21 世纪高等院校教材

大学工科·数学教材系列

高等数学学习辅导

——问题、解法、常见错误剖析

西北工业大学高等数学教研室 编

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材
大学工科·数学教材系列

高等数学学习辅导

——问题、解法、常见错误剖析

西北工业大学高等数学教研室　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是根据教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会制定的"工科类本科数学基础课程教学基本要求"编写的高等数学辅导教材. 全书将高等数学的内容分为12章,每章从问题、解法、常见错误、练习题4个方面对教材所含知识点进行深化、归纳总结. 书中对某些概念、定理作了进一步的诠释,对精选的典型例题进行了深入的分析,并对解题方法加以总结,同时,阐明各种解题方法所适用的题型. 针对读者容易忽视或混淆的问题及易犯的概念性错误及方法错误进行剖析. 练习题分为A、B两级,A级为基础题,B级为提高题. 书末附有答案与提示.

本书可作为高等院校师生的教学参考书,也可作为硕士研究生入学考试前的复习资料和自学考试有关人员的复习用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导:问题、解法、常见错误剖析/西北工业大学高等数学教研室编. —北京:科学出版社,2007

21世纪高等院校教材(大学工科·数学教材系列)

ISBN 978-7-03-018985-1

Ⅰ.高… Ⅱ.西… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第070121号

责任编辑:李鹏奇 王 静 潘继敏 / 责任校对:陈丽珠
责任印制:张克忠 / 封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年6月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2007年6月第一次印刷 印张:31 插页1
印数:1—4 000 字数:600 000

定价:38.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　　言

高等数学是高等工科院校最主要的基础课之一，学生对它掌握的好坏，不仅直接关系到后续课程的学习，而且对学生今后的提高和发展也有着深远的影响.

许多读者在学习高等数学的过程中都存在着“上课能听懂，课后解题却不知从何下手”的问题. 这一问题的产生一方面是由于对基本概念、基本定理理解得不够深入，对定理的条件、结论理解得不够贴切，对各部分知识之间的联系、区别不甚清楚；另一方面的原因则在于做的题目类型较少，并且对做过的题目缺少归纳、总结，因而既不清楚常见的题目都有哪些类型，也不明了各类型题目常常采用哪些解法. 总之，是心中无数.

著名数学家、教育家乔治・波利亚（G. Polya）说过：“解题可以认为是人的最富有特征性的活动……假如你想要从解题中得到最大的收获，你就应在所做的题目中去找出它的特征，那些特征在你以后去求解其他问题时，能起到指导的作用.”本书就是根据这一思路，对高等数学中的内容从以下几方面进行深化、归纳、总结：

一、问题

这一部分对教材中的基本概念、定理作进一步的诠释，帮助读者更深入、贴切地理解这些概念，掌握定理的核心内容、关键点，并回答教学中常见的一些概念性问题.

二、解法

这一部分通过对精选的典型例题的分析、求解，以小结的形式对各种类型题目常用的解题方法、证明方法加以归纳总结. 同时，阐明各种解法适用的题目所具有的特征，还用较大的篇幅对教学中的难点作了重点讲解，如中值问题的证明、方程根的证明等. 对计算题，着重于方法的归纳总结；对证明题，则着重于思路的分析.

三、常见错误

这部分针对在高等数学教学过程中常遇到的容易忽视或混淆的问题、初学者易犯的概念性错误进行剖析，帮助读者搞清基本概念，深入理解基本定理，掌握正确的运算方法.

四、练习题

这部分是为读者检查自己对这部分内容掌握的程度而提供的练习题. 练习题分 A、B 两级. A 级为基础题，B 级为提高题. 书末附有习题答案及解题方法

提示.

本书可作为高等工科院校高等数学课程的教学参考书，也可作为考研的复习资料.

参加本书编写工作的有西北工业大学应用数学系郑红婵、陆全、刘华平、肖亚兰、王雪芳、杨月茜、周敏等，最后由郑红婵统纂定稿.

限于编者水平，加之编写时间仓促，书中错误、疏漏之处在所难免，敬请广大读者批评指正.

编　者

2007 年 1 月

目　　录

第一章　一元函数的极限与连续

本章重点归纳总结了一元函数求极限的方法，一元分段函数的极限求法与连续性的讨论方法.

