XIANXINGDAISHU XUEXIZHIDAO

面向21世纪普通高等教育规划教材学习指导

线性代数学习指导

主 编 林大华 副主编 林秀清 唐晓文 主 审 陈纪阳

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

面向21世纪普通高等教育规划教材学习指导

线性代数学习指导

主　编　林大华
副主编　林秀清　唐晓文
主　审　陈纪阳

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是《面向21世纪普通高等教育规划教材——线性代数》的配套学习指导书，按该教材的章节体系，系统地给出学习指导内容. 全书由行列式，矩阵，向量，线性方程组，矩阵的特征值与特征向量，二次型共6章内容组成. 每章包括本章精要、知识脉络图、疑难解答、例题精选以及自我检查题等内容. 书末附有自我检查题答案与提示，模拟试卷及答案，近3年硕士研究生入学统一考试数学试题(线性代数部分)以及解答等.

本书可以帮助学生强化基础知识和提高解题能力，适合普通高等院校理工科、经管类本科各专业的学生学习及考研复习参考，可供成教学院或专科院校的学生选用，也可供相关专业人员和广大教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/林大华主编. —上海：同济大学出版社，2007.7

面向21世纪普通高等教育规划教材学习指导

ISBN 978-7-5608-3532-7

Ⅰ. 线… Ⅱ. 林… Ⅲ. 线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第095064号

面向21世纪普通高等教育规划教材学习指导

线性代数学习指导

主　编　林大华

副主编　林秀清　唐晓文

主　审　陈纪阳

责任编辑　曹　建　责任校对　谢惠云　封面设计　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路1239号　邮编：200092　电话：021－65985622)

经　销　全国各地新华书店

印　刷　同济大学印刷厂

开　本　787mm×960mm　1/16

印　张　11.5

印　数　1—5100

字　数　230000

版　次　2007年7月第1版　2007年7月第1次印刷

书　号　ISBN 978-7-5608-3532-7/O·303

定　价　18.00元

前言

本书是《面向21世纪普通高等教育规划教材——线性代数》的配套学习指导书，按主教材的章节体系，系统地给出学习指导内容.本书以有“指”可“导”作为编写的基本指导思想，力求做到全书知识系统，讲解深入浅出，好学易懂，并在以下几个方面做了一些努力：

(1) 对学生学习能起到答疑解惑的作用，对教材内容能起到补充提高作用，对教师教学能起到参考作用.通过对典型例题的分析、解答和注释，帮助学生能更好地理解和掌握线性代数的基本概念、基本理论与基本方法，加深对线性代数内容的理解，掌握综合分析的思维方法，提高学生分析问题、解决问题的能力与计算技能、技巧.使教师通过本书能对教材的处理、内容的增减、概念的讲解、问题的分析有所启发与帮助.

(2) 对学生来说能起到复习提高作用.使学生通过本书的学习，能对主教材中的各个章节乃至整个线性代数课程的主要内容及其相互间的联系有一个脉络清晰的认识.

(3) 本书中对基本概念、基本结论与基本方法的叙述以及符号的使用都尽量与常见教材接轨，从而使得使用各种版本教材的学生和教师，均可通过本书对无论是学习还是教学都能有所启发与帮助.

(4) 使本书成为想进一步深入学习线性代数课程及参加考研学生的学习平台，并使这部分学生能通过这个平台了解到教材以外的一些线性代数的内容，加深对线性代数的认识，并了解线性代数课程的考研情况，以便备考.因此，在编写本书时，我们对教材内容作了一些扩展，对线性代数课程的考研试题情况做了一些介绍，以满足部分学生的需要.

本书在内容结构上与主教材同步，由行列式，矩阵，向量，线性方程组，矩阵的特征值与特征向量，二次型6章内容组成；书后附有自我检查题答案与提示，模拟试卷及答案，近3年硕士研究生入学统一考试数学试题(线性代数部分)以及解答等内容.

