高校经典教材同步辅导

配套同济大学应用数学系主编的《微积分》

九章丛书

微积分

高教第二版

辅导及习题全解

上册

主编／杨富云　孙怀东

编写／九章系列课题组

■知识点窍 ■逻辑推理

■习题全解 ■全真考题

■名师执笔 ■题型归类

新版

人民日报出版社

高校经典教材同步辅导

微积分辅导及习题全解

（高教第二版·上册）

主编　杨富云　[illegible]东

主审　战　扬

编写　九章系列课题组

赵志新　陆　续

王　阳　康　伟

人民日报出版社

图书在版编目(CIP)数据

高校经典教材同步辅导·微积分(高教第二版·上册)/杨富云,孙怀东主编.—北京:人民日报出版社,2004.4

ISBN 7-80153-865-X

Ⅰ.高…　Ⅱ.①杨…②孙…　Ⅲ.高校—教学参考资料
Ⅳ.G624

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 030529 号

高校经典教材同步辅导·微积分(高教第二版·上册)

主　　编:杨富云　孙怀东
责任编辑:安　申
封面设计:伍克润

出版发行:人民日报出版社(北京金台西路 2 号/邮编:100733)
经　　销:新华书店
印　　刷:北京顺天意印刷有限公司

字　　数:363 千字
开　　本:787×960　1/16
印　　张:23
印　　数:3000
印　　次:2005 年 8 月第 1 次印刷

书　　号:ISBN 7-80153-865-X/G·479
定　　价:23.80 元(全五册·128.00 元)

前　言

本书是与同济大学应用数学系编写的"十五"国家级规划教材《微积分》(第二版)配套的学习辅导书。

《微积分》作为高等数学的重要组成部分,是理工科学生必修的一门重要基础课,也是许多专业研究生入学考试的必考科目。微积分中的概念复杂多样,从基础的变量、函数和极限到复杂的导数、微分和积分,形成了一个无比精美的庞大系统,这个系统不仅内容丰富,更重要的是结构严密,无懈可击。作为进入大学阶段学习的第一门高等数学课程,许多同学在学习过程中感到微积分抽象、难懂,对基本概念以及定理结论在理解上感到困难,具体解题时,缺乏思路,难以下手。本辅导书旨在帮助广大同学更好地掌握微积分的基本概念和基本理论,综合运用各种解题的技巧和方法,提高分析问题和解决问题的能力。

本书主要有如下几个部分组成:

1. **基本要求**。结合每年考研大纲的要求,分别对各章知识点做了简练的概括,使读者在各章的学习过程中目标明确,有的放矢。

2. **内容提要**。阐述每一章中重要的性质定理、公式及结论,并对一些难于理解但又是大纲所要求的考研常涉及到的内容进行了详细的解释和归纳。目的是使学生用分析和提炼的方法去学习课本,掌握知识。

3. **本章知识网络图**。每章的知识网络图系统全面的涵盖了本章的知识点,使学生能一目了然地浏览本章内容框架结构,全面把握教材的理论体系。

4. **典型例题解析**。本书尽可能归纳了该课程所涉及的重要题型,这些题型都是在对历年考试和考研所涉及的题型进行深入分析后总结出来的,具有一定的代表性。

5. **课后习题全解**。教材中课后习题丰富、层次多样,许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论,促其掌握基本解题方法。我们对教材课后的全部习题给了详细的解答。

6. **实验题解答**。鉴于计算机的广泛应用以及数学软件的日臻完善，教材中编写了14个数学实验。我们对这些实验题给出了详细的解答和说明。由于思路的不同，实验题还有其他更好的解答，我们只是提供了一种参考解答，全书的实验题解答单列在本书的最后。

