普通高校应用学科数学教材系列

概率论与数理统计

GAILÜLUN YU SHULITONGJI

◎ 张 颖 许伯生 主编

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

概率论与数理统计

GAILULUN YU SHULITONGJI

普通高校应用学科数学教材系列

概率论与数理统计

GAILULUN YU SHULITONGJI

◎ 张　颖　许伯生　主编

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/张颖，许伯生主编. —上海：华东理工大学出版社，2007.9
(普通高校应用学科数学教材系列)
ISBN 978-7-5628-2134-2

Ⅰ.概... Ⅱ.①张...②许... Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 116063 号

普通高校应用学科数学教材系列
概率论与数理统计

主　　编/张　颖　许伯生
策划编辑/胡　景　陈新征
责任编辑/胡　景
责任校对/徐　群
封面设计/王晓迪
出版发行/华东理工大学出版社
地址：上海市梅陇路 130 号，200237
电话：(021)64250306(营销部)
传真：(021)64252707
网址：www.hdlgpress.com.cn
印　　刷/上海展强印刷有限公司
开　　本/787 mm×960 mm　1/16
印　　张/18.5
字　　数/375 千字
版　　次/2007 年 9 月第 1 版
印　　次/2007 年 9 月第 1 次
印　　数/1-4 050 册
书　　号/ISBN 978-7-5628-2134-2/O·186
定　　价/26.50 元

内容提要

本书是根据高等学校经济管理类以及工科类各专业概率论与数理统计课程的教学基本要求编写而成的.主要内容包括随机事件与概率,随机变量及其分布,多维随机变量及其分布,随机变量的数字特征,极限定理,数理统计的基本概念,参数估计,统计假设检验,统计分析.各章的每一节后基本上都配有习题,除第五章外,各章最后还配有总习题,所有习题配有参考答案.

本书可作为高等院校经济管理类以及工科类各专业概率论与数理统计课程的教材,也可供有关专业技术人员参考.

前　　言

概率论与数理统计是高等院校理工科、经济管理学科各专业的重要基础课.作为数学的一个重要分支,概率统计在许多领域中有着广泛的应用.本书根据教育部数学与统计学教学指导委员会新近颁布的《本科数学基础课程教学基本要求》,依托原上海工程技术大学数学教学部编写的《线性代数与概率统计》中的概率统计部分编写而成.

在内容上,本书着眼于介绍概率论与数理统计的基本概念、基本理论和基本方法,突出概率统计的基本思想和应用背景,注意培养学生的基本运算能力、分析问题和解决问题的能力.根据编者多年从教的经验,概念或理论的引入大多从具体问题入手,力求深入浅出,循序渐进,清晰易读,既便于教学又方便读者自学.

全书共分九章,主要内容包括随机事件与概率,随机变量及其分布,多维随机变量及其分布,随机变量的数字特征,极限定理,数理统计的基本概念,参数估计,统计假设检验,统计分析等.书中配备了较丰富的例题与习题,习题按节配置,除了基本类型题外,还适当配置一些富于启发性的应用性习题.除了第五章,各章的末尾配有总习题,其中一些习题选自历年全国研究生统一入学考试试题,供读者选用.所有习题配有参考答案.

本书可作为高等院校工科、经济管理学科各专业概率论与数理统计课程的教材,也可供有关专业技术人员参考.

本书的第一章至第五章由张颖编写,第六章至第九章由许伯生编写,书中插图由江开忠制作.本书在编写过程中得到了上海工程技术大学教务处、基础教学学院和数学教学部教师的大力支持,张子厚教授、张学山教授以及田原、王萍、彭利平、沈亦一等教师提出了诸多意见和建议,在此一并表示感谢.

段承后教授详细地审阅了全书,对书稿提出了很多宝贵意见,在此表示衷心感谢.

由于编者水平有限,书中疏漏之处在所难免,敬请读者批评指正.

编　者

2007 年 7 月

目　　录

第一章　随机事件与概率

概率论是研究随机现象客观规律性的一个数学分支. 随着科学技术的不断发展,它的结论与方法已广泛地用于自然科学、社会科学、工程技术、军事和工农业生产中,因此,概率论已经成为科技工作者必备的一种数学工具. 本章介绍概率论中的基本概念、概率的性质以及概率运算的基本公式.

