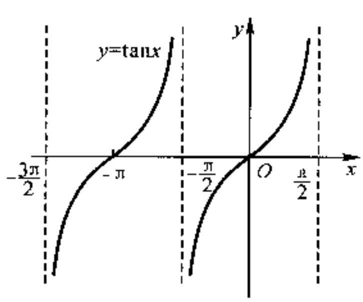

图 1-16

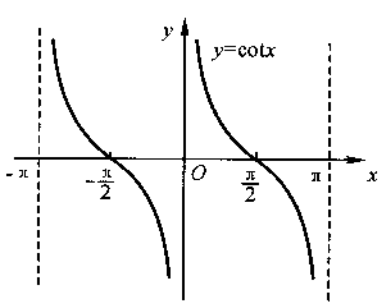

图 1-17

(6)反三角函数

反三角函数是相应三角函数的反函数. 常用的反三角函数有下面 4 个:

反正弦函数 $y=\arcsin x$,定义域为$[-1,1]$,值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$;

反余弦函数 $y=\arccos x$,定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$;