本书体例统一，每章均包括内容精要、知识脉络图、疑难解答、例题精选以及自我检查题等内容：

内容精要，是本章内容的高度概括与归纳.通过它能帮助学生掌握本章主要的知识点.

知识脉络图，把本章主要知识点的联系通过脉络图的形式刻画出来.通过它

能帮助学生对本章的基本概念与主要结论的联系有一个较为清晰的认识，从而帮助学生更好地从整体上理解和掌握本章的内容.

疑难解答.以问答的形式对学生在概念认识和定理结论的掌握与使用上可能会出现的错误进行分析解答.通过它能帮助学生准确地理解、掌握和使用有关的概念与定理结论.

例题精选.对典型例题进行详细的分析、解答和注释.通过它能使学生巩固所学的知识，加深对本章内容的理解，掌握综合分析的思维方法，提高分析问题、解决问题的能力与计算技能、技巧.

自我检测题，内容应涵盖本章的主要知识点，题型有选择题、填空题、解答题、证明题等.通过它能帮助学生了解自身掌握本章知识的程度.

本书在各位作者充分讨论的基础上进行了分工.其中，第1章、第5章由戴立辉编写，第2章由吴亭编写，第3章由林大华编写，第4章由吴霖芳编写，第5章由陈翔编写，各章自我检测题及答案与提示也由各章作者给出，模拟试卷及答案与提示、近3年硕士研究生入学统一考试数学试题(线性代数部分)以及解答由林大华编写，林秀清、唐晓文参与了本书编写大纲的讨论与制定工作，并对各章的编写提出了具体的意见和建议.全书由林大华主编并统稿.

在本书编写过程中，陈纪阳教授对本书进行了深入细致的审查，提出了许多宝贵的修改意见和建议.对陈纪阳教授的热心指导，我们在此表示诚挚的谢意！同时，对关心和支持我们本书编写工作的各单位领导、专家一并表示衷心的感谢！

由于作者水平与学识有限，本书疏漏与错误之处在所难免，恳请大家批评指正.

林大华

2007年7月

目　　次

第1章　行列式

1.1　内容精要

排列，排列的逆序数，行列式的概念，行列式的性质，行列式的计算.

1.2　知识脉络图

行列式
- 排列，排列的逆序数，奇(偶)排列
- n 阶行列式的定义：$D=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，$\tau$ 为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数（不同行、不同列的 n 个元素乘积的代数和）
- 性质
  - 两个“翻”：全翻（转置）不变，部分翻（交换）变号
  - 三个“零”：某行(列)元素全为零，两行(列)对应位置元素相等，两行(列)对应位置元素成比例
  - 三个“可性”：可提性，可分性，可加性
- 展开式
  - 按行(列)展开：$D=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}$
  - 拉普拉斯展开：$D=\sum\limits_{i=1}^{t}M_iA_i$
- 计算方法
  - 基本方法：定义法，三角形法，展开法
  - 特殊方法：对角线法则，范德蒙德行列式，递推公式，数学归纳法，加边法，拆开法，三对角行列式等

1.3　疑难解答

1. 怎样求一个 n 级排列的逆序数？

答　有两种计算 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 的方法：

(1) $\tau(i_1i_2\cdots i_n)=$（比 i_1 大且排在 i_1 前面的数的个数）$+$（比 i_2 大且排在 i_2 前面的数的个数）$+\cdots+$（比 i_n 大且排在 i_n 前面的数的个数）；

(2) $\tau(i_1i_2\cdots i_n)=$（比 i_1 小且排在 i_1 后面的数的个数）$+$（比 i_2 小且排在 i_2 后面的数的个数）$+\cdots+$（比 i_{n-1} 小且排在 i_{n-1} 后面的数的个数）.

2. 如何理解行列式的定义？

答 n 阶行列式有两种定义，一种是"排列逆序"定义，另一种是归纳定义.