第一节　随 机 事 件

一、随机现象与随机试验

在自然界与人类的社会活动中发生的现象是多种多样的. 这些现象大致可以分为两类,其中有一类现象在一定条件下必然会发生. 例如,向上抛一物体必然要下落;在一个标准大气压下,水在 100℃时要沸腾,等等,我们称这类现象为确定性现象. 然而还存在另一类现象,这类现象在一定的条件下,可能出现这样的结果,也可能出现那样的结果. 例如,上抛一枚硬币落地时是正面朝上还是反面朝上,这在上抛前是无法确定的;打靶时,同一人用同一支枪射击同一目标,由于受到许多因素的影响,各次弹着点不尽相同,在射击之前无法确定弹着点的确切位置. 这类现象在一定的条件下,结果却呈现不确定性. 但人们经过长期实践并深入研究之后发现,多次重复上抛同一枚硬币出现正面朝上的结果大致有一半;多次重复射击的弹着点按照一定规律分布.

这类在个别试验中结果呈现出不确定性,而在大量重复试验中结果又呈现某种规律性的现象称为随机现象,这种内在的规律性称为统计规律性. 概率论和数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

为了揭示随机现象的内在规律,必须进行大量的试验,这里所说的试验应该具有以下的特点:

(1) 可以在相同条件下重复进行;

(2) 试验出现多种可能结果,且这些可能结果在试验前能预先知道;

(3) 每次试验之前不能确定会出现哪一种结果.

在概率论中,称具有上述三个特点的试验为随机试验,简称为试验. 通常记作 E, E_1, E_2,…,等. 本书中以后提到的试验都是指随机试验.

二、样本空间与随机事件

1. 样本空间

对于随机试验,尽管在每次试验之前不能预知试验的结果,但试验的所有可能结果在试验前是已知的.我们将随机试验 E 的每一个可能出现的结果称为样本点,通常用 e_1, e_2,…表示.样本点全体称为样本空间,记作 S.

下面举一些例子.

例 1 掷一枚硬币,观察朝上一面的情况,结果共有两个.若以"正面"表示"正面朝上","反面"表示"反面朝上",则样本空间可表示为

$$S=\{正面,反面\}.$$

例 2 掷一颗骰子,观察出现的点数.若以"i"表示"掷得 i 点"($i=1, 2, \cdots, 6$),则样本空间为

$$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

例 3 记录电话交换台一分钟内接到的呼唤次数.若以"i"表示"接到的呼唤次数为 i 个"($i=0, 1, 2,\cdots$),则样本空间为

$$S=\{0, 1, 2, \cdots\}.$$

例 4 在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的使用寿命.若以"t"表示"灯泡的寿命(以小时为单位)",则样本空间为

$$S=\{t \mid t \geqslant 0\}.$$

2. 随机事件

在随机试验中,我们有时关心的是具有某些特征的结果是否出现.例如,在例 2 中,我们可能研究"掷得偶数点","掷得的点数不超过 4"等,这些结果将包含有若干个样本点,符合这两个特征的样本点组成 S 的两个子集:

$$A=\{2, 4, 6\},\ B=\{1, 2, 3, 4\},$$

我们称 A,B 为试验的两个随机事件.

一般地,我们称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件,简称事件.在每次试验中,当且仅当试验出现的结果为这一子集中的一个元素时,称这一事件发生.事件通常用大写字母 A, B, C,…表示.

由一个样本点组成的单点集,称为基本事件.如例 1 中有两个基本事件{正面}和{反面};例 2 中有六个基本事件$\{1\}$, $\{2\}$, …, $\{6\}$.

我们将样本空间 S 也作为一个事件.因为它是 S 自身的子集,由于样本空间 S 包含所有的样本点,每次试验的结果必然出现在 S 中,即 S 必然发生,称为必然事

件. 空集$\varnothing$不包含任何样本点，它也是样本空间的子集，所以也作为一个事件，由于它在每次试验中都不发生，称为不可能事件.

