国家级精品课程教材

高职高专公共基础课“十一五”规划教材

应用数学

YINGYONG SHUXUE

侯风波 相秀芬 ◎ 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

国家级精品课程教材

高职高专公共基础课“十一五”规划教材

应用数学

主编　侯风波　相秀芬

参编　李仁芮　唐世星　张红玉

机械工业出版社

本书是根据教育部等七部门关于两年制高等职业教育制造业和现代服务业技能型紧缺人才培养指导方案的有关精神，在充分研究当前我国高职高专教育现状，认真总结、分析、吸收国内外高等职业教育高等数学教学改革经验的基础上编写的. 其内容包括函数、极限与连续，导数与微分，导数应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，多元函数微分学，数学软件包 Mathematica 及其应用等共八章. 书后附有习题答案、数学软件包 Mathematica 常用系统函数、初等数学常用公式、常用平面曲线及其方程、积分表等五个附录. 本书特别注意培养学生用数学的思想、概念、方法消化吸收工程概念和工程原理的能力；把实际问题转化为数学模型的能力；利用计算机和数学软件包求解数学模型的能力以及创造性思维能力. 本书注意把课程的每一主题都尽量从几何、数值、代数、词语四方面加以体现，可读性强. 本书注重突出概念、淡化运算、强化应用、删繁求简，符合高职学生认知特点. 讲完全书约需 68 学时.

本书配有开放式的电子教案和供学生自测练习用的助学课件.

本书可作为两年制高职高专工科各专业通用高等数学教材，也可作为工程技术人员的高等数学知识更新用书.

图书在版编目(CIP)数据

应用数学/侯风波，相秀芬主编. —北京：机械工业出版社，2006.6

国家级精品课程教材. 高职高专公共基础课“十一五”规划教材

ISBN 7-111-19051-3

Ⅰ.应… Ⅱ.①侯…②相… Ⅲ.应用数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 041365 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑：王世刚 宋学敏 版式设计：霍永明 责任校对：刘志文

责任编辑：宋学敏 封面设计：王伟光 责任印制：李 妍

北京铭成印刷有限公司印刷

2006 年 6 月第 1 版第 1 次印刷

169mm×239mm·7.125 印张·277 千字

0001—8000 册

定价：20.00 元

前　言

教材作为学校教学内容和教学方法的知识载体，在深化教育教学改革、全面推进素质教育、培养创新人才中有着举足轻重的地位．随着高等教育的蓬勃发展，高校教学改革在不断地深入进行．本书是为了适应我国高等职业教育学制“3转2”的要求和高等职业教育培养高技能人才的需要，适应高等职业教育大众化发展趋势的现实，更好地贯彻《中共中央、国务院关于进一步加强人才工作的决定》提出的“实施国家高技能人才培训工程和技能振兴行动，通过学校教育培养、企业岗位培训、个人自学提高等方式，加快高技能人才的培养”和教育部等七部门《关于进一步加强职业教育工作的若干意见》(教职成[2004]12号)：“职业院校制造业与现代服务业技能型紧缺人才培养培训计划”、“国家高技能人才培训工程”、“三年五十万新技师培养计划”、“农村劳动力转移培训计划”的有关精神，在认真总结全国高职高专院校工科类各专业高等数学课程教学改革经验的基础上，编写的两年制高职高专教育高等数学课程教材．

自1993年以来，本书作者开始围绕着承德石油高等专科学校国家级试点专业“内燃机专业”的专业教学改革进行高等数学系列课程的教学内容、教学体系、教学方法以及教学手段的教学改革．多年来，一直坚持高职高专院校数学课程必须为培养应用性人才服务的基本教学理念，积极进行数学课程的改革与建设，并取得了一系列的优秀成果．2004年我校高等数学课程被评为国家级精品课程，经过多年教学实践，我们认识到：高职高专院校高等数学课程教育必须注意培养学生四方面的能力：一是用数学的思想、概念、方法消化吸收工程概念和工程原理的能力；二是把实际问题转化为数学模型的能力；三是求解数学模型的