本书在编写过程中，参考了高等教育出版社出版的《微积分学习辅导与习题选解》一书，在此深表感谢！

由于时间仓促和编者水平有限，书中疏漏之处在所难免，恳请广大读者不吝批评指正

编者

2005年6月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

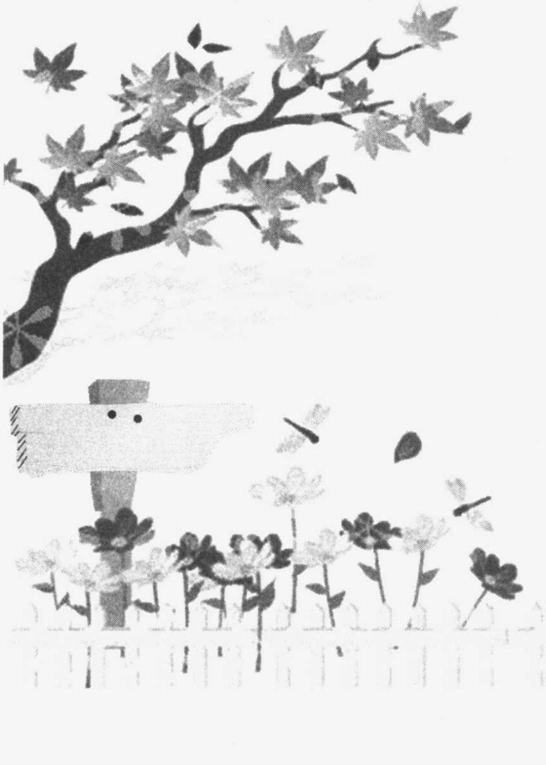
目　录

第一部分　内容提要及习题全解

第二部分 实验题解答

第一部分

内容提要及习题全解



预备知识

1　基本要求

1. 理解函数及其定义域、值域、图形等概念，掌握函数的表示法；

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；

3. 理解复合函数、反函数和分段函数的概念；

4. 理解基本初等函数及其定义域、值域等概念，掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念；

5. 会建立简单应用问题中的函数关系式.

2　内容提要

1. 集合的基础知识

(1)数集

自然数集

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$$

整数集

$$\mathbf{Z}=\{0,1,-1,2,-2,\cdots,n,-n,\cdots\}$$

有理数集

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,|\,p,q\in\mathbf{Z},q\neq0,\text{且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\}$$

复数集

$$\mathbf{C}=\{a+bi\,|\,a,b\in\mathbf{R},i^2=-1\}$$

正实数集

$$\mathbf{R}^+=\{x\,|\,x\in\mathbf{R},x>0\}$$

负实数集

$$\mathbf{R}^-=\{x\,|\,x\in\mathbf{R},x<0\}$$

去 0 实数集

$$\mathbf{R}^* = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$$

(2)运算公式

$A \cup B = \{u \mid u \in A$ 或 $u \in B\}$;

$A \cap B = \{u \mid u \in A$ 且 $u \in B\}$;

$A \backslash B = \{u \mid u \in A$ 且 $u \notin B\}$;

$A^c = \{u \mid u \in I$ 且 $u \notin A\}$;

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.

(3)区间和邻域

$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$;

$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$;

$[a,+\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$;

$U(a,\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\} = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$;

$\mathring{U}(a,\delta) = x\{0 < |x-a| < \delta\} = \{x \mid x \in (a-\delta,a) \cup (a,a+\delta)\}$;

点 a 的左 δ 邻域 $= \{x \mid a-\delta < x < a\}$.

2. 映射

设 X 和 Y 为两个非空集合,若存在法则 T,使得 $x \in X$ 惟一确定 $y = T(x) \in Y$,则称 T 为 X 到 Y 的映射,记作 $T: X \to Y$,称 x 为原像,y 为像.

集合 X 称为映射 T 的定义域,X 的所有元素的像组成的集合称为映射 T 的值域.

满射　若 $T(X) = Y$,即 Y 中任一元素都是 X 中某元素的像,则称 T 为 X 到 Y 的一个满射;

单射　对任意 $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$,必有 $T(x_1) \neq T(x_2)$,则称 T 为 X 到 Y 的单射;

一一映射　既满足满射又符合单射的映射,又称为一一对应;

复合映射　$(T_2 \circ T_1)(x) = T_2[T_1(x)]$.

3. 一元函数

(1)概念

设数集 $D \subset \mathbf{R}$,则 D 到 $\mathbf{R}$ 的任一映射 f 称为定义在 D 上的一元函数,简称为函数,记作 $y = f(x)$, $x \in D$.

定义域和对应法则是函数的两要素.