一、问　　题

(一) 分段函数

分段函数一定不是初等函数吗？

初等函数是指由常数及基本初等函数经过有限次四则运算及复合步骤所得到的，并能用“一个式子”表示的函数. 分段函数是指在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数. 分段函数虽用几个表达式表示，但并不能肯定说它不能用一个表达式表示，因此，不能说分段函数一定不是初等函数.

例如，$f(x)=|x|$，通常写成分段函数的形式：

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & \text{当 } x\geqslant 0, \\ -x, & \text{当 } x<0, \end{cases}$$

但也可写成一个表达式$|x|=\sqrt{x^2}$，因此，函数 $f(x)=|x|$是初等函数.

虽然有些分段函数是初等函数，但把它写成一个表达式时，无助于我们讨论它的性质，相反，常会给我们增加麻烦. 因此，对于分段函数，除特殊需要外，一般情况下我们并不去鉴别它是不是初等函数，而把它“当作”非初等函数对待.

(二) 数列极限与函数极限

1. 关于数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的下列论述正确吗？

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 表示 n 越大时，$|x_n-a|$越小；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 表示 n 越大时，$|x_n-a|$越接近于零.

这两种说法均是不正确的. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 表示 n 无限增大时，$|x_n-a|$无限接近于零，或 n 无限增大时，x_n 可以任意地接近于 a. 但上述两种说法均无法保证这一点. 例如，设 $x_n=-\dfrac{1}{n}$，$a=1$，则 n 越大时，$|x_n-a|=\left|-\dfrac{1}{n}-1\right|=1+\dfrac{1}{n}$越小，但

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0\neq 1=a,$$

原因在于说$|x_n-a|$越小是指$|x_n-a|$单调减小，而不能保证$|x_n-a|$无限接近于零.

又如，设$x_n=2+\frac{1}{n}$，$a=1$，则n越大时，$|x_n-a|=1+\frac{1}{n}$越接近于零，但

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2\neq 1=a,$$

原因在于越来越接近于零并不等同于无限接近于零.

2. 数列$\{x_n\}$的敛散性与数列$\{|x_n|\}$的敛散性有何关系？

数列$\{x_n\}$与$\{|x_n|\}$的关系是：若$\{x_n\}$收敛，则$\{|x_n|\}$也收敛，且当$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$时，$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$. 证明如下：由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$知，对于任意给定的正数$\varepsilon$，总存在着正整数$N$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$，从而

$$||x_n|-|a||<|x_n-a|<\varepsilon,$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

但若$\{|x_n|\}$收敛，$\{x_n\}$却可能收敛，也可能发散. 例如，$\{|(-1)^n|\}$是收敛的，但$\{(-1)^n\}$是发散的. 如果$\{x_n\}$恒正或恒负，那么，$\{x_n\}$与$\{|x_n|\}$有相同的敛散性. 此外，如果$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 这是今后经常用到的一个结论.

3. 若在x_0的某一去心邻域内$f(x)>0$(或$f(x)<0$)，而且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则一定有$A>0$(或$A<0$)吗？

不一定. 例如，$f(x)=|x|$在$x=0$的去心邻域内大于零，但$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. 即当$f(x)$在$x_0$的某一去心邻域内大于零(或小于零)，而且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，结论仍然是$A\geqslant 0$(或$A\leqslant 0$).

4. 数列极限与函数极限的区别与联系如何？

(1) 数列$x_n=f(n)$的极限与函数$y=f(x)$的极限是有区别的. 它们之间的区别在于：数列$x_n=f(n)$的自变量n的变化过程是间断的(只取正整数)，且只有一种变化过程：$n\to\infty$(即$n\to+\infty$)；而函数$y=f(x)$的自变量x的变化过程是连续的，变化过程有六种：$x\to x_0$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$.

(2) 数列极限与函数极限之间也有一定的联系：

① 当$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$必定存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，但当$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$不存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$可以存在；

② (海涅定理)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的充分必要条件是对于$x_n\to x_0$($n\to\infty$时)的任意数列$x_n$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

由于数列极限与函数极限有上述关系，因此，可以得到利用数列极限讨论函数极限时的下述应用：

(1) 为了说明函数极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在，常用的方法是找出一个数列 $x_n\to x_0$ $(x_n\neq x_0)$，使对应的函数值数列$\{f(x_n)\}$不存在；或者找出两个收敛于 x_0 的数列 x_n 与 $y_n(x_n\neq x_0,y_n\neq x_0)$，使数列$\{f(x_n)\}$与$\{f(y_n)\}$有不同的极限. 例如，要说明极限$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在，可以找出两个收敛于零的数列 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$与 $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x_n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{y_n}=1$，所以，极限$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

(2) 为了说明当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$不是无穷大，常用的方法是找出一个数列 $x_n\to x_0(x_n\neq x_0)$，而对应的函数值数列$\{f(x_n)\}$收敛，即$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=a$(为定数).

