2008 天府名校 TIANFUMINGXIAO

天府高考总复习

数学

主　编： 许　勇

副主编： 陶兴模　解传江　唐绍友

编　者：（按姓氏笔画为序）

邓　飞　邓朝阳　左　莉　龙万明　李来敏

李　自　许正川　杨志友　杨　飞　杨　培

邹仁福　杜晓雯　张太军　郑　黎　陶兴模

唐荣龙　唐绍友　唐绍伟　唐　昕　秦　勇

曹阳可　曾宏建　曾昌涛　甄振国　解传江

四川出版集团

四川教育出版社

·成都·

图书在版编目（CIP）数据

天府名校·天府高考总复习. 数学/许勇编. —成都：四川教育出版社，2007.8

ISBN 978-7-5408-4696-1

Ⅰ.天… Ⅱ.许… Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP 数据核字（2007）第 109753 号

责任编辑　何　军
封面设计　SOAN 蓝琳兰图书品牌机构
版式设计　王　凌
责任校对　伍登富
责任印制　黄　萍
出版发行　四川出版集团　四川教育出版社
（成都市槐树街 2 号　邮政编码 610031）
印　　刷　四川五洲彩印有限责任公司
版　　次　2007 年 8 月第 1 版
印　　次　2007 年 8 月第 1 次印刷
成品规格　210mm×295mm
印　　张　21.5
字　　数　973 千
定　　价　37.80 元

如发现印装质量问题，请与本社调换。电话：（028）86259359
编辑部电话：（028）86259381　邮购电话：（028）86259694

丛书简介

《天府高考总复习》是由四川省考试研究专家和一线特级、高级教师倾力打造的高考总复习指导丛书。全套丛书由高考九个学科构成。

丛书既注重各学科基础知识、核心能力的内在联系，又注意发掘学生的学习潜能，并能兼顾地方特点；丛书及时传递高考信息，有效传播高考复习经验，最大限度地减轻学生学习负担，全面迅速地提高复习效率，在众多高考指导丛书中具有独特鲜明的特色。

本套丛书具有同类产品中无可比拟的特色和优势，体现在：

本套丛书汇集了省内权威的教育资料

- 及时准确全面的高考信息
- 第一手的教情学情和考情
- 深厚的高考教学研究功底
- 教学与科研相结合的人才资源

本套丛书集中了强大优化的编写队伍

- 坚实的学科理论基础
- 长期的资料编写经历
- 丰富的考试命题经验
- 优化的年龄职称结构
- 有效的教学复习方法
- 合理的区域学校类型

本套丛书拥有实用于高考需求的原创的学习内容

- 新（依据的信息新、栏目设置新、试题原创性强）
- 精（精心选材、科学结合；精讲精练，最大限度地减轻学生学习负担）
- 实（一切从学情、教情、考情的实际出发，突出针对性，提高实效性）

本套丛书享有独具一格的全程配套的指导服务

- 四川教育出版社网站（www.chuanjiaoshe.com）及时发布高考信息，免费下载英语听力材料文件。
- 免费配送教师参考书，及时出版配套的《天府秘卷》高考模拟试题。

四川教育出版社

2007年8月

CONGSHU JIANJIE

编者的话 学生版图示说明

本书是为参加“3+文/理综合”考试的学生编写的。考虑到高三教学时间的紧迫和地理学科的特点，本书内容“少而精”，对习题的质和量也作了特殊要求，博览市场上的复习资料，精编出能以一当十的试题，以减轻学生的学习负担，提高复习效率。本书的试题训练量，本着学生每个题都有时间做，教师有足够的时间逐一分析讲解每个题的原则设置。同时考虑到兴趣是学习最根本的动力，因此在试题的选择上就立足于把学生带入练习的乐园中，该书不是简单通过趣味性的练习资料吸引学生，而是通过试题中各种思维能力的组合，增强练习的趣味性，达到提高应试能力的目的。

由于各地区或学校学生学习能力存在差异，教学进度也不同，本书将二轮专题复习与一轮同步复习整合在一起，以满足个别学生超大强度的训练量，提前构建综合能力。

本套丛书配有教师用书，免费赠送授课老师；请配套使用四川教育出版社出版的《天府秘卷四川高考全真模拟试题》。

为了帮助你更好地使用本书，请阅读使用导引图

通过作者、编辑们的辛勤工作，这本书终于付梓，一方面我们感到十分欣慰，另一方面也深知书中还有值得商榷甚至错误之处，恳请老师和同学们在使用过程中提出宝贵意见，我们一定会在再版时认真考虑大家的意见和建议，使这本书臻于完善。

编 者

2007 年 4 月

第一章　集合与简易逻辑

1. 集合的概念与运算

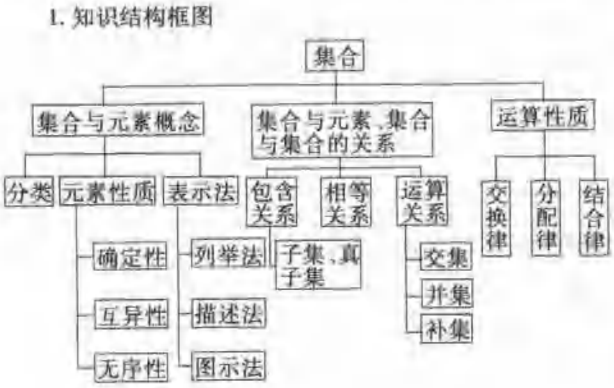
考点与知识

◆考点

能正确判断集合与元素、集合与集合之间的关系；会求集合的并、交、补运算；能正确运用集合语言表述相关的综合问题.

◆知识要点

1. 知识结构框图



2. 重要结论与性质

(1)$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$　　$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$

(2)$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(3)$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$　　$A\cup(\complement_U A)=U$

(4)$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$

$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$(德摩根律)

(5)$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$

$\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(A\cap C)-\mathrm{card}(B\cap C)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)$(容斥原理)

(6)$A\subseteq B,B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$

(7)若 $\mathrm{card}(A)=n,(n\in\mathbf{N}^*)$，则集合 A 的所有子集的个数共有 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$ 个.