必然事件和不可能事件本身并无不确定性，但为今后讨论方便，我们将它们作为随机事件的极端情形.

三、事件间的关系及运算

在一个样本空间中，可以有许多随机事件，有的比较简单，有的比较复杂. 我们希望通过对较简单事件的了解去掌握较复杂的事件，为此，需要引进事件之间的关系及事件之间的运算.

由于事件是一个集合，因此事件间的关系及事件的运算自然可以借助于集合论中的理论来处理.

设试验 E 的样本空间为 S，而 A，B，$A_k(k=1, 2, \cdots)$ 是 S 的子集，

(1) $A\subset B$. 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 是事件 B 的子事件，或事件 B 包含事件 A，或事件 A 被事件 B 包含，记为 $A\subset B$.

这种包含关系可由图 1－1 表示，所用的图形称为文氏图. 在该图中，长方形表示样本空间 S，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B.

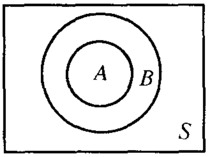

图 1－1

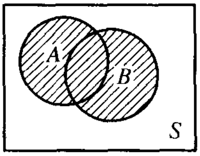

图 1－2

(2) $A=B$. 如果 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

(3) $A\cup B$. S 的子集$\{e\mid e\in A$ 或 $e\in B\}$表示的事件称为事件 A 与事件 B 的和事件或并事件，记为 $A\cup B$. 它表示事件 A 与事件 B 中至少有一个发生. 其文氏图如图 1－2 所示.

两个事件的和可推广到有限个或可列个的情形. 一般用$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 表示 n 个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 的和事件；用$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 表示可列个事件 A_1，A_2，$\cdots$的和事件.

(4) $A\cap B$. S 的子集$\{e\mid e\in A$ 且 $e\in B\}$表示的事件称为事件 A 与事件 B 的积事件或交事件，记为 $A\cap B$. 它表示事件 A 与事件 B 同时发生.

$A\cap B$ 也可记作 AB，其文氏图如图 1－3 所示.

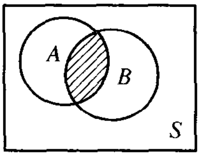

图 1－3

类似地，用$\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 表示 n 个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 的积事

件；用$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示可列个事件 A_1，A_2，…的积事件.

(5) $A-B$. S 的子集$\{e|e\in A$ 且 $e\notin B\}$表示的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$. 它表示事件 A 发生，事件 B 不发生. 其文氏图如图 1－4 所示.

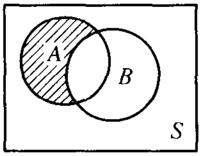

图 1－4

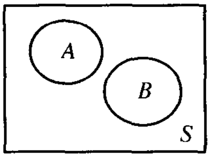

图 1－5

(6) 如果 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互不相容，或互斥. 这时事件 A 与事件 B 不能同时发生. 其文氏图如图 1－5 所示.

如果一组事件 A_1，A_2，…，A_n 满足 $A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，则称这组事件两两互不相容.

(7) 如果 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件，或互为对立事件. 这时对每次试验而言，事件 A 与事件 B 中有且仅有一个发生. 其文氏图如图 1－6 所示.

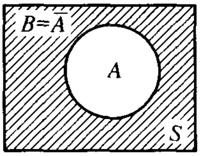

图 1－6

A 的逆事件记作$\overline{A}$，显然 $\overline{A}=S-A$.

与集合论中集合的运算一样，不难验证事件之间的运算满足以下一些运算规律.

设 A，B，C 为事件，则有

交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

对偶律(De Morgan 律)　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 5　某城市的供水系统由甲、乙两个水源与三部分管道 1,2,3 组成(见图 1－7)，每个水源都足以供应城市的用水.