类似地，为了说明函数 $f(x)$在区间 I 上无界，常用的方法是找出数列$\{x_n\}\subset I$，而对应的函数值数列$\{f(x_n)\}$当 $n\to\infty$时为无穷大.

例　试证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在$(0,1]$上无界，但当 $x\to 0^+$ 时，$f(x)$不是无穷大.

证　取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\in(0,1]$，则 $f(x_n)=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$，故函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在$(0,1]$上无界.

但若取 $y_n=\dfrac{1}{n\pi}$，则当 $n\to\infty$时，$y_n\to 0^+$，而$\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}n\pi\sin(n\pi)=0$，故当 $x\to 0^+$时，$f(x)$不是无穷大.

(3) 为求$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，先找一个数列 $x_n\to x_0(x_n\neq x_0)$，求出$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，然后再证明$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 例如，先说明$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，再用夹逼准则证明$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

根据函数极限与数列极限的这一关系，有时也利用函数极限的结果去求相应的数列极限. 第三章中用洛必达法则求极限时，若遇到数列极限，便常常这样处理.

5. 关于准则Ⅱ：单调有界数列必有极限.

这一条重要的极限存在准则在高等数学中一般是不予证明的，并且常常使用与之等价的说法：单调增加有上界的数列必有极限(或单调减少有下界的数列必有极限)来说明某个数列有极限.

6. 夹逼准则的条件可削弱为当 $n>N_0$ 时，有 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，$N_0$ 为某一确定的正整数，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则数列$\{x_n\}$的极限存在：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(三) 左极限与右极限

1. 讨论函数的极限时,在什么情况下要考虑左、右极限?

一般说,讨论函数 $f(x)$在点 x_0 处的极限,都应先看一看单侧极限的情况. 如果当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$在 x_0 的两侧变化趋势一致,则不必分开研究;如果两侧变化趋势可能有差别,就应分别研究左、右极限. 常见的有如下几种情况:

(1) 求分段函数在分段点处的极限时,若函数在分段点左、右两侧的表达式不一样,则必须研究左、右极限.

(2) 有些反三角函数、指数函数、三角函数在特殊点处的左、右极限不一样. 例如,$\arctan\dfrac{1}{x}$,$e^{\frac{1}{x}}$在 $x\to 0$ 时左、右极限不一样,$\tan x$ 在 $x\to\dfrac{\pi}{2}$时左、右极限不一样等.

2. 函数间断点的分类与左、右极限的关系如何?

函数间断点的分类是根据函数在该点的左、右极限情况来分类的:左、右极限都存在的间断点称为第一类间断点(包括可去间断点和跳跃间断点两种);左、右极限至少有一个不存在的间断点称为第二类间断点(包括无穷间断点、振荡间断点以及其他有名称或无名称的间断点). 因此,要讨论函数间断点的类型,一定要讨论函数在间断点处的左、右极限.

(四) 无穷小与无穷大

1. 无穷小与函数极限的关系如何?

如果函数 $f(x)$以 A 为极限,那么,$f(x)-A=\alpha(x)$是无穷小,即 $f(x)$等于一个常数 A 与无穷小$\alpha(x)$之和;反过来,如果 $f(x)-A=\alpha(x)$是无穷小,即 $f(x)$等于一个常数 A 与无穷小$\alpha(x)$之和,则 $f(x)$以 A 为极限. 由此可以把极限问题转化为无穷小的问题来处理. 这一点可以看成是高等数学中特别要提出无穷小这类特殊变量的原因.

2. 无穷大与无界函数的区别与联系如何?

它们之间的区别是:①无穷大是指在自变量的某种趋向下,对应的函数值的变化趋势(其绝对值无限增大),即无穷大与自变量的"趋向"相联系;而无界函数是指自变量在某一范围内变化时,对应函数值的变化情况,即无界函数与自变量的变化"范围"相联系. ②无穷大定义中的不等式$|f(x)|>M$,要求适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$ 或$|x|>X$ 的"一切"x 都要满足;而无界函数定义中的不等式$|f(x)|>M$ 只要求在相应的变化范围内"有"x 满足即可. 例如,我们说 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1]$上无界,而说 $g(x)=\dfrac{1}{x}$当 $x\to 0$ 时为无穷大.