预习与自查

1. 设集合 $P=\{x|x^2-16<0\}$，$\theta=\{x|x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$，则 $P\cap Q$ 等于(　　)

A. $\{-2,2\}$　　B. $\{-2,2,-4,4\}$

C. $\{-2,0,2\}$　　D. $\{-2,2,0,-4,4\}$

2. 给出四个命题：①任何一个集合 A 必有两个子集；②任何一个集合 A 必有两个真子集；③若集合 A 和 B 的交集是空集，则 A,B 中至少有一个是空集；④若集合 A 和 B 的交集是全集，则 A,B 都是全集. 其中，错误命题的个数是(　　)

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

3. 已知集合 $A=\{y|y=x^2-4x+3\}$，$B=\{y|y=-x^2+4x-3\}$，则 $A\cap B=$________.

4. 设集合 $A=\{1,2\}$，则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$ 的集合 B 的个数是________.

5. 设 $P=\{3,4\}$，$Q=\{5,6,7\}$，集合 $S=\{(a,b)|a\in P,b\in Q\}$，则集合 S 中元素的个数为________.

精讲与精析

例1　已知集合 $A=\{x|ax^2+x+a-1=0,x\in\mathbf{R}\}$ 中有且只有一个元素. 求实数 a 的值.

分析：分两种情况考虑.

①当 $a=0$ 时，方程 $ax^2+x+a-1=0$ 为一次方程 $x-1=0$. 符合条件；

②当 $a\neq0$ 时，方程 $ax^2+x+a-1=0$ 为一元二次方程. 要使集合 A 只有一个元素，应满足方程 $ax^2+x+a-1=0$ 的判别式 $\Delta=0$.

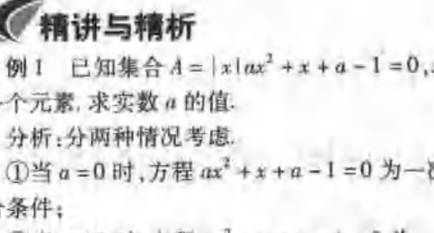
综合①②可得实数 a 的值.

答案：$a=0,a=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2},a=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.

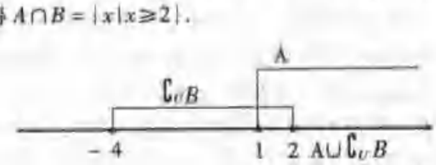
例2　已知全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{y|y=x^2+2x+2\}$，$B=\{x|x^2+2x-8\geqslant0\}$，求：(1)$A\cap B$；(2)$A\cup\complement_U B$；(3)$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

分析：先对集合 A,B 进行化简，然后根据交集、并集和补集的定义，再利用数轴即可直观地得出答案.

精讲：$A=\{y|y=x^2+2x+2\}=\{y|y=(x+1)^2+1\}=\{y|y\geqslant1\}$，$B=\{x|x^2+2x-8\geqslant0\}=\{x|(x+4)(x-2)\geqslant0\}=\{x|x\leqslant-4$ 或 $x\geqslant2\}$，$\complement_U A=\{y|y<1\}$，$\complement_U B=\{x|-4<x<2\}$.

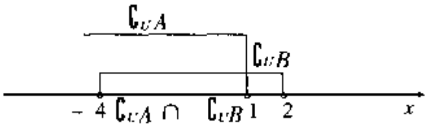


(1)将集合 A,B 表示在数轴上，如上图所示，由交集的定义可得 $A\cap B=\{x|x\geqslant2\}$.



(2)将集合 A 和 $\complement_U B$ 表示在数轴上，如上图所示，由并集的

定义可得 $A\cup\complement_U B=\{x|x>-4\}$.



(3)将集合$\complement_U A$和$\complement_U B$表示在数轴上，如上图所示，由交集的定义可得$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{x|-4<x<1\}$.

评析：1. 集合 A 表示的是二次函数 $y=x^2+2x+2$ 的值域. 要注意它与集合 $M=\{(x,y)|y=x^2+2x+2\}$ 的区别，集合 A 是数集，集合 M 是点集.

2. 求数集的并集、交集和补集，借助数轴可直观地得出相关的结果.

3. 第(3)问的求解可利用德摩根律$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$，先求出 $A\cup B=\{x|x\leqslant-4$ 或 $x\geqslant1\}$，再求 $A\cup B$ 的补集$\complement_U(A\cup B)=\{x|-4<x<1\}$，这种转化在处理某些题目时可以使问题得到简化.

例3 已知 $A=\{x||2x-1|\geqslant1,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x^2-(2a+1)x+a(a+1)<0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

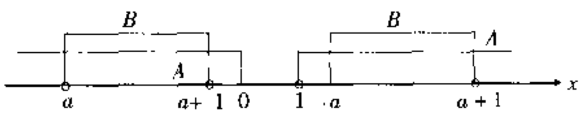
分析：先求出集合 A 的最简形式，再对集合 B 进行分析化简，然后利用包含关系 $B\subseteq A$，借助数轴的直观性即可求得 a 的取值范围.

精讲：由 $|2x-1|\geqslant1$ 得 $2x-1\leqslant-1$ 或 $2x-1\geqslant1$，由此得 $x\leqslant0$ 或 $x\geqslant1$，$A=\{x|x\leqslant0$ 或 $x\geqslant1\}$.

$B=\{x|x^2-(2a+1)x+a(a+1)<0\}=\{x|(x-a)[x-(a+1)]<0\}=\{x|a<x<a+1\}$.

将集合 A,B 表示在数轴上，如图所示，由条件 $B\subseteq A$ 可知，实数 a 应满足条件：

$a+1\leqslant0$ 或 $a\geqslant1$，解之得，$a\leqslant-1$ 或 $a\geqslant1$.

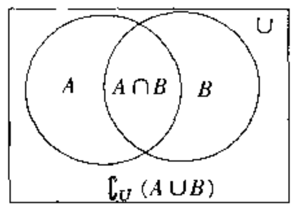


评析：1. 由于集合 B 含有参数 a，它的取值范围由参数 a 确定，借助数轴的直观性容易看出，满足关系 $B\subseteq A$ 的集合 B 应有两种情况. 因此，a 的取值应有两个范围.

2. 注意考虑端点值. 在利用条件 $B\subseteq A$ 时，最容易犯的一个错误是：忽略了端点值的考虑. 误认为 $a+1<0$ 或 $a>1$ 就是问题的全部答案. 事实上，当 $a+1=0$ 或 $a=1$ 时也能满足条件$B\subseteq A$. 对于这一类问题的处理，较好的方法是将端点值代入条件中进行直接验证，符合条件的列入答案中，不符合条件的舍去.

