普通高等教育“十一五”国家级规划教材

经济管理类

微积分

章学诚 刘西垣 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教

| 经 | 济 | 管 | 理 | 类 |

微积分

■ 章学诚 刘西垣 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分/章学诚,刘西垣编著.—武汉:武汉大学出版社,2007.7
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
经济管理类
ISBN 978-7-307-05547-6

Ⅰ.微…　Ⅱ.①章…　②刘…　Ⅲ.微积分　Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 055334 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:程小宜　　版式设计:詹锦玲

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn　网址:www.wdp.com.cn)
印刷:湖北恒泰印务有限公司
开本:720×1000　1/16　印张:27.375　字数:489 千字　插页:1
版次:2007 年 7 月第 1 版　　2007 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-05547-6/O·360　　定价:32.00 元

常用记号说明

$\exists$	表示存在. 例如,"对于 P,存在 Q,使得……"可表示为"对于 P,$\exists Q$,使得……".
$\in$	表示属于. 例如,"x 属于集合 S"可表示为"$x \in S$".
$\forall$	表示所有. 例如,"对于集合 S 中所有的 x"可表示为"$\forall x \in S$".
$\sum$	连加号. 例如,$\sum_{i=1}^{n} a_i$ 表示 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
$\prod$	连乘号,例如,$\prod_{i=1}^{n} a_i$ 表示 $a_1 a_2 \cdots a_n$.
$U(a,\delta)$	表示 a 的 δ 邻域.
$\mathring{U}(a,\delta)$	表示 a 的去心 δ 邻域.
$U(a)$	表示 a 的邻域.
$\mathring{U}(a)$	表示 a 的去心邻域.
$\max S$	表示数集 S 中最大的数.
$\min S$	表示数集 S 中最小的数.
$\Rightarrow$	表示"可推出"、"蕴含". 例如,"由 P 可推出 Q"可表示为"$P \Rightarrow Q$",意即 Q 是 P 的必要条件,P 是 Q 的充分条件.
$\Leftrightarrow$	表示等价. 例如,"P 等价于 Q"可表示为"$P \Leftrightarrow Q$",意即 P 与 Q 互为必要(或充分)条件.
▌	表示定理证明完毕.

内 容 简 介

本书依据教育部委托北京大学和中国人民大学等有关院校拟定的《经济管理学科数学基础教学大纲》（草案）对一元和多元微积分（包括无穷级数和常微分方程，差分方程）的基本内容作了系统的论述，重点阐述了微积分的概念和方法在经济和管理中的应用，配有较多的例题和不同层次的习题，其中有些是历届经济管理类专业的研究生人学试题。书中概念的引人富有启发性，理论的展开自然而流畅。本书还以很少的篇幅介绍了微积分发展过程中的一些重要史实和有关数学家的生平。

序　　言

数学，既是一门高度抽象的理论性学科，又是一门应用广泛的工具性学科。伟大的思想家马克思曾指出，一门科学只有在成功地运用数学时，才算真正发展，走向成熟。在其政治经济学研究中，单是他留下的数学手稿就有上千页，他认为数学是进行科学研究的不可缺少的工具。当代经济学和管理科学的发展，充分证明了他的深刻预见，近 20 年来大多数诺贝尔经济学奖获得者的工作都与数学有关，其中有些获奖者就是杰出的数学家。经济学与数学有着天然的紧密关系，将宏观的质的分析与微观的量的分析统一起来，将经济思想与经济运行中存在的各种量与量之间的数量关系的研究结合起来，有助于提高研究成果的精确性、严密性、科学性和预见性。

由于计算机科学的飞速发展，当今的科学和技术变得更加数学化，数学能使我们更好地了解我们生活于其中的充满信息的世界。除了定理和理论外，数学提供了许多极具特色的普遍适用的思考方式，例如：运用符号，建立模型，从数据进行推断，以及抽象化、最优化、逻辑分析，等等。应用这些数学思考方式的经验形成了数学能力，这是当今这个时代一种日益重要的智力。

数学不仅是各种科学技术的基础，而且也是一种文化。

本书是依据 1998 年原国家教委审定的《高等学校财经类专业核心课程教学大纲》（微积分部分）和近年由教育部委托北京大学光华管理学院和中国人民大学信息学院共同拟定的《经济管理学科数学基础教学大纲》（草案）中的微积分部分编写的。

300 多年前，主要由于受天文学和力学等科学问题的推动和启发，牛顿和莱布尼茨阐发了微积分的概念和方法，使她成为一门独立于古典几何和代数的数学分支。微积分是继欧几里得几何之后人类智慧在数学领域的一个最伟大的创造。三个多世纪过去了，她愈益欣欣向荣，枝繁叶茂，显示出了强大的生命力，科学的发展表明微积分在处理各类科学和工程技术中的数学问题时具有巨大的威力。与此同时，经过众多杰出数学家的不断努力，微积分早已脱去它初期的“神秘”外衣，成为一门理论严密体系完备的成熟的