它们之间的联系是：如果 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷大，则 $f(x)$ 在包含 x_0 的某区间上或在以 x_0 为端点的某区间上无界；但反过来，当 $f(x)$ 无界时，$f(x)$ 却不一定是无穷大. 例如，$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上无界，而 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 当 $x\to 0^+$ 时却不是无穷大.

3. 无穷多个无穷小的和一定是无穷小吗？

我们知道，有限多个无穷小的和仍然是无穷小，但是，把“有限多个”改为“无穷多个”，结论就不一定成立了.

例如，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n^2},\frac{2}{n^2},\cdots,\frac{n-1}{n^2},\cdots$ 都是无穷小，设

$$x_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2},$$

则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{2},$$

在这里，无穷多个无穷小之和是常数.

类似地，设 $x_n=\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^3}+\cdots+\frac{n-1}{n^3}$，则由

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}(1+2+\cdots+n-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=0,$$

可知，无穷多个无穷小之和可以仍然是无穷小.

又设 $x_n=\frac{1}{n^{3/2}}+\frac{2}{n^{3/2}}+\cdots+\frac{n-1}{n^{3/2}}$，则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{3/2}}(1+2+\cdots+n-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{3/2}}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=+\infty,$$

所以，无穷多个无穷小之和还可能是无穷大.

4. 常用到的 $x\to 0$ 时的等价无穷小有哪些？

常用到的 $x\to 0$ 时的等价无穷小有：

$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$\mathrm{sh}x\sim x$，$\mathrm{th}x\sim x$.

5. 高阶无穷小的运算规律有哪些？

这里仅以 $x\to 0$ 时的高阶无穷小为例给出运算规律：

(1) $o(x^n)\pm o(x^n)=o(x^n)$；

(2) 当 $m>n$ 时，$o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^n)$；

(3) $o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$；

(4) 设 $\varphi(x)$ 有界，则 $\varphi(x)\cdot o(x^n)=o(x^n)$.

以上规律,根据高阶无穷小的定义,都不难证明.这些规律在第三章用麦克劳林公式求极限时尤为有用.

同时,要提请读者注意下述两种错误:

(1) 认为 $o(x^n)-o(x^n)=0$,这是不对的.例如,$x^3=o(x)$,$x^2=o(x)(x\to 0)$,但 $x^3-x^2\neq 0$.

(2) 认为 $o(x^m)/o(x^n)=o(x^{m-n})(m>n)$,这也是不对的.例如,$x^3=o(x^2)$,$x^4=o(x)$,但 $x^3/x^4=\dfrac{1}{x}$是 $x\to 0$ 时的无穷大.

(五) 初等函数的连续性

为什么说初等函数在它的"定义区间"上连续,而不说在"定义域"上连续?

我们知道,基本初等函数在定义域上是连续的,但初等函数却未必在定义域的每一点都连续.例如,初等函数 $f(x)=\sqrt{\cos x-1}$,它的定义域

$$D=\{x\mid x=2k\pi,k\text{ 为整数}\}$$

中的每一个点都是孤立点.由于函数在这些点的邻域中都没有定义,因而函数在这些点处不连续.由于初等函数的定义域可能包含孤立点,因此根据函数在一点连续的定义,不能笼统地说初等函数在其定义域上连续.而只能说在定义区间上连续.定义区间与定义域有所不同,定义区间是含于定义域的,是区间,而定义域不一定是区间.不妨再看一个例子,函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2}{x+1}+4}$ 的定义域为 $D=\{x\mid x=-2$ 或 $x\in(-1,+\infty)\}$,定义域包含了孤立点 $x=-2$ 及定义区间$(-1,+\infty)$.

(六) 关于介值定理

1. 应用介值定理及相关结论时,应注意什么问题?

我们列出描述闭区间上连续函数性质的零点定理,介值定理及其推论的条件、结论如表 1.1 所示.