例4 向 50 名学生调查对 A,B 两件事的态度，赞成 A 的人数是 30 人，其余的人不赞成；赞成 B 的人数是 33 人，其余的人不赞成. 另外对 A,B 都不赞成的学生比对 A,B 都赞成的学生人数的$\frac{1}{3}$多 1 人. 问对 A,B 都赞成的学生和都不赞成的学生各有多少人？

分析：这是一个集合的应用问题.我们可以利用文氏图来求解. 记 50 名学生组成的集合为全集 U，赞成事件 A 和事件 B 的学生组成的集合分别记作集合 A 和集合 B，则对事件 A,B 都赞成的学生构成的集合就是$A\cap B$，对事件A,B都不赞成的学生构成的集合就是$\complement_U(A\cup B)$，如图所示. 设$A\cap B$ 的人数为 x，则可在文氏图中表示出对应集合的人数，再结合题设条件即可求得问题的答案.



精讲：记 50 名学生组成的集合为全集 U，赞成事件 A 的学生组成的集合为 A，赞成事件 B 的学生组成的集合为 B. 设对事件 A,B 都赞成的学生人数为 x，即 $\mathrm{card}(A\cap B)=x$，则由题设条件可知 $\mathrm{card}[\complement_U(A\cup B)]=\frac{x}{3}+1$，$\mathrm{card}[A\cap(\complement_U B)]=30-x$，$\mathrm{card}[B\cap(\complement_U A)]=33-x$.

由题意可得：$(30-x)+(33-x)+x+(\frac{x}{3}+1)=50$，解之得 $x=21$，$\frac{x}{3}+1=8$.

由此可知，对事件 A,B 都赞成的学生人数为 21 人，对事件 A,B 都不赞成的学生人数为 8 人.

评析：1. 对于某些实际应用问题，运用集合的观点去认识，借助文氏图的直观性，可以使问题得到很方便的解决.

2. 本题也可以利用并集元素个数的计算公式 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$来解答.

已知：$\mathrm{card}(A)=30$，$\mathrm{card}(B)=33$，$\mathrm{card}(A\cap B)=x$，将这些数据代入上述公式中得 $\mathrm{card}(A\cup B)=63-x$，又因为 $\mathrm{card}[\complement_U(A\cup B)]=\frac{x}{3}+1$，$\mathrm{card}(U)=50$，所以，$(63-x)+\frac{x}{3}+1=50$，解之得 $x=21$，由此得$\frac{x}{3}+1=8$.

例5 已知集合 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$.

(1)若 $A\cap B=A\cup B$，求 a 的值；

(2)若$\varnothing\subsetneqq A\cap B$，$A\cap C=\varnothing$，求 a 的值.

分析：对于第(1)问，要认真分析 $A\cap B=A\cup B$ 的意义. 由于 $A\cap B\subseteq A$，而 $A\cup B=A\cap B$，所以，$A\cup B\subseteq A$，由于 $A\subseteq A\cup B$，所以，$A=A\cup B\Rightarrow B\subseteq A$. 又由于 $A\subseteq A\cup B=A\cap B\subseteq B\Rightarrow A\subseteq B$，所以，$A=B$. 得出 $A=B$ 之后，a 的值很容易求出. 对于第(2)问，要抓住空集$\varnothing$这个特殊集合的意义和性质进行分析，由$\varnothing\subsetneqq A\cap B$ 可得 $A\cap B\neq\varnothing$，再联系这个条件即可求出 a 的值.

精讲：由已知条件可得：$B=\{2,3\}$，$C=\{2,-4\}$.

(1)因为 $A\cap B=A\cup B$，所以，必有 $A=B$，于是，2 和 3 是一元二次方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的两个根.

由根与系数的关系可得$\begin{cases}2+3=a,\\2\times3=a^2-19,\end{cases}$解之得 $a=5$.

(2)由$\varnothing\subsetneqq A\cap B$，$A\cap C=\varnothing$得 $3\in A$，$2\notin A$，$-4\notin A$. 由 $3\in A$ 得 $3^2-3a+a^2-19=0$，解之得 $a=5$ 或 $a=-2$.

当 $a=5$ 时，$A=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，与 $2\notin A$ 矛盾，所以，$a=5$ 应舍去.

当 $a=-2$ 时，$A=\{x|x^2+2x-15=0\}=\{3,-5\}$ 符合题意. 所以，符合条件的 a 值为 $a=-2$.

评析：本题最容易出错的是：由 $3\in A$ 得出 $a=5$ 或 $a=-2$ 之后，就认为找到了符合条件的 a 值，于是就下结论：$a=5$ 或 $a=-2$. 事实上，当 $a=5$ 时，集合 $A=\{2,3\}$，$A\cap C=\{2\}\neq\varnothing$，与已知条件 $A\cap C=\varnothing$矛盾. 为了避免这种错误的发生，较为稳妥的方法是验证法. 将求出的 a 值代入所给条件中进行直接验证，符合题意的作为问题的答案，不符合题意的舍去.

反思与延伸

1. 在集合的运算中,空集∅这个特殊的集合具有特殊的意义,由于它的存在,给集合运算增添了丰富多彩的内容. 然而,如果忽略了它,则会给我们的解题带来失误.

例如 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$, $B=\{x|x^2-ax+3a-5=0\}$,若 $A\cap B=B$,求实数 a 的值. 不少的同学会给出如下解法:

解:$A=\{1,2\}$,因为 $A\cap B=B$,所以 $B\subseteq A$,由此得符合条件的集合 $B=\{1\}$ 或 $B=\{2\}$ 或 $B=\{1,2\}$.

当 $B=\{1\}$ 时,则有 $\begin{cases}1+1=a,\\1\times1=3a-5,\end{cases}$ 此时 $a=2$;

当 $B=\{2\}$ 时,则有 $\begin{cases}2+2=a,\\2\times2=3a-5,\end{cases}$ 无解;

当 $B=\{1,2\}$ 时,则有 $\begin{cases}1+2=a\\1\times2=3a-5\end{cases}$,无解.

因此,符合条件的 $a=2$.

这个解法显然是错误的. 错误的原因是忽略了空集是任意集合的子集这一规定. 事实上,当 $B=\varnothing$ 时,也满足条件 $B\subsetneqq A$,此时,方程 $x^2-ax+3a-5=0$ 无实根. 由 $\Delta<0$ 得 $2<a<10$,因此,符合条件的 a 的取值范围应该是 $2\leqslant a<10$.