能力；四是创造性思维的能力．培养学生用数学的思想、概念、方法消化吸收工程概念和工程原理的能力，必须重视数学概念的教学；培养学生把实际问题转化为数学模型的能力，必须重视数学建模训练；培养学生求解数学模型的能力，必须结合计算机和数学软件包进行数学教学．另外，数学是最好的思维体操，作为数学教师应有意识地去结合教学内容培养学生的逻辑思维、类比思维、发散思维及联想思维等各种思维能力，帮助他们欣赏数学美．进而，培养学生的创新能力．根据上述教学理念，结合我国两年制高等职业教育高等数学课程教育教学的实际情况，在本书的编写过程中不但注意继承保留了自己取得的《高等数学》教材建设成功经验，而且在如下七个方面给予了特别关注．

1．注重以实例引入概念，并最终回到数学应用的思想，加强学生对数学的应用意识、兴趣及能力培养．培养学生用数学的原理和方法消化吸收工程概念和工程原理的能力，消化吸收专业知识的能力．加强数学建模教学内容，将工程问题转化为数学问题的思想贯穿各章，注意与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练，但不追求过分复杂的计算和变换．

2．注重研究新形势下高等职业教育高等数学教学的质量观，恰当把握教学内容的深度和广度，遵循基础课理论知识以必需够用为度的教学原则，不过分追求理论上的严密性，尽可能显示微积分的直观性与应用性，适度注意保持数学自身的系统性与逻辑性．渗透现代化教学思想和教学手段，力求做到易教、易学、易懂．

3．注意数学软件包 Mathematica 的引入，并结合具体教学内容在本书最后一章中处理，方便于教学的组织．

4．充分考虑高职高专学生特点，便于学生自学，以符合高职高专学生的认知结构．在内容处理上兼顾对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、自学能力、以及较熟练的运算能力和综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力培养．对课程的每一主题都尽量从几何、数值和解析三个方面加以体现，避免只注重解析推导．

5．注意有关概念及结果的实际情况解释，力求表述确切、思路清晰、通俗易懂，并注重数学思想与方法的阐述．注意培养学生的综合素质，体

现数学课程改革的新思路．数学教学不仅要具备工具功能，而且还要具备思维训练和文化素质教育的功能，也就是要立足于综合素质教育，重视培养学生的科学精神、创新意识和综合运用数学解决实际问题的能力．

6．在每章或每节开始，用尽可能短的语言点题，以使读者了解本章或本节所研究的问题的来龙去脉，起到承上启下的作用，增加可读性．

7．精心设计编写了全书的例题、习题、思考题，使知识点、例题、习题由易到难，努力使例题与知识点对应、习题与例题对应、思考题与知识点对应；通过思考题启发学生思维，帮助学生换个角度去理解知识点．每节后都配有富有启发性的思考题和与知识点对应的简单练习题．学生独立完成每节后的练习题即可达到高等数学课程的基本教学要求．每章后配有综合性的习题，供学有余力的同学和习题课教学选用．

全书内容包括函数、极限与连续，导数与微分，导数应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，多元函数微分学，数学软件包 Mathematica 及其应用共八章，为两年制高职必学．为方便使用，书后附有习题答案、数学软件包 Mathematica 常用系统函数、初等数学常用公式、常用平面曲线及其方程以及积分表等五个附录．

为增加学生的动手机会，培养学生动手能力，特建议学时分配如下：每节讲授 2 学时，前七章每章安排一次习题课，第八章安排 4 学时上机训练．计理论教学 50 学时，习题课 14 学时，上机 4 学时．总计 68 学时．

本书作为高等职业院校两年制工科专业的高等数学课程教材，之所以用“应用数学”作为其书名，目的是突出高等数学的应用性，在教学过程中时刻提醒教师和学生，学数学是为了用数学、用数学解决实际问题．

本书由侯风波、相秀芬担任主编．参加本书编写的有侯风波、相秀芬、李仁芮、唐世星、张红玉．本书框架结构及统稿、定稿由侯风波完成．

衷心地希望得到专家、同行和读者的批评指正，以使本书在教学实践中不断完善．

侯风波

2006 年春

目　录

第一章　函数、极限与连续

本章介绍高等数学中几个最重要的基本概念——函数、极限与连续. 函数是高等数学研究的对象. 极限是研究高等数学的工具. 连续函数是一类非常常见的函数.