点集 $\{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为 $y = f(x)$ 的图形(或图像).

以上定义的是单值函数,当对应法则为多值时,可根据不同情况进行化简,得到单值函数来进行研究.

(2)函数的几种特性

有界性;单调性;奇偶性;周期性.

(3)反函数

设一元函数 $f: D \to f(D)$ 为一一映射,则称逆映射 $f^{-1}: f(D) \to D$ 为函数 f 的反函数. f^{-1} 的对应规

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

则由 f 的对应规则所确定.

换言之,设函数 f 的定义域 D 与值域 $f(D)=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$ 一一对应,则 x 也是 y 的函数,记作 $x=f^{-1}(y)$,称映射 f^{-1} 为 f 的反函数. 习惯上 x 总表示为自变量,y 表示因变量,因此常记作 $y=f^{-1}(x)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数.

在同一坐标平面中,$x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 的图形相同,而 $y=f^{-1}(x)$ 与直线 $y=f(x)$ 的图形关于 $y=x$ 对称.

(4)复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域是 D',函数 $u=g(x)$ 的定义域是 D,若 $u=g(x)$ 在集合 D 上有定义且 $g(D)\subset D'$,则将由下式

$$y=f[g(x)]\ (x\in D)$$

定义的函数称为由函数 $u=g(x)$ 和 $y=f(u)$ 构成的复合函数,记作 $f\circ g$,即对每个 $x\in D$,有 $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$.

(5)基本初等函数

幂函数　　$y=x^{\alpha}$(α 为常数);

指数函数　　$y=a^{x}$($a>0$,且 $a\neq 1$);

对数函数　　$y=\log_{a}x$(a 是常数且 $a>0, a\neq 1$);

三角函数　　$y=\sin x, y=\cos x, \cdots$;

反三角函数　　$y=\arcsin x, y=\arccos x, \cdots$.

(6)初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和函数复合步骤所构成的并可以用一个算式表示的函数统称为初等函数.

工程中常用的一类初等函数:

双曲正弦

$$y=\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

双曲余弦

$$y=\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

双曲正切

$$y=\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

反双曲正弦

$$y=\operatorname{arsinh} x=\ln(x+\sqrt{x^{2}+1})$$

反双曲余弦

$$y=\operatorname{arcosh} x=\ln(x+\sqrt{x^{2}-1})$$

反双曲正切

$$y=\operatorname{artanh}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

双曲函数有与三角函数相似的和角、差角、倍角关系，请读者自己研读并比较；同时应熟悉其性质和图形.

3　本章知识网络图

- 集合与函数
  - 集合
    - 概念
    - 运算（交换律，结合律，分配律，对偶律）
    - 区间（开区间，闭区间，有限区间，无限区间）
    - 邻域
  - 映射
    - 概念
    - 分类（满射，单射，一一映射）
    - 逆映射
    - 复合映射
  - 一元函数
    - 概念
    - 性质（有界性，单调性，奇偶性，周期性）
    - 反函数
    - 复合函数
    - 函数的运算（和，差，积，商）
    - 基本初等函数（幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数）

4　典型例题解析

例 1　求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\arcsin\frac{3x}{1+x}$；　　(2) $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{\ln\cos x}$；

(3) $f(x)=\ln\frac{3+x}{3-x}+1$，求 $f(x)+f\left(\frac{3}{x}\right)$ 的定义域.

【解】　关于求函数定义域的问题，如果函数是由实际问题给出，可根据问题的实际情况确定其

定义域;如果函数由解析式给出,只须使解析式有意义.通常考虑:

①分母不能为零;

②负数不能开偶次方;

③对数的底数是正数;

④注意 $\arcsin x$ 和 $\arccos x$ 的定义域为$[-1,1]$.由上述约束条件构成不等式组,求解不等式组即可求出函数定义域.

(1)由反三角函数的定义域要求知 $\left|\frac{3x}{1+x}\right|\leqslant 1$,由分母的要求知 $1+x\neq 0$.故

$$\begin{cases}-1\leqslant\frac{3x}{1+x}<1\\1+x\neq 0\end{cases}$$

解此不等式组可得 $f(x)$ 的定义域为$\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$.