2. 数形结合的思想在集合运算中有着重要的作用,利用文氏图可以使问题化繁为简;求数集的并、交、补运算,借助数轴可以直观地得出结论.

3. 熟记一些集合的性质和结论,对提高解题能力有帮助. 常用的结论有:①$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$,②$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$,③$\complement_U(A\cap B)=(\complement_UA)\cup(\complement_UB)$,$\complement_U(A\cup B)=(\complement_UA)\cap(\complement_UB)$.

2. 含绝对值的不等式与一元二次不等式的解法

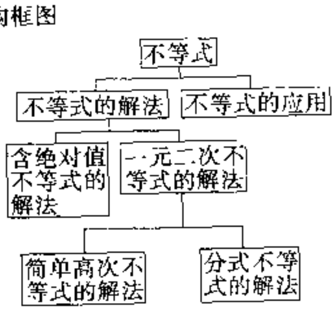
考点与知识

◆考点

含绝对值的不等式与一元二次不等式的解法;简单的含参不等式的解法;含绝对值的不等式与一元二次不等式的综合应用.

◆知识要点

1. 知识结构框图



2. 几种不等式的解法

(1)含绝对值的不等式的解法.

解含绝对值的不等式的基本思路是:根据绝对值的意义,去掉绝对值符号分类求解;也可利用下列模型进行等价转化求解.

$|x|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<x<a$

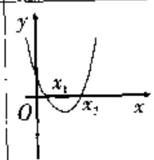
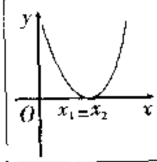
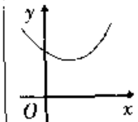
$|x|>a(a>0)\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$

$|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$

$|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow f(x)<-g(x)$ 或 $f(x)>g(x)$

(2)一元二次不等式的解法.

先计算判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的值. 若 $\Delta<0$,则直接根据下表写出一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集;若 $\Delta\geqslant0$,则先求出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根,再根据下表写出解集.

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ 的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ 的根	有两个相异实根 x_1,x_2 $(x_1<x_2)$	有两个相等实根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	没有实根
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$ 的解集	$\{x\|x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\{x\|x\neq-\frac{b}{2a}\}$	**R**
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$ 的解集	$\{x\|x_1<x<x_2\}$	∅	∅

(3)简单高次不等式的解法.

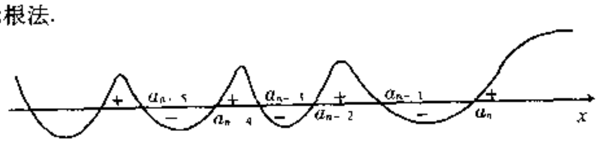
基本思路是:降次;基本方法是:数轴标根法.

设多项式 $p(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})(x-a_n)$ 且 $a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n$,

则 $p(x)>0\Leftrightarrow x\in\cdots\cup(a_{n-2},a_{n-1})\cup(a_n,+\infty)$;

$p(x)<0\Leftrightarrow x\in\cdots\cup(a_{n-3},a_{n-2})\cup(a_{n-1},a_n)$.

上述结论可用如图所示的曲线给予说明,此方法称为数轴标根法.



如果 $p(x)>0$ 或 $p(x)<0$ 的左边有完全平方因式 $(x-m)^2$,则需要单独检验 $x=m$ 是否满足不等式.

(4)分式不等式的解法.

基本方法是:转化为整式不等式求解(也可直接利用数轴标根法求解).

$\frac{p(x)}{q(x)}\leqslant0\Leftrightarrow\begin{cases}p(x)q(x)\leqslant0,\\q(x)\neq0,\end{cases}$ $\frac{p(x)}{q(x)}\geqslant0\Leftrightarrow\begin{cases}p(x)q(x)\geqslant0,\\q(x)\neq0.\end{cases}$

预习与自查★

1. 设不等式$|2x-1|<1$的解集为A，不等式$|x-3|<2$的解集为B，则$A\cup B=$（　　）

A. $\varnothing$　　B. $\{x|1<x<5\}$

C. $\{x|0<x<1$或$1<x<5\}$　　D. $\{x|0<x<5\}$

2. 一元二次不等式$ax^2+bx+c\leqslant 0$的解集为全体实数的充要条件是（　　）

A. $\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$　　B. $\begin{cases}a>0\\ \Delta\leqslant 0\end{cases}$

C. $\begin{cases}a<0\\ \Delta\leqslant 0\end{cases}$　　D. $\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$

3. 不等式$\frac{x-3}{x-2}\leqslant 0$的解集为$A$，不等式$(x^2+1)(x-a)>0$的解集为$B$，若$A\subsetneqq B$，则$a$的取值范围是________.

4. 不等式$(x+2)(2x^2-7x+3)<0$的解集是________.

5. 不等式$\frac{2x^2+2kx+k}{4x^2+6x+3}<1$对任意实数$x$都成立，则实数$k$的取值范围是________.

精讲与精析

例1　解不等式$\left|\frac{3x}{x^2-4}\right|\leqslant 1$.

分析：将原不等式转化为不等式组$\begin{cases}\frac{3x}{x^2-4}\geqslant -1\\ \frac{3x}{x^2-4}\leqslant 1\end{cases}$求解.

答案：原不等式的解集为$\{x|x\leqslant -4$或$-1\leqslant x\leqslant 1$或$x\geqslant 4\}$.

例2　解不等式$|x+1|>2-x$.

分析：解形如$|f(x)|>g(x)$的绝对值不等式，基本思路是：先去掉绝对值符号再求解，去绝对值符号的操作步骤是：根据绝对值的定义，分$f(x)\geqslant 0$和$f(x)<0$两种情况，分别去掉绝对值符号，将原不等式转化为两个不等式组来求解.

精讲：根据绝对值的定义可知：$|x+1|=\begin{cases}x+1(x\geqslant -1)\\ -x-1(x<-1)\end{cases}$，于是，原不等式可等价变形为$\begin{cases}x+1\geqslant 0\\ x+1>2-x\end{cases}$…①或$\begin{cases}x+1<0\\ -x-1>2-x\end{cases}$…②，由①得$\begin{cases}x\geqslant -1\\ x>\frac{1}{2}\end{cases}$，即$x>\frac{1}{2}$；由②得$\begin{cases}x<-1\\ -1>2\end{cases}$，此不等式组无解.