表 1.1

定理名称	定理条件	定理结论	
		ξ所在位置	中值公式
介值定理	$f(x)$在$[a,b]$上连续,$f(a)\neq f(b)$,C介于$f(a)$与$f(b)$之间	$\xi\in(a,b)$	$f(\xi)=C$
介值定理推论	$f(x)$在$[a,b]$上连续,$\min f(x)\leqslant C\leqslant\max f(x)$	$\xi\in[a,b]$	$f(\xi)=C$
零点定理	$f(x)$在$[a,b]$上连续,$f(a)f(b)<0$	$\xi\in(a,b)$	$f(\xi)=0$

需要提醒读者注意的是这三个定理中 ξ 所在的位置不同. 若使用零点定理或介值定理,则结论中的 ξ 位于开区间 (a,b) 内;若使用介值定理推论,则 ξ 位于闭区间 $[a,b]$ 内. 由于有这一点不同,就使得我们在利用介值定理推论证明相关的结论时,一定要注意闭区间的选择(见例 1.45).

2. 如果 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续,且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号,那么在 (a,b) 内一定有函数 $f(x)$ 的零点吗?

不一定. 请分别考虑函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in(0,1], \\ -1, & x=0; \end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases} x^2, & x\in(-1,1], \\ -1, & x=-1. \end{cases}$$

二、解　　法

(一) 常见的分段函数形式

我们知道,许多分段函数不是初等函数,而那些是初等函数的分段函数我们也把它们"当作"非初等函数对待. 所以,高等数学中许多关于初等函数的理论、方法不能运用于分段函数,而要对它们单独进行讨论. 因此,我们必须明白哪些表示形式的函数是分段函数,遇到这些形式的函数时,应当按分段函数来对待.

1. 分段表示的函数. 如

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x(1+x)}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}, & x\leqslant 0, \\ \sin\dfrac{\pi}{x^2-4}, & x>0; \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0; \end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & -1\leqslant x<0. \end{cases}$$

2. 含有绝对值符号的函数.

含有绝对值符号的函数应当先去掉绝对值符号,将其写成分段表示式,然后再进行讨论. 如

$$f(x)=x\mid x(x-1)\mid=\begin{cases} x^2-x^3, & 0<x<1, \\ x^3-x^2, & x\leqslant 0 \text{ 或 } x\geqslant 1; \end{cases}$$

$$g(x)=|\ln x|=\begin{cases}\ln x, & x\geqslant 1,\\ -\ln x, & 0<x<1.\end{cases}$$

3. 含参变量的极限式表示的函数. 如

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x},\quad |x|>0,$$

$$g(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{1-xe^{tx}}{x+e^{tx}},\quad -\infty<x<+\infty.$$

此类函数应当通过求极限把函数写成分段表示式

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<|x|<1,\\ 0, & x=-1,\\ 2, & x=1,\\ 1, & |x|>1;\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ -x, & x>0.\end{cases}$$

4. 其他形式的分段函数. 如

$$f(x)=\sqrt{1-\sin 4x},\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},$$

$$g(x)=\min_{-3\leqslant x\leqslant 2}(2,x^2),$$

$$h(x)=\frac{[x]}{x},\quad x>0.$$

这些函数实际上也是分段函数,均可改写成分段表示式

$$f(x)=\sqrt{(\sin 2x-\cos 2x)^2}=\begin{cases}\cos 2x-\sin 2x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{8},\\ \sin 2x-\cos 2x, & \dfrac{\pi}{8}<x\leqslant\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}2, & -3\leqslant x<-\sqrt{2}\ \text{或}\ \sqrt{2}<x\leqslant 2,\\ x^2, & -\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2};\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}0, & 0<x<1,\\ \dfrac{n}{x}, & n\leqslant x<n+1,\quad n\geqslant 1\ \text{为整数}.\end{cases}$$

(二) 利用极限四则运算法则求极限

对和、差、积、商形式的函数求极限,自然会想到极限四则运算法则. 法则本身

很简单,但为了能够使用这些法则,往往需要先对函数作某些恒等变形或化简.采用怎样的变形与化简,要根据具体的算式确定.常用的有分式的约分或通分,分式的分解,分子或分母的有理化,三角函数的恒等变形,某些求和公式与求积分式以及适当的变量替换等.

例 1.1 求极限$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x-3}$.

分析 本题属$\dfrac{0}{0}$型未定式,分子分母均为多项式,往往采用约分的方法,消去分子与分母的零因式$(x-3)$.

解
$$\text{原式}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x^2+3x+9)=27.$$

例 1.2 求极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$(其中$m,n$为正整数).