(1) 在 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 的"排列逆序"定义中，

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

式中，τ 是排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

此定义中应注意以下三点：

① 和式记号 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 是对所有的 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和，因 n 个不同元素的全排列数是 $n!$，于是该和式共有 $n!$ 项；

② 和式中的任一项是取自 D 中不同行、不同列的元素之积，这样不同行、不同列的 n 个元素之积共有 $n!$ 个；

③ 和式中的任一项都带有符号 $(-1)^{\tau}$，τ 是排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数，即根据排列的逆序数为偶数或奇数，该项依次取"+"或"-"，其中有 $\frac{n!}{2}$ 个偶排列，$\frac{n!}{2}$ 个奇排列；

由上所述可知，n 阶行列式 D 恰好是 D 的不同行、不同列的 n 个元素之积的代数和，是一个"积和式"，其中一半带有正号，一半带有负号.

(2) n 阶行列式有以下归纳定义.

对由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的 n 阶行列式 D，当 $n=1$ 时，$D=|a_{11}|=a_{11}$；当 $n\geqslant 2$ 时，$D=\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$，其中

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 a_{1j} 的余子式，$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$ 为 a_{1j} 的代数余子式.

一般地，若用"排列逆序"定义行列式，则归纳定义就成为行列式按一行展开的性质.

3. 为什么说在一个 n 阶行列式 D 中等于零的元素的个数大于 n^2-n，则行列式 D 的值等于零？

答 n 阶行列式 D 中共有 n^2 个元素，若 n^2 个元素中等于零的元素的个数大于 n^2-n，则不等于零的元素的个数就小于 $n^2-(n^2-n)=n$，即 D 中不等于零的元素最多有 $n-1$ 个，而 n 阶行列式的每一项是取自不同行、不同列的 n 个元素之积，所以 D 的每一项中至少有一个元素为"0"，故 D 的值等于零.

4. 余子式与代数余子式有什么特点？它们之间有什么联系？

答 n 阶行列式 D 的元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 和代数余子式 A_{ij} 仅与 a_{ij} 所在的位置有关，而与元素 a_{ij} 及其所在的行、列的其他元素无关.

它们之间的关系是 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，当 $i+j$ 为偶数时，二者相同；当 $i+j$ 为奇数时，二者相反.

5. 计算行列式一般有哪些方法？

答 (1) 特殊情形. 对二、三阶行列式可应用对角线法则计算；上(下)三角形行列式(即对角线以下(上)的元素都为"0"的行列式)以及对角行列式(即对角线以外的元素都为"0"的行列式)等于对角线上元素的乘积.

(2) 常见情形. 利用行列式性质及按行(列)展开降阶计算或利用性质化为上(下)三角行列式计算；拆开法；加边法(升阶法).

(3) 利用拉普拉斯展开定理.

(4) 化为范德蒙德(Vandermonde)行列式来计算.

(5) 递推公式法. 对 n 阶行列式 D_n，找出 D_n 与 D_{n-1} 或 D_n 与 D_{n-1}，D_{n-2} 之间的一种关系，建立递推公式，其中 D_n，D_{n-1}，D_{n-2} 等结构相同，再利用该递推公式即可求出 D_n.

(6) 数学归纳法. 计算 $n=1,2$ 时 D_1，D_2 成立；再假设 $n=k$ 时 D_k 成立，然后证明 $n=k+1$ 时 D_{k+1} 成立.

1.4 例题精选

例 1 求排列 $n(n-1)\cdots 3\ 2\ 1$ 的逆序数，并讨论其奇偶性.

解 因为

比 n 大且排在 n 前面的数有 0 个；

比 $(n-1)$ 大且排在 $(n-1)$ 前面的数有 1 个；

比 $(n-2)$ 大且排在 $(n-2)$ 前面的数有 2 个；

……

比 2 大且排在 2 前面的数有 $(n-2)$ 个；

比 1 大且排在 1 前面的数有 $(n-1)$ 个.

所以，所求排列的逆序数为

$$\tau(n(n-1)\cdots 3\ 2\ 1)=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

易见，当 $n=4k,4k+1$ 时，该排列是偶排列；当 $n=4k+2,4k+3$ 时，该排列是奇排列.