(2)根据根式的定义域要求,$4-x^2\geqslant 0$;由分母的约束条件知 $\ln\cos x\neq 0$,即 $\cos x\neq 1$;由对数的定义域要求知 $\cos x>0$.故

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\\cos x>0\\\cos x\neq 1\end{cases}$$

由此可知 $f(x)$ 的定义域为$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(3)先求 $f(x)$ 的定义域 D_1:由$\begin{cases}\frac{3+x}{3-x}>0\\x\neq 3\end{cases}$解出 $D_1=(-3,3)$;再求 $f(3/x)$ 的定义域 D_2:据 D_1 知 $\left|\frac{3}{x}\right|<3$,因此,$|x|>1$,所以 $D_2=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$;最后,$f(x)+f(3/x)$ 的定义域 $D=D_1\cap D_2=(-3,-1)\cup(1,3)$.

说明 (3)的计算中不必求出 $f(3/x)$ 的表达式,否则较烦琐.

例 2 设 $f(x)$ 的定义域是$[0,1]$,求下列函数的定义域:

(1)$y=f(\sin x)$; (2)$y=f\left(\frac{1}{x}\right)$; (3)$y=f(x+a)f(x-a)\ (a>0)$.

【解】 在求复合函数的定义域时,可先将复合函数由外至内分解为简单函数,然后由外至内确定各简单函数的定义范围,直至最里面一层.$f(x)$ 的定义域是$[0,1]$,这就意味着 $f[g(x)]$ 中 $g(x)$ 的值域在$[0,1]$上,即要求 $0\leqslant g(x)\leqslant 1$.由此可知

(1)$0\leqslant\sin x\leqslant 1$,所以

$$2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi,k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

因此 $f(\sin x)$ 的定义域是$[2k\pi,(2k+1)\pi]$,k 是整数.

(2)$0\leqslant\frac{1}{x}\leqslant1$,得 $x\geqslant1$. 因此$f\left(\frac{1}{x}\right)$的定义域是$[1,+\infty)$. 注意此时$g(x)$的值域含于$f(x)$的定义域之内.

(3)由$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant1\\0\leqslant x-a\leqslant1\end{cases}$可得$f(x+a)+f(x-a)$的定义域为$[-a,1-a]\cap[a,1+a]$. 为使此集合非空,只须$a\leqslant1-a$,即$0<a\leqslant\frac{1}{2}$,此时定义域为$[a,1-a]$.

例 3 判定下列各对函数是否相同,并说明理由.

(1)函数$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$与$g(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$.

(2)函数$f(x)=\ln(x^2-3x+2)$与$g(x)=\ln(x-1)+\ln(x-2)$

【解】 (1)$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$的定义域由$\begin{cases}1+x>0\\1-x>0\end{cases}$或$\begin{cases}1+x<0\\1-x<0\end{cases}$得$(-1,1)$;

$g(x)$的定义域由$\begin{cases}1+x>0\\1-x>0\end{cases}$得$(-1,1)$.

故$f(x)$与$g(x)$的定义域相同,均为$(-1,1)$.

又当$x\in(-1,1)$时,$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$.

即
$$f(x)=g(x).$$

因此$f(x)$与$g(x)$为同一函数.

(2)由于$f(x)=\ln(x^2-3x+2)=\ln(x-1)(x-2)$,

故其定义域由不等式$(x-1)(x-2)>0$,得$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

而$g(x)$的定义域为$(2,+\infty)$,因此$f(x)$与$g(x)$为不同函数.

注 当且仅当两个函数的定义域和对应法则完全相同时,才表示同一个函数,否则表示不同函数.

例 4 设$f(x)=\frac{x}{x-1}$,求$f\left[\frac{1}{f(x)-1}\right]$的表达式和定义域.

【解】 由于$f(x)-1=\frac{x}{x-1}-1=\frac{1}{x-1}$,所以

$$\frac{1}{f(x)-1}=x-1\ (x\neq1)$$

$$f\left[\frac{1}{f(x)-1}\right]=f(x-1)=\frac{x-1}{(x-1)-1}=\frac{x-1}{x-2}(x\neq2)$$

它的定义域是$x\neq1$ 且 $x\neq2$ 的全体实数.