第一节　函　　数

在中学阶段已经学习过函数的概念，也对常函数、幂函数、指函数、对数函数、三角函数、反三角函数的定义及其性质有了一定的了解. 在高等数学中，将要重点学习函数的变化率(导数)、函数增量的近似值(微分)、函数的单调性，函数的极值与最值等在工程技术中有重要应用的概念与方法. 所有这些都以函数为研究对象. 本节将对函数的一些基本概念进行必要的明确.

一、函数的定义

设有两个变量 x 和 y，D 是一个给定的非空数集，若对于任意的 $x\in D$，变量 y 按照一定规则 f 有唯一确定的数值与之对应，则称 f 是定义在数集 D 上的函数，也称 y 是 x 的函数. 记成 $y=f(x)$，其中，x 叫做自变量，y 叫做因变量，D 称为函数的定义域.

当自变量 x 在定义域 D 内取定一个数值 x_0 时，因变量 y 按照法则 f 的对应值 y_0 称为函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的函数值，记为$f(x_0)$或 $y\big|_{x=x_0}$；并称 $N=\{f(x)\mid x\in D\}$为函数 f 的值域.

函数概念中包含两个要素，一是定义域 D；一是对应规律，用“f”，“φ”，“F”等符号表示. 所以，仅当两个函数定义域和对应规律都一致时，才能说这两个函数是相同的. 例如 $\ln x^2$ 与 $2\ln x$ 就不是相同的函数，而 $W=\sqrt{u}$ 和$y=\sqrt{x}$ 却是相同的函数.

例 1　求函数 $y=\sqrt{1-x}+\ln\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$的定义域.

解　为使函数 $y=\sqrt{1-x}+\ln\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$有意义，需要$\sqrt{1-x}$和 $\ln\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$均有意义. 为使$\sqrt{1-x}$ 有意义，需要 $1-x\geqslant 0$，即 $x\leqslant 1$，也即 $x\in(-\infty,1]$；为使 $\ln\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$有意义，需要 $x-\dfrac{1}{2}>0$，即 $x>\dfrac{1}{2}$，亦即 $x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$. 因此，

$x\in\left(\frac{1}{2},1\right]$时，所给函数才有意义．所以，$\left(\frac{1}{2},1\right]$为函数 $y=\sqrt{1-x}+\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)$的定义域．

例 2 将周长为 10cm 的矩形之面积表示为矩形宽 x 的函数．

解 设矩形的长为 y，则有

$$2x+2y=10,$$
$$y=5-x.$$

所以，矩形的面积

$$S=x(5-x),$$

定义域为$(0,5)$．

注意 求由解析式表达的函数之定义域，要考虑使该解析式有意义的点集，如例 1；求实际问题中函数的定义域，不但要考虑使表达式有意义，还要关注自变量的实际意义，如例 2 中宽 x 的取值范围限制在开区间$(0,5)$内才有意义．

已经知道，函数表示法有三种，即：列表法、图像法和解析法．本课程以解析法为主(便于理论讨论)，辅以图像法(直观、形象)，但也要注意函数的图形．

例 3 写出如图 1-1 所示$u(t)$与时间 t 的函数关系．

解

$$u(t)=\begin{cases}Et & 当\ 0\leqslant t<1\\ -E(t-2) & 当\ 1\leqslant t<2\\ 0 & 当\ 2\leqslant t\leqslant T\end{cases}.$$

该函数$u(t)$定义域为 $D=[0,T]$，但它在定义域内不同区间上是用不同解析式来表示的，这样的函数称为**分段函数**．

分段函数需分段求值，分段作图．

需要强调的是：这是定义在$[0,T]$上的一个函数，而不是几个函数．

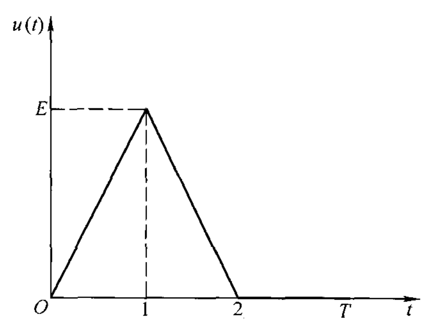


图 1-1

二、函数的几种特性

下面是表现函数一般特性的几个方面．

(1) 有界性　设函数$f(x)$的定义域为 D．若存在正数 M 使得对任意 $x\in D$，均有$|f(x)|\leqslant M$，则称$f(x)$在 D 上有界．