由此可得原不等式的解集为$\{x|x>\frac{1}{2}\}$.

评析：1. 本题也可以对$2-x$进行分类讨论求解. 原不等式可转化为$\begin{cases}2-x\geqslant 0\\ |x+1|^2>(2-x)^2\end{cases}$…①或$\begin{cases}2-x<0\\ x\in\mathbf{R}\end{cases}$…②，由①得$\frac{1}{2}<x\leqslant 2$，由②得$x>2$，由此得原不等式的解集为$\{x|x>\frac{1}{2}\}$.

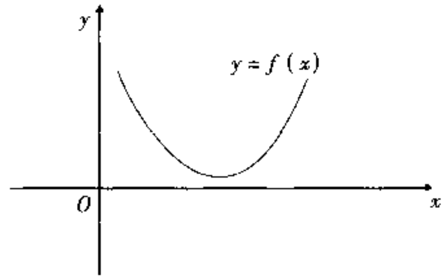
2. 一般地，对于形如$|f(x)|>g(x)$的绝对值不等式我们可以将它转化为$f(x)>g(x)$或$f(x)<-g(x)$来求解，其转化过程留给读者去研究.

例3　对一切非负实数x，不等式$(5-p)x^2-6x+p+5>0$恒成立，求实数p的取值范围.

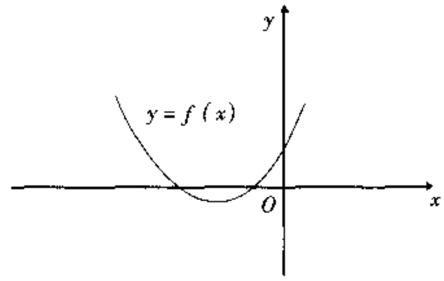
分析：分$5-p=0$和$5-p\neq 0$两种情况讨论来求解. 当$p=5$时，显然不满足条件；当$p\neq 5$时，所给不等式是一个一元二次不等式，将它转化为相应的二次函数来处理. 借助二次函数$f(x)=(5-p)x^2-6x+p+5$的图象，可直观地求出p的取值范围.

精讲：令$f(x)=(5-p)x^2-6x+p+5$，当$p=5$时，$f(x)=-6x+10$是一个一次函数，不满足题设条件；当$p\neq 5$时$f(x)=(5-p)x^2-6x+p+5$是一个关于x的二次函数，由二次函数的图象可知，要使$x\geqslant 0$时，$f(x)>0$恒成立，有两种情况：

①开口向上，与x轴无交点，如图所示.



②开口向上，与x轴有交点，但交点都在x轴的负半轴上，如图所示.



在①的情况之下，应有$5-p>0$且$\Delta=36-4(5-p)(p+5)=4(p^2-16)<0$，解之得$-4<p<4$.

在②的情况之下，应有$5-p>0$，$\frac{3}{5-p}<0$且$f(0)>0$，这不可能.

综上所述，可得p的取值范围是$(-4,4)$.

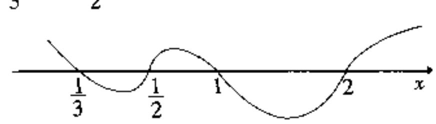
评析：将一元二次不等式的相关问题转化为相应的二次函数来处理，可以借助二次函数图象的直观性，使问题化繁为简，化难为易，尤其是关于恒成立问题，利用图象的直观性更为简捷.

例4　解下列分式不等式.

(1)$\frac{x^2-4x+1}{3x^2-7x+2}<1$；　　(2)$\frac{x-2a}{x-a^2}>0$.

(1)分析：由于分母$3x^2-7x+2$的符号不能确定，所以，不能采用去分母的方法来求解. 应先将所给的分式不等式转化为$\frac{f(x)}{g(x)}>0$的形式，然后将分子、分母分解因式，再利用数轴标根法来求解.

精讲：原不等式可变形为$\frac{-2x^2+3x-1}{3x^2-7x+2}<0$，将分子、分母分别分解因式得$\frac{(2x-1)(x-1)}{(3x-1)(x-2)}>0$，利用数轴标根法解之得解集为$(-\infty,\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{2},1)\cup(2,+\infty)$，如图所示.

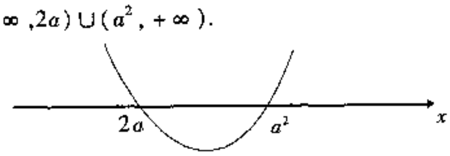


评析：解形如$\frac{f(x)}{g(x)}>a$的分式不等式，最容易出错的是：不考虑分母$g(x)$的取值范围，直接将它变形为$f(x)>ag(x)$来求

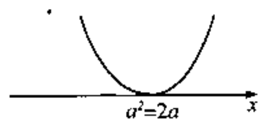
解，这显然是一种错误的变形，因为 $g(x)$ 取正、取负在没有确定之前，这种变形是没有依据的，是错误的. 一般地，求解形如 $\frac{f(x)}{g(x)}>a$ 的分式不等式，基本方法是：先将它变形为 $\frac{f(x)}{g(x)}-a>0$，再变形为 $\frac{f(x)}{g(x)}>0$，然后将分子、分母分解因式，再利用数轴标根法求得解集.

(2) 分析：要确定不等式 $\frac{x-2a}{x-a^2}>0$ 的解集，需要比较 $2a$ 与 a^2 的大小关系，由 $2a<a^2$ 解之得 $a<0$ 或 $a>2$，由此可知，当 $a<0$ 或 $a>2$ 时，$2a<a^2$；当 $0<a<2$ 时，$2a>a^2$；当 $a=0$ 或 $a=2$ 时，$2a=a^2$. 得出 $2a$ 与 a^2 的大小关系之后，再利用数轴标根法即可求出原不等式的解集.

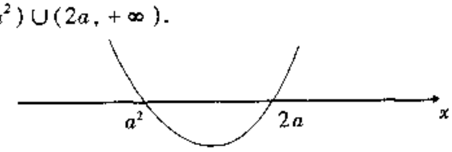
精讲：当 $a<0$ 或 $a>2$ 时，$2a<a^2$，由图可知，原不等式的解集为 $(-\infty,2a)\cup(a^2,+\infty)$.



当 $a=0$ 或 $a=2$ 时，$2a=a^2$，原不等式的解集为 $(-\infty,2a)\cup(2a,+\infty)$.