例 5 设$f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$,求$f(\sqrt{2}\sec x)$.

【解】 要求$f(\sqrt{2}\sec x)$,须得先由$f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$求出$f(x)$.

因为 $$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-2,$$

所以 $$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2,$$

从而 $$f(x)=x^2-2.$$

因此 $$f(\sqrt{2}\sec x)=(\sqrt{2}\sec x)^2-2=2(\sec^2x-1)=2\tan^2x.$$

例 6 设$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=1-\cos x$,求$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)$.

【解】 法 1:先求$f(x)$的表达式,因

$$\begin{aligned}f\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)&=1-\cos x\\&=1-\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)\\&=2\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

所以

$$f(x)=2(1-x^2),$$

故

$$\begin{aligned}f\left(\sin\frac{x}{2}\right)&=2\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)\\&=2\cos^2\frac{x}{2}=1+\cos x\end{aligned}$$

法 2: $$\begin{aligned}f\left(\sin\frac{x}{2}\right)&=f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right)\\&=f\left(\cos\left(\frac{\pi-x}{2}\right)\right)\\&=1-\cos(\pi-x)\\&=1+\cos x\end{aligned}$$

注 变形的目的是向已知形式靠近,从而达到解决问题的目的.

例 7 求函数$f(x)=\begin{cases}2x-1, & -2<x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 2^x, & 2<x\leqslant 4\end{cases}$,的反函数$f^{-1}(x)$.

【分析】 求分段函数的反函数,只要分别求出各区间段相应函数表达式的反函数的表达式及自变量的取值范围即可.

【解】 当$-2<x<1$时,$y=2x-1$,故$x=\frac{1}{2}(1+y)$, $-5<y<1$.

当$1\leqslant x\leqslant 2$时,$y=x^2$,故$x=\sqrt{y}$,$1\leqslant y\leqslant 4$.

当 $2<x\leqslant 4$ 时，$y=2^x$，故 $x=\log_2 y, 4<y\leqslant 16$.

即
$$x=f^{-1}(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+y), & -5<y<1\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant y\leqslant 4\\ \log_2 y, & 4<y\leqslant 16\end{cases}$$

从而反函数
$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+x), & -5<x<1\\ \sqrt{x} & 1\leqslant x\leqslant 4\\ \log_2 x & 4<x\leqslant 16\end{cases}$$

例 8 设 $f(x)$ 为奇数，$g(x)$ 为偶函数，且下列各复合函数在某对称区间内皆有定义，试判定 $f[f(x)]$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$，$g[g(x)]$ 的奇偶性.

【解】 依据奇偶性的定义进行检验.

令 $F_1(x)=f[f(x)]$，则
$$F_1(-x)=f[f(-x)]=f[-f(x)]=-f[f(x)]=-F_1(x)$$
故 $f[f(x)]$ 是奇函数.

令 $F_2(x)=f[g(x)]$，则
$$F_2(-x)=f[g(-x)]=f[g(x)]=F_2[x]$$
故 $f[g(x)]$ 是偶函数.

令 $F_3(x)=g[f(x)]$，则
$$F_3(-x)=g[f(-x)]=g[-f(x)]=g[f(x)]=F_3(x)$$
故 $g[f(x)]$ 是偶函数.

令 $F_4(x)=g[g(x)]$，则
$$F_4(-x)=g[g(-x)]=g[g(x)]=F_4(x)$$
故 $g[g(x)]$ 是偶函数.

例 9 设 $f(x)$ 为奇函数，$f(1)=a$，且 $f(x+2)-f(x)=f(2)$

(1) 试用 a 表示 $f(2)$ 与 $f(5)$；

(2) 问 a 取何值时，$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

【解】 (1) 令 $x=-1$，则
$$f(2)=f(1)-f(-1)=2f(1)=2a$$
令 $x=1$，则 $f(2)=f(3)-f(1)$，故
$$f(3)=f(2)+f(1)=3a$$
再令 $x=3$，得 $f(2)=f(5)-f(3)$，故
$$\begin{aligned}f(5)&=f(2)+f(3)\\&=2a+3a\end{aligned}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com