如：$f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界，而$\varphi(x)=\frac{1}{x}$在$(0,1)$内无界．

(2) 单调性　设$f(x)$在区间 D 内有定义．如果对于区间$I(I\subset D)$内任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，若$f(x_1)<f(x_2)$，则称$f(x)$在 I 内单调增加；若$f(x_1)>f(x_2)$则称$f(x)$在 I 内单调减小．

如果函数$f(x)$在区间 I 内单调增加(或单调减小)，则称$f(x)$是区间 I 内的单调增(或单调减)函数，并称 I 为单增(或单减)区间.

例 4 根据函数$f(x)$的图形(图 1-2)写出$f(x)$的单增区间和单减区间.

解 由图 1-2 可知，函数$f(x)$的单增区间有$[-1,0)$和$[0,2]$；单减区间为$[2,3]$.

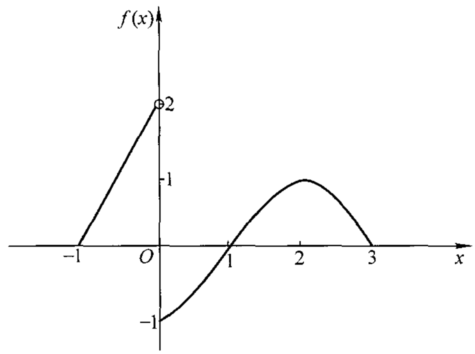


图 1-2

(3) 奇偶性 设函数$f(x)$的定义域 D 是关于坐标原点对称的，对于任意 $x\in D$，都有

$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数；

$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数.

(4) 周期性 设函数$f(x)$的定义域为 D，如果存在一个正常数 T，使得对于任何 $x\in D$，均有 $x\pm T\in D$，且使

$$f(x\pm T)=f(x)$$

成立，则称$f(x)$为周期函数，周期函数的周期通常指它的最小正周期.

三、初等函数

1. 基本初等函数

下述六类函数称为基本初等函数：

常数函数 $y=C$

幂函数 $y=x^{\alpha}$ (α 为实数)

指数函数 $y=a^{x}$ $(a>0,a\neq 1)$

对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1)$

三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$

反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$

这些函数的性质与图形在中学都已学过，今后会经常用到它们.

2. 复合函数

将基本初等函数进行四则运算可以得出新的函数. 除此之外，还可以将基本初等函数进行“复合”，构造成新的函数，例如：$y=\sin x^2$ 就是由 $y=\sin u$ 与 $u=x^2$ 复合而成的.

一般说来，设 $y=f(u)$，其中 $u=\varphi(x)$，且$\varphi(x)$的值全部或部分落在$f(u)$的定义域内，则称 $y=f[\varphi(x)]$为 x 的复合函数，而称 u 为中间变量.

由上述定义知，复合函数$f[\varphi(x)]$的定义域或者与$\varphi(x)$定义域相同，或者只是它的一部分.

例 5 函数 $y=\sqrt{3-x^2}$是由 $y=\sqrt{u}$及$u=3-x^2$ 复合而成的. 它的定义域为$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$.

例 6 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 是不能复合成一个函数的. 因为对于 $u=2+x^2$，$x\in(-\infty,+\infty)$内的任何 x 值所对应的 u 都大于或等于 2，都不能使 $y=\arcsin u$ 有意义.

将一个复合函数熟练地分解为简单函数(基本初等函数或它们的四则运算)对以后学习非常重要，分解的方法是将复合函数由外到里“层层剥皮”，如下例所示.

例 7 分析复合函数 $y=\mathrm{e}^{-x^2+1}$的复合结构.

解 $y=\mathrm{e}^{-x^2+1}$可以看成由 $y=\mathrm{e}^u$ 和 $u=-x^2+1$ 复合而成的复合函数.