当 $0<a<2$ 时，$2a>a^2$，由图可知，原不等式的解集为 $(-\infty,a^2)\cup(2a,+\infty)$.



评析：解含有参数的不等式，其解集由参数的取值范围而确定，确定参数的取值范围通常由根的大小比较得出参数的范围.

例 5　不等式 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$ 的解集记为 A，不等式 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$ 的解集记为 B，求使 $A\subseteq B$ 成立的 a 的取值范围.

分析：先将集合 A 对应的不等式化简求解，再对集合 B 对应的不等式的解的范围进行分析，然后利用包含关系 $A\subseteq B$，对参数 a 进行分类讨论求解，即可确定 a 的取值范围.

精讲：由 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$，得 $-\frac{(a-1)^2}{2}\leqslant x-\frac{(a+1)^2}{2}\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$，化简得，$2a\leqslant x\leqslant a^2+1$，$A=\{x|2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$

由 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$，得 $(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant 0$，方程 $(x-2)[x-(3a+1)]=0$ 的两个根为 $x=2$ 或 $x=3a+1$，因此，适合不等式 $(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant 0$ 的 x 的取值范围介于 2 与 $3a+1$ 之间. 要确定集合 B，需要比较 2 与 $3a+1$ 的大小，由 $3a+1>2$ 得 $a>\frac{1}{3}$，由此可知，当 $a>\frac{1}{3}$ 时，$3a+1>2$；当 $a=\frac{1}{3}$ 时，$3a+1=2$；当 $a<\frac{1}{3}$ 时，$3a+1<2$.

①当 $a>\frac{1}{3}$ 时，$3a+1>2$，集合 $B=\{x|2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$；

②当 $a=\frac{1}{3}$ 时，$3a+1=2$，集合 $B=\{x|x=2\}$；

③当 $a<\frac{1}{3}$ 时，$3a+1<2$，集合 $B=\{x|3a+1\leqslant x\leqslant 2\}$.

在条件①之下，要满足 $A\subseteq B$，应有 $\begin{cases}2a\geqslant 2,\\ a^2+1\leqslant 3a+1,\end{cases}$ 解之得 $1\leqslant a\leqslant 3$.

在条件②之下，要满足 $A\subseteq B$，应有 $2a=a^2+1=2$，解之得 $a=1$，与 $a=\frac{1}{3}$ 矛盾.

在条件③之下，要满足 $A\subseteq B$，应有 $\begin{cases}2a\geqslant 3a+1,\\ a^2+1\leqslant 2,\end{cases}$ 解之得 $a=-1$.

综上所述，得到满足条件 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围是：$1\leqslant a\leqslant 3$ 或 $a=-1$.

评析：本题的实质属于含参不等式的讨论求解问题. 一般地，解含有参数的不等式，要把握好分类讨论的标准. 对于一元二次含参不等式，首先应考虑根的存在性，在存在根的情况下，要确定不等式的解集，需要比较两个根的大小，由根的大小比较就自然地得出了参数的分类讨论的取值范围. 然后在每一个范围内即可确定不等式的解集.

反思与延伸

1. 对于 $|x|\leqslant a\Leftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a\ (a>0)$ 和 $|x|\geqslant a\Leftrightarrow x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a\ (a>0)$ 这两个模型的不等式，可以将它们推广为：

$|f(x)|\leqslant g(x)\Leftrightarrow -g(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ 和 $|f(x)|\geqslant g(x)\Leftrightarrow f(x)\geqslant g(x)$ 或 $f(x)\leqslant -g(x)$，利用这一结论，对解形如 $|f(x)|\leqslant g(x)$ 和 $|f(x)|\geqslant g(x)$ 的绝对值不等式可以简化解题过程.

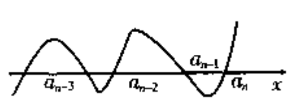
2. 对于一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$ 的求解，首先要考虑二次项系数 a 的符号. 如果 $a<0$，则应利用不等式的性质，将二次项系数转化为正数，然后计算判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的值，若 $\Delta<0$，则直接写出解集；若 $\Delta\geqslant 0$，则先求出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，再结合二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象写出解集. 如果 $a>0$，则直接计算判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的值，然后按照上述方法求出解集.

3. 对于分式不等式的求解，基本思路是将它转化为整式不等式来求解，也可以直接将分子、分母分解因式之后利用数轴标根法求解.

4. 利用数轴标根法求解简单的高次不等式时，应注意两点：

(1) 因式分解要化为标准型：即每个因式中 x 的系数应为正. 其标准型为：$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)>0$ 或 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)<0$.

(2) 在数轴上标根时要按照根 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的大小顺序依次排列，不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，画曲线时要从数 a_n 的右侧从上往下依次穿过根 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_2,a_1$ 对应的点，如图所示，则曲线在 x 轴上方的部分对应的点的横坐标 x 满足条件 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)>0$，在 x 轴下方的部分对应的点的横坐标 x 满足条件 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)<0$，由此即可确定不等式的解集. 当因式中含有完全平方式 $(x-a)^2$ 时，则需要对 $x=a$ 进行单独检验.



3. 简易逻辑

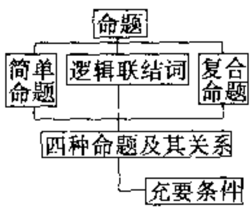
考点与知识

◆考点

(1)判断命题的真假性;(2)探索复合命题的等价性;(3)判断条件的充分性和必要性;(4)探求结论成立的充要条件;(5)反证法证题的操作步骤.

◆知识要点

1. 知识结构框图



2. 相关知识点

(1)常用的逻辑联结词有"或"、"且"、"非".

(2)不含逻辑联结词构成的命题称为简单命题.

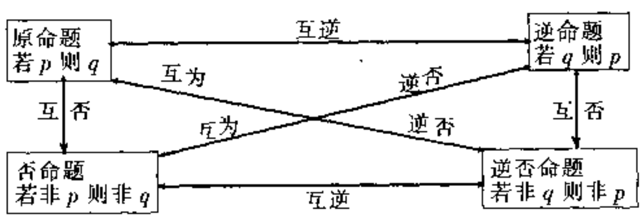
(3)由简单命题与逻辑联结词构成的命题称为复合命题.

(4)命题 p 与非 p 不可同真同假,p 真非 p 假,p 假非 p 真.

(5)当命题 p 与 q 同真时,p 且 q 为真,其余情况均为假.