例 2 证明在全部 n 级排列中,奇、偶排列的个数相等,各有$\frac{n!}{2}$个.

证明 设在 $n!$ 个 n 级排列中,共有 s 个奇排列,t 个偶排列.

将 s 个奇排列都作同一的对换,s 个奇排列均变为偶排列,因此 $s \leqslant t$. 同理,对每个偶排列都作同一对换,则 t 个偶排列均变为奇排列,因此 $t \leqslant s$.

因此,$s=t$,奇、偶排列的个数相等,各有$\frac{n!}{2}$个.

例 3 用行列式定义计算下列行列式.

(1) $D_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$; (2) $D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

(3) $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

解 (1) $D_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}&=1\times2\times4+(-1)\times1\times(-2)+2\times3\times1-1\times1\times1\\&\quad-(-1)\times3\times4-2\times2\times(-2)\\&=8+2+6-1+12+8=35.\end{aligned}$$

(2) 按定义,D_5 是 $5!=120$ 项的代数和,而每项均由不同行、不同列的 5 个元素之积并冠以"+"号或"−"号构成.

而第 1,4,5 行中,不同列的非零元素只有两个,即在第 1,4,5 行中,不同列的三个元素至少有一个为零,故 $D_5=0$.

(3) D_n 仅有位于不同行、不同列的 n 个非零元素,即

$$a_{1,n-1}=1,\quad a_{2,n-2}=2,\quad \cdots,\quad a_{n-1,1}=n-1,\quad a_{nn}=n.$$

因此,D_n 的 $n!$ 项中仅有一项非零,故

$$D_n=(-1)^{\tau((n-1)(n-2)\cdots 2\ 1\ n)}a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn}.$$

因为

$$\tau((n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot n)=(n-2)+(n-3)+\cdots+3+2+1+0=\frac{(n-2)(n-1)}{2},$$

所以

$$D_n=(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}n!.$$

例 4 已知 $f(x)=\begin{vmatrix}5x & 1 & 2 & 6\\ x & x & 1 & 2\\ 1 & 2 & x & 6\\ x & 1 & 2 & 3x\end{vmatrix}$，试求 $f(x)$ 中包含 x^4 的项和包含 x^3 的项.

分析 $f(x)$ 中包含 x^4 的项仅有主对角线上 4 个元素之积，若第 1 列不取 $5x$，而取另两个 x 之一，则该项至多取主对角线上的两个含 x 的元素，即至多含 x^3.

$f(x)$ 中包含 x^3 的项只有两种情形，在第 1 列中取第 2 行和第 4 行元素.

解 $f(x)$ 中包含 x^4 的项为

$$(-1)^{\tau(1\,2\,3\,4)}5x\cdot x\cdot x\cdot 3x=15x^4,$$

包含 x^3 的项为

$$(-1)^{\tau(2\,1\,3\,4)}1\cdot x\cdot x\cdot 3x+(-1)^{\tau(1\,2\,3\,1)}6\cdot x\cdot x\cdot x=-3x^3-6x^3=-9x^3.$$

例 5 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix}2 & 3 & 2 & 1\\ 1 & 4 & -6 & 1\\ 2 & 1 & 7 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 2\end{vmatrix}$.

分析 对于元素是数字的行列式，通常运用行列式的性质将其化为三角行列式来计算，或将其某一行(列)化成有较多 0 元素之后，再按该行(列)展开降阶.

解法 1(化为三角形行列式)

$$D_4\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_4}-\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 4 & -6 & 1\\ 2 & 1 & 7 & 1\\ 2 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+2r_1]{\substack{r_2+r_1\\ r_4-r_3}}-\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 4 & -5 & 3\\ 0 & 1 & 9 & 5\\ 0 & 2 & -5 & 0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-2r_2]{r_3-4r_2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -41 & -17 \\ 0 & 0 & -23 & -10 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-2r_4}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -23 & -10 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+4r_3} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+2r_4}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-3r_3} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{vmatrix}$$

$$=-19.$$

解法 2(利用行列式的展开定理逐次降阶)

$$D_1 \xlongequal[c_4+2c_1]{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & 9 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & -5 & 3 \\ 1 & 9 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-5c_1]{c_2-9c_1} \begin{vmatrix} 3 & -23 & -10 \\ 4 & -41 & -17 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -23 & -10 \\ -41 & -17 \end{vmatrix} = -19.$$

注 上述两种解法是计算数字行列式常用的方法.