3. 初等函数

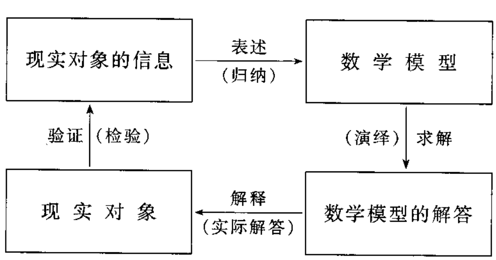
由基本初等函数经过有限次四则运算及复合步骤所构成并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

今后我们讨论的函数，绝大多数都是初等函数.

四、数学模型

数学模型 是指对于现实世界的某一特定对象，为了一个特定的目的，根据特有的内在规律，做出必要的简化和假设，运用适当的数学工具，采用数学语言，概括或近似地表述出来的一种数学结构. 它或者能解释特定对象的现实状态，或者能预测对象的未来状态，或者能提供处理对象的最优决策或控制. 数学模型既源于现实又高于现实，它不是实际的原型，而是一种模拟，在数值上可以作为公式应用，并推广到与原物相近的一类问题，也可以作为某事物的数学语言，译成算法语言，编写程序并输入计算机.

建立一个实际问题的数学模型，需要一定的洞察力和想像力，筛选并摒弃次要因素，突出主要因素，作出适当的抽象和简化，全过程一般分为表述、求解、解释、验证几个阶段，并且通过这些阶段完成从现实对象到数学模型，再从数学模型到现实对象的循环. 可用流程图表示如下：



表述 是指根据建立数学模型的目的和掌握的信息，将实际问题翻译成数学问题，用数学语言确切地表述出来.

这个过程是一个关键的过程，需要对实际问题进行分析，甚至要做调查研究，查找资料，对问题进行简化、假设、数学抽象，运用有关的数学概念、数学符号和数学表达式去表现客观对象及其关系．如果现有的数学工具不够用时，可根据实际情况，大胆创造新的数学概念和方法去表现模型．

求解　是指选择适当的方法，求得数学模型的解答．

解释　是指通过数学解答翻译回现实对象，给出实际问题的解答．

验证　是指检验解答的正确性．

通常把由一个解析式 $y=f(x)$ 所描述的数学模型称为函数模型．建立函数模型的步骤可分为：

1）分析问题中哪些是变量，哪些是常量，分别用字母表示．

2）根据所给条件，运用几何、物理、经济等知识，确定等量关系．

3）具体写出解析式 $y=f(x)$，并指明定义域．

例 8　重力为 P 的物体置于地平面上，设有一与水平方向成 α 角的拉力 $\boldsymbol{F}$，使物体由静止开始移动，求物体开始移动时拉力 $\boldsymbol{F}$ 的模 F 与角 α 之间的函数模型(图 1-3)．

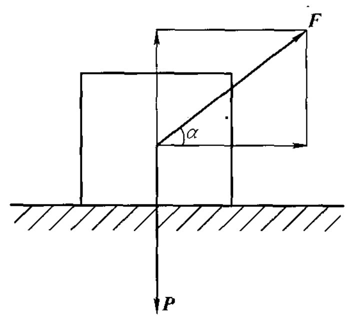


图　1-3

解　由物理知识可知，当水平拉力与摩擦力平衡时，物体开始移动，而摩擦力是与正压力 $P-F\sin\alpha$ 成正比的，设摩擦系数为 μ，故有

$$F\cos\alpha=\mu(P-F\sin\alpha),$$

即

$$F=\frac{\mu P}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\quad(0^\circ<\alpha<90^\circ).$$

建立函数模型是一个比较灵活的问题，无定法可循，只有多做练习才能逐步掌握．

例 9　在金融业业务中有一种利息叫做单利．设 p 是本金，r 是计息期的利率，c 是计息期满应付的利息，n 是计息期数，I 是 n 个计息期(即借期或存期)应付的单利，A 是本利和．求本利和 A 与计息期数 n 的函数模型．

解　计息期的利率 $=\dfrac{\text{计息期满的利息}}{\text{本金}}$，即 $r=\dfrac{c}{p}$，由此得

$$c=pr.$$

单利与计息数成正比，即 n 个计息期应付的单利 I 为

$$I=cn.$$

因为

$$c=pr,$$

所以

$$I=prn.$$

本利和为

$$A=p+I,$$

即

$$A=p+prn.$$

可得本利和与计息期数的函数关系，即单利模型 $A=p(1+rn)$.