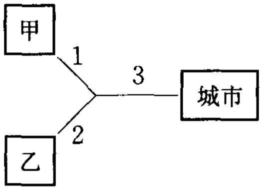

图 1－7

设 A_i 表示事件“第 i 号管道正常工作”($i=1$，2，3)，则城市正常供水可表示为

$$(A_1\cup A_2)\cap A_3;$$

而城市断水可表示为

$$\overline{(A_1\cup A_2)\cap A_3}=\overline{(A_1\cup A_2)}\cup\overline{A_3}=(\overline{A_1}\cap\overline{A_2})\cup\overline{A_3}.$$

例 6　从仓库中任取三件产品作检验. 设 A_i 表示事件“第 i 件产品合格”($i=1, 2, 3$),试用 A_1, A_2, A_3 表示下列各事件:

(1) 只有第一件产品合格;　　(2) 只有一件产品合格;

(3) 三件产品都不合格;　　(4) 至少有一件产品合格.

解　显然,$\overline{A_i}$表示事件“第 i 件产品不合格”($i=1, 2, 3$).

(1) 事件“只有第一件产品合格”意味着第二件、第三件产品都不合格,所以这事件可表示为 $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

(2) 事件“只有一件产品合格”没有指明究竟哪一件产品合格,三个事件“只有第一件产品合格”、“只有第二件产品合格”和“只有第三件产品合格”中任意一个发生,都意味着事件“只有一件产品合格”发生. 因此事件“只有一件产品合格”可表示为

$$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3.$$

显然,$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$, $\overline{A_1}A_2\overline{A_3}$, $\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$ 这三个事件两两互不相容.

(3) 事件“三件产品都不合格”就是事件“第一件产品、第二件产品及第三件产品都不合格”,因此这事件可表示为 $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

(4) 事件“至少有一件产品合格”就是事件“第一件产品、第二件产品及第三件产品中至少有一件合格”,因此这事件可表示为 $A_1\cup A_2\cup A_3$.

另一方面,事件“至少有一件产品合格”的逆事件是“三件产品都不合格”,因此所求事件也可以表示成$\overline{\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}}$,由对偶律

$$\overline{\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}}=\overline{\overline{A_1}}\cup\overline{\overline{A_2}}\cup\overline{\overline{A_3}}=A_1\cup A_2\cup A_3,$$

显然 A_1, A_2, A_3 这三个事件不是两两互不相容. 实际上,所求事件还可表示为

$$\begin{aligned}&A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}\\&\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1A_2A_3,\end{aligned}$$

这是七个两两互不相容的事件的和.

习题 1－1

1. 用集合的形式表示下列随机试验的样本空间 S 与随机事件 A:

(1) 抛一枚硬币两次,观察硬币向上的面;事件 A 表示“两次向上的面相同”;

(2) 对目标进行射击,击中后便停止射击,观察射击的次数;事件 A 表示“射击次数不超过 6 次”.

2. 设 A, B, C 为三个事件,试用 A, B, C 的运算关系表示下列各事件:

(1) A 发生,B 与 C 不发生;　　(2) A 与 B 都发生,而 C 不发生;

(3) A,B,C 都发生；　　(4) A,B,C 中至少有一个发生；

(5) A,B,C 都不发生；　　(6) A,B,C 中至多有一个发生；

(7) A,B,C 中至多有两个发生；　　(8) A,B,C 中至少有两个发生.

3. 向指定的目标连射三枪，以 A_i 表示事件"第 i 枪击中目标"($i=1, 2, 3$)，试用 A_1, A_2, A_3 表示下列各事件：

(1) 没有一枪不中；　　(2) 至少有一枪不中；

(3) 只有一枪不中；　　(4) 至少有两枪不中.

第二节　频率与概率

随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生. 那么能否用一个数来度量随机事件发生的可能性大小呢？为此，首先引进随机事件的频率概念.

定义 1　在相同条件下的 n 次重复试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数. 比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率，并记作

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}.$$

由定义易证，频率具有下述基本性质：

(1) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;

(2) $f_n(S) = 1$;

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k).$$

由频率的定义可知，事件的频率不是一个固定不变的数，它将随着试验次数的不同而有所变化.

例如抛硬币试验，观察出现正面的次数. 历史上有人在相同条件下做过大量重复试验，表 1-1 列出了三组数据.

表 1-1

试 验 者	试 验 次 数	出现正面的频数	出现正面的频率
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
K·皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K·皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从这些数据可见，随着试验次数的增加，出现正面的频率总在 0.5 附近波动，