(6)当命题 p 与 q 都为假时,p 或 q 为假,其余情况为真.

(7)原命题、逆命题、否命题和逆否命题之间有如下关系:



原命题为真,它的逆命题不一定为真;它的否命题也不一定为真;原命题为真,它的逆否命题一定为真.

(8)若 p 则 q 是真命题,即 $p \Rightarrow q$,则称 p 是 q 的充分条件,q 是 p 的必要条件.

若有 $p \Leftrightarrow q$,则称 p 是 q 的充要条件.

(9)反证法是通过证明命题结论的反面不成立而肯定命题成立的一种数学证明方法.用反证法证明命题成立的关键在于导出矛盾.

预习与自查

1. 下列语句中构成真命题的是(　　)

A. 各边相等的四边形是正方形

B. 如果 $b^2-4ac>0$,那么方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实根

C. 如果点 P 到 A,B 两点的距离相等,那么 P 点在线段 AB 的垂直平分线上

D. $\triangle ABC$ 的外心必定在 $\triangle ABC$ 的外部

2. 由下列各组命题构成"p 或 q"、"p 且 q"、"非 p"形式的复合命题中,p 或 q 为真,p 且 q 为假,非 p 为真的是(　　)

A. p:3 是偶数,q:4 是奇数

B. p:$3+2=6$,q:$5>3$

C. p:$a\in\{a,b\}$,q:$\{a\}\subsetneqq\{a,b\}$

D. p:$\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$,$q$:$\mathbf{N}=\mathbf{N}^*$

3. 用反证法证明命题"若 $a\in\mathbf{R}$,$3+a$ 是无理数,则 a 是无理数"的过程如下:

假设 a 是有理数,根据有理数的运算法则,$3+a$ 是有理数,这与______矛盾,所以,假设不成立,原命题正确.

4. 用逻辑联结词填空,使得到的命题是一个真命题.

(1)若 $x\in A\cup B$,则 $x\in A$ ______ $x\in B$;

(2)若 $x\in A\cap B$,则 $x\in A$ ______ $x\in B$;

(3)若 $ab\neq0$,则 $a\neq0$ ______ $b\neq0$;

(4)若 $a^2-b^2=0$,则 $a=b$ ______ $a=-b$.

5. 给出下列命题:

①"$x+2=0$"是"$x=-2$"的充要条件;

②"$a^2>5$"是"$a^2>2$"的充分不必要条件;

③"$-2<x<0$"是"$|x|<2$"的必要不充分条件;

④"$(x+3)^2+(y-4)^2=0$"是"$(x+3)(y-4)=0$"的既不必要也不充分条件.

其中,真命题的序号是______.

精讲与精析

例1　对于任意实数 a,b,c,给出下列四个命题:

①"$a=b$"是"$ac=bc$"的充要条件;

②"$a+5$ 是无理数"是"a 是无理数"的充要条件;

③"$a>b$"是"$a^2>b^2$"的充分条件;

④"$a<5$"是"$a<3$"的必要不充分条件.

其中真命题的个数是(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

分析:根据充分条件、必要条件和充要条件的定义进行判断.

答案:②,④为真命题,选 B.

例2　对命题 p:"1 是集合 $\{x|x^2<a\}$ 中的元素",q:"2 是集合 $\{x|x^2<a\}$ 中的元素",则实数 a 为何值时,"p 或 q"是真命题? a 为何值时,"p 且 q"是真命题?

分析:先化简命题 p 和 q,然后根据"p 或 q"与"p 且 q"是真命题的真值表去寻找使它们成立的条件.

精讲:因为 1 是集合 $\{x|x^2<a\}$ 中的元素,所以,有 $a>1$;又因为 2 是集合 $\{x|x^2<a\}$ 中的元素,所以,有 $a>4$.

由于"p 或 q"是真命题,所以,应有 $\{a|a>1\}\cup\{a|a>4\}=\{a|a>1\}$,由此可知,当 $a>1$ 时,"p 或 q"是真命题.

由于"p 且 q"是真命题,所以,$\{a|a>1\}\cap\{a|a>4\}=\{a|a>4\}$,由此可知,当 $a>4$ 时,"p 且 q"是真命题.

评析:将逻辑联结词"或"、"且"与集合中的"并"、"交"运算相对应是解决本题的关键.

例3　给出条件 p:$x\sqrt{2x+3}=x^2$,条件 q:$2x+3=x^2$,试说明 p 是 q 的什么条件? 并说明判断理由.

分析:从集合的观点来分析充分条件和必要条件,本题只需说明满足条件 p 的方程的根构成的集合与满足条件 q 的方程的根构成的集合之间存在什么关系即可.

精讲:由方程 $x\sqrt{2x+3}=x^2$ 得 $x=0$ 或 $\sqrt{2x+3}=x$,解之得 $x=0$ 或 $x=3$,满足条件 p 的方程的根构成的集合 $A=\{0,3\}$.

由方程 $2x+3=x^2$ 得 $x=3$ 或 $x=-1$,满足条件 q 的方程的根构成的集合 $B=\{-1,3\}$.

显然,A、B 之间不存在包含关系,即 $A\not\subseteq B$,且 $B\not\subseteq A$,因此,p 既不是 q 的充分条件.又不是 q 的必要条件.

评析:利用集合的观点来认识充分条件和必要条件有如下结论:若 $A\subseteq B$,则 A 是 B 的充分条件;若 $A\supseteq B$,则 A 是 B 的必要条件;若 $A\not\subseteq B$,$A\not\supseteq B$,则 A 不是 B 的充分条件,也不是 B 的必要条件.对于方程或不等式构成的命题,利用集合的观点来判断充分条件和必要条件是十分方便的.

例4 写出命题"已知 a 与 b 都是正有理数,若 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 是无理数,则 $\sqrt{a}$,$\sqrt{b}$ 都是无理数"的逆命题、否命题和逆否命题.分别指出四种命题的真假,并说明理由.

分析:题目中的"已知 a 与 b 都是正有理数"是大前提,写其他三种命题时大前提不改变.说明一个命题是假命题,只需举一个反例即可;说明一个命题是真命题,必须给出证明,当直接证明有困难时,可考虑用反证法.

精讲:原命题是假命题.取 $a=2$,$b=4$,$\sqrt{a}+\sqrt{b}=2+\sqrt{2}$ 是无理数,$\sqrt{b}=\sqrt{4}=2$ 不是无理数.