科学。

《微积分》是高等学校众多专业的基础课程。尽管《微积分》比较清晰易学，但在教学中也容易产生将它简单地归结为一些规则和算法的偏向，而忽视了它的思想、方法的深刻内涵和实际价值。学习微积分，不仅要学习它处理问题的思想、方法和技巧，也是锻炼数学能力和增强智力的有效途径。

“本能的好奇心是非常好的老师”，对数学尤其是如此，希望读者怀着探索和好奇的心态来学习微积分，它不仅可以起到提高学习效率的作用，而且学习本身也是一种“乐趣”。这是编者对读者的一种期望。

本书力求将看似“深奥”的理论写得比较自然顺畅；在概念的阐述上尽力辅以几何的解释，力争“形”“意”交融，微积分的发展史就是物理、几何、代数相互配合，“协同作战”的历史。此外，还配有较多类型的例题和习题作为理论的补充（其中包括从历年经济管理类专业硕士研究生试题中选出的一些考题）这些题不一定要在相应的学期内做完，可以在以后有兴趣或进一步提高时再做。教材中注“*”号的部分可根据要求选学。本书不刻意追求数学理论的严密性（这是数学的另一重要特点），许多需要用到较深数学知识或较难证的命题不予证明，但照顾到不同学校和不同专业的要求，有些基本的较简单的定理和性质给出了证明，这对于加深对概念的理解，提高推理能力和数学素养是十分有益的。

本书第一至第七章由章学诚编写，第八至第十章由刘西垣编写。

限于编者的水平，书中难免会有不当之处，恳请读者予以批评指正。

编　者

2007 年 1 月

于北京大学数学科学学院

目　录

数学是这样一种东西：她提醒你有无形的灵魂，她赋予她所发现的真理以生命；她唤起心神，澄净智慧；她给我们的内心思想添辉；她涤尽我们有生以来的蒙昧与无知.

—— 普洛克拉斯(Proclus, 410 ~ 485)*

这本庞大的书（我指的是宇宙）中写了（自然）哲学，它一直敞开在我们的眼前，但不首先学会理解它的语言，并识别它书写所用的字符，是不能读懂它的，它是用数学的语言写成的.

—— 伽利略(Galilei, Galileo, 1564 ~ 1642)**

第一章 函数及其图形

由于实践和各门科学自身发展的需要，到了16世纪，对物体运动的研究成为自然科学的中心问题. 与之相适应，数学在经历了两千多年的发展之后进入了一个新的时代，即变量数学的时代. 作为在运动中变化的量及它们之间的依赖关系的反映，数学中产生了变量和函数的概念.

例如：伽利略发现自由落体下落的距离 s 与经历的时间 t 的平方成正比，得到著名的公式

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \quad (g \approx 9.81\ \mathrm{m/s^2}),$$

确定了变量 t 与 s 之间的依赖关系，即函数关系，这就是自由落体运动规律的

* 普洛克拉斯，古希腊柏拉图派的领头人物，哲学家和大评论家，喜爱数学，并爱写诗.

** 伽利略，伟大的意大利物理学家和天文学家，科学革命的先驱，他开创了以实验事实为依据，并具有严密逻辑体系的近代科学，被称为“近代科学之父”. 为证实和坚持传播N. 哥白尼的“日心说”，他晚年受到教会的迫害，被终身监禁.

数学表述.

数学的一项重要任务，就是要找出反映各种实际问题中变量的变化规律，即其中所蕴含的变量之间的函数关系.

函数是数学中最基本的概念之一，微积分研究函数的一些局部的和整体的性态.

本章介绍函数的一般概念，几种常用的表示方式，最基本的函数类——初等函数，函数的性质，以及经济学中几种常用的函数.

1.1 预备知识

1.1.1 集合及其运算

集合是数学中的一个基本概念，例如：一个班的全体学生是一个集合，一个车间某天生产的全部产品也构成一个集合，全体整数则构成数的一个集合，等等. 由此可见，集合是日常生活中常会遇到的一个概念. 集合论是数学的基础理论.

一般地说，具有某种指定性质的事物的总体称为一个**集合**. 组成这个集合的事物称为这个集合的**元素**.

集合通常用大写的拉丁字母，如 $A,B,S,\cdots$ 表示，其元素则用小写的拉丁字母，如 $a,b,s,\cdots$ 表示.

若 S 是一个集合，s 是 S 中的一个元素，而 t 不在 S 中，则称 s **属于** S，记为 $s\in S$，t **不属于** S，记为 $t\notin S$（或 $t \,\overline{\in}\, S$）.

如果集合 S 只包含有限个元素，则称 S 为**有限集**，否则称为**无限集**. 为方便计，数学中也将不含任何元素的"集合"称为**空集合**，并用专门记号"$\varnothing$"表示.