分析 这是含根式的$\dfrac{0}{0}$型未定式,应当先将其有理化,再约去分子、分母中的零因式.

解 令$t=x^{\frac{1}{mn}}$,则当$x\to 1$时,$t\to 1$.
$$\text{原式}=\lim_{t\to 1}\frac{t^n-1}{t^m-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+1)}{(t-1)(t^{m-1}+t^{m-2}+\cdots+1)}$$
$$=\lim_{t\to 1}\frac{t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+1}{t^{m-1}+t^{m-2}+\cdots+1}=\frac{n}{m}.$$

例 1.3 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

分析 $n\to\infty$时,它是$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式,将分子分母同除以3^n,使之变为适合于极限四则运算法则的函数求极限问题.

解
$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=3.$$

例 1.4 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

分析 当$x\to\infty$时,$\dfrac{x^3}{2x^2-1}\to\infty$,$\dfrac{x^2}{2x+1}\to\infty$,故这是$\infty-\infty$型未定式,一般采用先通分的方法,然后视通分以后的类型再决定下一步应采取的方法.

解
$$\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}=\frac{2x^4+x^3-2x^4+x^2}{(2x^2-1)(2x+1)}=\frac{x^3+x^2}{4x^3+2x^2-2x-1},$$

故通分以后变成$\frac{\infty}{\infty}$型未定式，可给分子分母同除以 x^3，然后求极限.

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{4x^3+2x^2-2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{4}.$$

例 1.5　求极限$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

分析　这是含有根式的$\infty-\infty$型未定式，可以先将分子有理化，再求解.

解　$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{|x|}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=0.$$

例 1.6　求极限$\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+1}+x)$.

分析　这是$\infty\cdot 0$型未定式，应当先将分子有理化，变为$\frac{\infty}{\infty}$型极限，再作处理.

解　$$原式=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}.$$

这里，应当注意的是当函数中含有偶次根式时，若要将 x 放入根式中，就要留意 $x>0$ 还是 $x<0$.

例 1.7　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

分析　随着 $n\to\infty$，数列 $x_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$的项数也趋向于无穷，而极限的运算法则：代数和的极限等于极限的代数和只对有限多个函数的和成立. 因此，求无穷多项和的极限时应当先将无穷多项和变为有限项和，再进一步求解.

解　$$原式=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]=1.$$

值得说明的是本例中求$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$所用的方法称为“裂项求和”，这是高等数学中常用的一种求和方法.

例 1.8　求极限$\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.

分析 这是$\left(\frac{0}{0}\right)$型未定式,应当用分子、分母的有理化因式同时去乘分子分母,然后约去零因子,再进一步求解.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(2x+1-9)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-2-2)(\sqrt{2x+1}+3)}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{\sqrt{2x+1}+3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

例 1.9 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$,其中$|a|<1$.

分析 由于积的极限等于极限的积这一法则只对有限个因子的积成立,因此,求解本题时,应当先用求积公式将其变形.

解 多次使用恒等式

$$(x-y)(x+y)=x^2-y^2,$$

化简,可得

$$(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})=\frac{1}{1-a}(1-a)(1+a)(1+a^2)\cdot\cdots\cdot(1+a^{2^n})$$

$$=\frac{1}{1-a}(1-a^{2^{n+1}}).$$

当$n\to\infty$时,$2^{n+1}\to+\infty$,而$|a|<1$,故$a^{2^{n+1}}\to 0$,从而

$$原式=\frac{1}{1-a}.$$

例 1.10 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^{2n}}$,其中$|a|<1$,$|b|<1$.

分析 分子、分母均为无穷多项的和,应当先求出其和,再求极限.

解 利用等比级数求和公式,有

$$1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a},$$

$$1+b+b^2+\cdots+b^{2n}=\frac{1-b^{2n+1}}{1-b},$$

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\Big/\left(\frac{1-b^{2n+1}}{1-b}\right)=\frac{1}{1-a}\Big/\left(\frac{1}{1-b}\right)=\frac{1-b}{1-a}.$$

小结 通过这几个例题我们看到:$\left(\frac{0}{0}\right)$,$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$,$(\infty-\infty)$,$(0\cdot\infty)$型未定式均可用极限的运算法则求极限.不过,在使用前应当对函数作适当的恒等变形.

(三) 利用两个重要极限求极限

两个重要极限是指