思考题 1.1

1. 举例说明有相同定义域和值域的两个函数，不一定是相同函数.

2. 任意两个函数相加都能得到一个新的函数吗？请给出两个函数之加、减、乘、除(即两个函数四则运算)的一般定义.

练习题 1.1

1. 设 $f(x)=\sqrt{x}$，$g(x)=\sqrt{-x}$，求函数 $f(x)+g(x)$ 的定义域和值域.

2. 设 $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\ln\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$，试求 $f(x)$ 的定义域.

3. 试将表面积为 $100\pi\text{cm}^2$ 的圆柱体的体积表示成其底面半径的函数，并指出定义域.

4. 求由 $y=u^2$，$u=\mathrm{e}^v$，$v=\sin x$ 复合而成的复合函数.

5. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的？

(1) $y=(1-2x)^{100}$；　(2) $y=\mathrm{e}^{-2x^2}$；

(3) $y=\sin(2x+5)$；　(4) $y=\ln(2+x^2)$；

(5) $y=\sin\cos x^2$；　(6) $y=\sqrt{\ln x}$.

6. 将绝对值函数 $y=|x|$ 用分段函数表示出来，并画出其图形.

7. 指出图 1-4 中所示函数 $f(x)$ 的单增区间和单减区间.

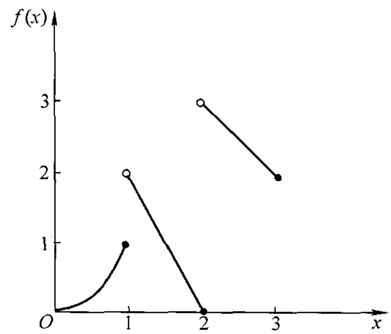


图　1-4

8. 请调查 2006 年 1 月 1 日后我国公民工资收入所得税的扣交办法. 试将每月工资收入为 x 元人民币的工人应交的所得税表示成分段函数.

第二节　极限的概念

极限方法是高等数学中一种基本的分析方法. 所谓极限方法，就是通过考察变量的无限变化趋向来解决初等数学所不能解决的问题. 高等数学中的许多重要概念和运算都是以极限的方法为基石建立起来的.

一、函数的极限

什么是极限？粗略地说，极限就是一个数，是在某个变化过程中，函数能无限接近的一个数.

引例 1　当 x 的绝对值无限增大(记为 $x\to\infty$,读作 x 趋近于无穷)时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 无限接近于 0，常数 0 就是函数 $\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，如图 1-5 所示.

引例 2 当 x 无限接近于 1 (即 $|x-1|$ 无限接近于 0)时，记为 $x \to 1$，读作 x 趋于 1，函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 无限接近于 2，所以 2 就是函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 当 $x \to 1$ 时的极限．如图 1-6 所示．

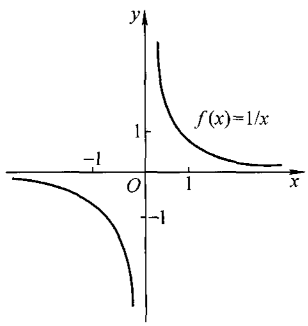


图 1-5

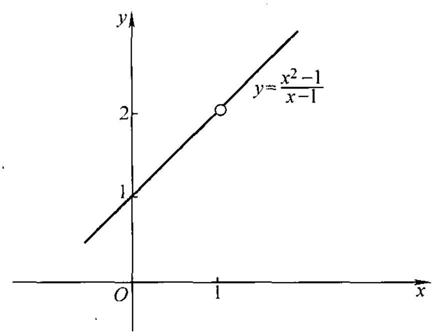


图 1-6

函数 $f(x)$ 的变化，总是发生在自变量 x 的某个特定变化过程中．一般说 x 变化过程有两种状态：一种是 x 趋近于定值 x_0，记为 $x \to x_0$；另一种是 x 绝对值无限增大，记为 $x \to \infty$．