说明一个集合通常有两种方法. 一种是**列举法**，即将集合的所有元素列举出来，例如：由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A 可以表示成

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

另一种是**描述法**，即用刻画集合中全体元素的性质来说明. 假设集合 S 是由具有某种性质 P 的元素的全体组成的，我们可以将 S 表示为

$$S=\{s\mid s\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如：由所有满足条件 $x<1$ 的实数 x 组成的集合 B，可以表示为 $B=\{x\mid x<1\}$. 又如：集合

$$C=\{P(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$$

表示坐标平面上由坐标(x,y)满足方程$x^2+y^2=1$的点P的全体所组成的集合，几何上C表示以坐标原点O为中心、半径为1的圆.

数学中，常用$\mathbf{N}$表示由全体正整数组成的集合，即

$$\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}.$$

由全体整数组成的集合用$\mathbf{Z}$表示，即

$$\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\pm n,\cdots\}.$$

由全体有理数所组成的集合用$\mathbf{Q}$表示，即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\, p\in\mathbf{Z},\ q\in\mathbf{N},\ \text{且 } p,q \text{ 互质}\right\}.$$

由全体实数组成的集合记为$\mathbf{R}$，由于数轴上的点与实数一一对应，$\mathbf{R}$也可看成数轴(如图1-1). 在以后，常常将实数看成数轴上的点，或用点表示一个实数.

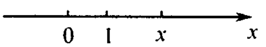

图 1-1

在本书中若无特别说明，所说的数都是实数.

不同集合之间最基本的关系是包含关系. 假设A,B是两个集合，如果A中的元素都属于B，即

$$a\in A\Rightarrow a\in B,$$

则称A为B的**子集**，或称A**包含于**B或B**包含**A，记为$A\subset B$或$B\supset A$ (如图1-2). 例如：

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}.$$

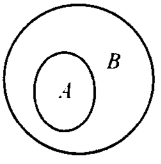

图 1-2

如果A,B互相包含，即$A\subset B$且$B\subset A$，则称A与B**相等**，记为$A=B$. 所以

$$A=B\Leftrightarrow \text{“}a\in A\Leftrightarrow a\in B\text{”}.$$

可以认为空集$\varnothing$是任意非空集合A的子集，即$\varnothing\subset A$.

集合可以作运算. 设A,B是任意两个集合，它们的运算主要有以下几种：

1) **并** 由A,B中的所有元素组成的集合称为A和B的**并集**(简称**并**)，记为$A\cup B$ (如图1-3). 所以

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}.$$

显然，并的运算是可交换的，即

$$A\cup B=B\cup A.$$

又如$A\subset B$，则

$$A\cup B=B.$$

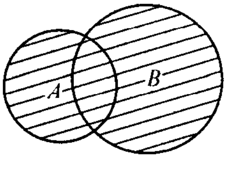

图 1-3

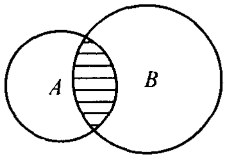

图 1-4

2） **交** 由既属于A又属于B的元素组成的集合称为A和B的**交集**（简称**交**）（如图 1-4）. 所以

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{且} x \in B\}.$$

显然，$A \cap B = B \cap A$.

又如$A \subset B$，则$A \cap B = A$.

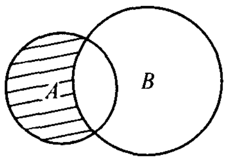

图 1-5

3） **差** 由A中不属于B的元素组成的集合称为A与B的**差集**（简称**差**），记为$A-B$（如图 1-5）. 所以

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{但} x \notin B\}.$$

例如：$\mathbf{Z}-\mathbf{N} = \{0, -1, -2, \cdots, -n, \cdots\}$.

又如：$\mathbf{R}-\mathbf{Q}$就是由所有无理数组成的集合.

显然，若$A \subset B$，则$A - B = \varnothing$.

1.1.2 绝对值及其基本性质

设x为一实数，则其绝对值定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

$|x|$的几何意义是表示数轴上从原点 0 到点x的距离. 而$|x-y|$则表示数轴上两点x和y之间的距离.

若设$a > 0$，则$|x| < a$表示数轴上点x与原点 0 之间的距离小于a，即$-a < x < a$. 所以

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a.$$

同样

$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{或} x > a.$$

例 1 解下列绝对值不等式：

1） $|x-1| < 3$；

2） $|x+1| \geqslant 2$.

解 1） $|x-1| < 3$即为$-3 < x-1 < 3$，因此$-2 < x < 4$.

2） $|x+1| \geqslant 2$即为$x+1 \geqslant 2$或$x+1 \leqslant -2$，从而

$$x \geqslant 1 \text{或} x \leqslant -3.$$

绝对值有下列性质：设x, y是任意两个实数，则

1° $|x| \geqslant 0$；

2° $|-x| = |x|$；