例 6 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

分析 这是一个以数字 $0,1,2,\cdots,n-1$ 为元素,且相邻两行(列)对应元素相差 1 的 n 阶行列式,可将它化为三角形行列式来计算.

解

$$D_n \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{r_i-r_{i+1}} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=2,3,\cdots,n]{c_j+c_1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -2 & \cdots & -2 & 0 \\ n-1 & 2n-3 & 2n-4 & \cdots & n & n-1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

注 根据行列式的特点，利用行列式的性质，将 n 阶行列式的计算转化为上(下)三角行列式的计算，这是计算 n 阶行列式常用的方法之一. 下面再举例加以说明.

例 7 计算行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}，其中，a_1a_2\cdots a_n\neq 0.$$

分析 因为 D_{n+1} 主对角线上的元素非零，可利用行列式性质将第 1 列(行)除第 1 个元素外的其他元素化为零，把行列式变成上(下)三角行列式，从而可计算出行列式的值.

解 $$D_n \xlongequal[j=2,3,\cdots,n]{c_1-\frac{c_{j-1}}{a_{j-1}}c_j} \begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{c_jb_j}{a_j} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_0 a_1 a_2 \cdots a_n - \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j b_j}{a_j}\right) a_1 a_2 \cdots a_n.$$

注 本例中的行列式常称为“爪形”行列式，即非零元素在爪形三线段上，三线段以外的元素均为零；“爪形”行列式是“三对角”行列式中的一种，常用的计算方法是把它化为三角形行列式.

例 8 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}$$

分析 该行列式的特点是：各行(列)的元素之和相同，且各列除主对角线上的元素外均相同，可考虑下面方法求解.

解法 1 从第 2 列起将各列加到第 1 列，然后从第 2 行起各行加上第 1 行的 (-1)倍，得

$$D_n = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - m & x_2 - m & x_3 & \cdots & x_n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - m & x_2 & x_3 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m\right)(-m)^{n-1}.$$

解法2 把行列式的第1行乘以(-1)分别加到第$2,3,\cdots,n$行上去，然后依次将第$1,3,\cdots,n$列加到第1列，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ m & -m & 0 & \cdots & 0 \\ m & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}x_i-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$$

$$=(\sum_{i=1}^{n}x_i-m)(-m)^{n-1}.$$

解法3 构造与D_n等值的$(n+1)$阶行列式D_{n+1}

$$D_n=D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix},$$

将行列式的第1行乘以(-1)分别加到第$2,3,\cdots,n+1$行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & -m & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}.$$

(1) 当$m\neq 0$时，依次将第$2,3,\cdots,n+1$列乘$\frac{1}{m}$加到第1列，得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{m} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$$

$$= \left(1-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{m}\right)(-m)^n = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m\right)(-m)^{n-1}.$$

（2）当 $m=0$ 时，显然有 $D_n=0$.

由(1)、(2) 可知

$$D_n = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m\right)(-m)^{n-1}.$$

注 本例中的解法 1 和解法 2 是常用的三角形行列式法，而解法 3 常称为“加边法”.

例 9 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda & x & x & \cdots & x \\ y & \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ y & \beta & \alpha & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix} \quad (n\geqslant 2).$$

分析 这个行列式大部分元素相同，所以问题的关键是想办法变换出尽可能多的零.

解 从第 2 行开始，各行都减去第 n 行，然后从第 2 列开始，各列都加到最后一列，再按第 1 列展开，得

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda & x & x & \cdots & x & x \\ 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & \beta-\alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & \beta-\alpha \\ y & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{vmatrix}$$