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 x_0 为中心的某个去心邻域 $N(\hat{x}_0,\delta)$㊀内有定义，如果当 x 从 x_0 的左右两侧均无限接近于 x_0 时，有函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限．记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A .$$

类似地，可定义 x 绝对值无限增大时，$f(x)$ 的极限

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A .$$

上述两种自变量的变化过程中，极限的直观意义如图 1-7 及图 1-8 所示．

为了正确理解极限的概念，我们再指出如下几点：

1）在一个变量前加上记号“lim”，就表示这个变量已取过极限了，也就是说，所指的不再是这个变量本身，而是指它的极限，变量所无限接近的那个定值．

例如：设 A 表示圆面积，S_n 表示圆内接正 n 边形面积，则知不管 n 多大，总有 $S_n \approx A$，但 S_n 取极限“$\lim\limits_{n \to \infty} S_n$”，它就不再是 S_n 了，而是它的极限——圆面积 A 了．所以，这时表达式 $A = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ 不含任何近似成份．

㊀ x_0 为中心的去心邻域 $N(\hat{x}_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$，或用区间表示为 $N(\hat{x}_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$．

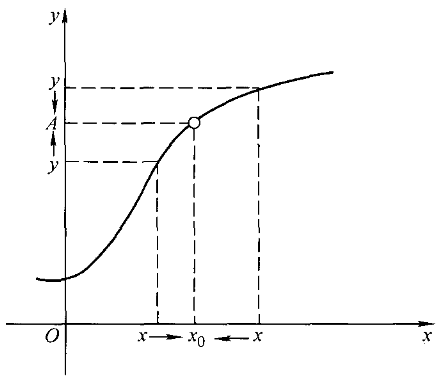


图 1-7

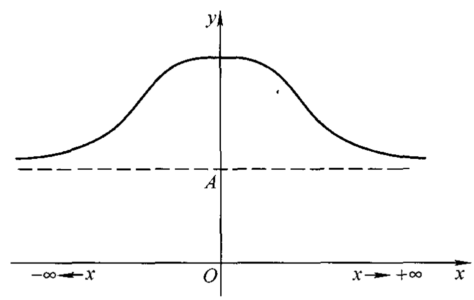


图 1-8

2）在极限过程 $x \to x_0$ 中考察 $f(x)$ 时，只要求 x 充分接近 x_0 时 $f(x)$ 的值存在，至于 $x = x_0$ 时或远离 x_0 时 $f(x)$ 取值如何是毫无关系的，如引例 2.

为什么要研究极限呢？这是因为许多量的数值只有通过极限才能描述或计算，下面举例说明.

例 1　求自由落体 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 在 t_0 时刻的速度 v_0.

解　这里不能简单地用匀速运动 $\frac{s}{t}$ 来求速度 v_0.

为求速度 v_0，让运动从 t_0 时刻开始，在持续了一段时间 t_1 后，物体又运动了 $\frac{1}{2}g(t_0 + t_1)^2 - \frac{1}{2}gt_0^2$，于是这段时间内，物体平均速度为

$$v_{平均} = \frac{\frac{1}{2}g(t_0 + t_1)^2 - \frac{1}{2}gt_0^2}{t_1} = gt_0 + \frac{1}{2}gt_1.$$

当 t_1 不太大时，有 $v \approx v_{平均}$，并且，只要 t_1 足够小，就可以使得 $v_{平均}$ 任意接近 t_0 时刻的速度 v_0. 于是，通过令 $t_1 \to 0$ 对平均速度取极限，就得到了 t_0 时刻的速度 v_0，即

$$v_0 = \lim_{t_1 \to 0} v_{平均} = \lim_{t_1 \to 0}\left(gt_0 + \frac{1}{2}gt_1\right) = gt_0.$$

二、单侧极限

1. 左右极限

在考察 x 无限接近于 x_0 的过程时，有时需要分别考虑 x 仅从左侧趋于 x_0（记为 $x \to x_0^-$）及 x 仅从右侧趋于 x_0（记为 $x \to x_0^+$）两种情况，这时 $f(x)$ 的极限 A 分别称之为**左极限**和**右极限**.

即：左极限　$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$，