逆命题:"已知 a 与 b 都是正有理数,若 $\sqrt{a}$,$\sqrt{b}$ 都是无理数,则 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 是无理数".

逆命题是真命题,用反证法证明如下:

假设 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 是有理数,则 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b\cdots(*)$,由 $a>0$,$b>0$ 得 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$,由$(*)$式得 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$,因为 a,b 是正有理数,$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 是正有理数,所以,$\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ 是有理数,即 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 是有理数.又因为 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 是有理数,所以,$(\sqrt{a}-\sqrt{b})+(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ 是有理数,即 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})+(\sqrt{a}+\sqrt{b})=2\sqrt{a}$ 是有理数,从而 $\sqrt{a}$ 是有理数,这与已知条件 $\sqrt{a}$ 是无理数矛盾,所以,$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 是无理数.

否命题:"已知 a 与 b 都是正有理数,若 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 是有理数,则 $\sqrt{a}$ 或 $\sqrt{b}$ 是有理数".因为否命题与逆命题互为逆否命题,它们同真同假,由于逆命题为真,所以,否命题也为真.

逆否命题:"已知 a 与 b 都是正有理数,若 $\sqrt{a}$ 或 $\sqrt{b}$ 是有理数,则 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 是有理数",因为逆否命题与原命题同真同假.而原命题是假命题,所以,逆否命题也是假命题.

评析:将一个命题否定,要注意逻辑联结词的否定.如本题中否命题的写法,否命题的结论应该是"$\sqrt{a}$,$\sqrt{b}$ 都是无理数"的否定.事实上,"$\sqrt{a}$,$\sqrt{b}$ 都是无理数"的等价说法是:$\sqrt{a}$ 是无理数且 $\sqrt{b}$ 是无理数,因此,它的否定应该是:$\sqrt{a}$ 是有理数或 $\sqrt{b}$ 是有理数,"且"的否定是"或","或"的否定是"且","且"与"或"互为否定词.

例5 已知 $p:\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$,$q:x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$,且 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要条件,求实数 m 的取值范围.

分析:利用集合的观点来分析所给的问题.先写出 $\neg p$ 和 $\neg q$ 的最简形式,然后由 $\neg q\Rightarrow\neg p$ 即可确定 m 的取值范围.

精讲:由 $\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$ 得 $-2\leqslant x\leqslant 10$;$p$:$M=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 10\}$,$\neg p$:$A=\complement_{\mathbf{R}}M=\{x\mid x<-2$ 或 $x>10\}$

由 $x^2-2x+1-m^2\leqslant 0$ 得 $1-m\leqslant x\leqslant 1+m$,$q$:$N=\{x\mid 1-m\leqslant x\leqslant 1+m\}$,$\neg q$:$B=\complement_{\mathbf{R}}N=\{x\mid x<1-m$ 或 $x>1+m,m>0\}$

因为 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要条件,则有 $\neg q\Rightarrow\neg p$,$B\subseteq A$.由此得 $\begin{cases}m>0\\1-m\leqslant -2\\1+m\geqslant 10\end{cases}$,解之得 $m\geqslant 9$.

评析:在涉及到字母参数的取值范围的充要条件的问题中,一般地,利用集合之间的包含或相等关系来处理这一类问题较为简捷.

反思与延伸

1. 命题的否定和否命题是两个不同的概念.设原命题为"若 p 则 q",那么,此命题的否定是:"若 p 则 $\neg q$",此命题的否命题是:"若 $\neg p$ 则 $\neg q$".

2. 对复合命题的否定,要注意对逻辑联结词的否定.一般地,有如下结论:

非(p 且 q)══非 p 或非 $q\Leftrightarrow\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$

非(p 或 q)══非 p 且非 $q\Leftrightarrow\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

3. 判断原命题、逆命题、否命题和逆否命题的真假,只需判断原命题和逆命题的真假即可.因为原命题与逆否命题,逆命题与否命题都是互为逆否的关系,它们同真同假.当我们直接判断一个命题是真命题或假命题有困难时,我们可以改为判断它的逆否命题的真假,这样往往可以使问题化难为易.

4. 运用集合的观点去认识充分条件和必要条件,可以使问题简化.一般地,若 $A\subseteq B$,则 A 是 B 的充分条件,B 是 A 的必要条件;若 $A=B$,则 A 是 B 的充要条件.

5. 反证法是一种重要的数学证明方法.当我们直接证明一个数学命题感到困难时,可以考虑使用反证法.运用反证法证明一个数学命题"若 p 则 q"的关键步骤是导出矛盾.矛盾的产生通常有以下几种形式:(1)导出 $\neg p$ 为真,与原命题的条件 p 为真矛盾;(2)导出 q 为真,与假设 $\neg q$ 为真矛盾;(3)导出一个恒假的命题.

4. 全章回眸

本章高考解读

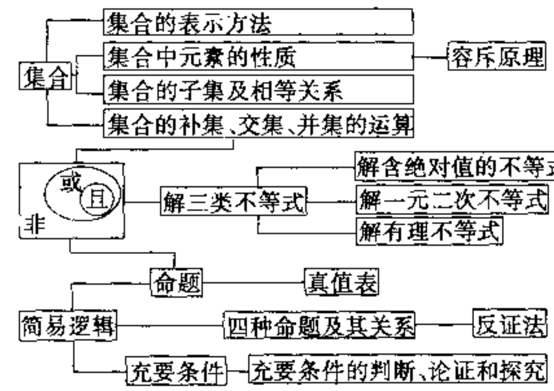
集合与简易逻辑是新课程的奠基内容，也是整个中学数学的基础. 它的基础性主要体现在两个方面. 第一，集合的语言、集合的符号和集合的思想在高中数学的许多章节如函数与数列，方程与不等式，立体几何与解析几何中都被广泛使用，可以说集合这个概念几乎覆盖了整个高中数学；第二，数学离不开变换与推理，而变换与推理又离不开命题、充要条件和逻辑联结词，因为它们是全面理解概念，准确表述判断和正确实施推理的重要工具.

集合与简易逻辑这部分内容蕴涵着丰富多彩的数学思想，如集合与函数的思想，等价转化的思想，分类讨论的思想和数形结合的思想等.

近几年的高考试题，关于集合与简易逻辑这部分内容的题目，可分为两大类：一类是集合与不等式（绝对值不等式、一元二次不等式和分式不等式）、命题与充要条件单列的基础题，这类题目通常以选择题和填空题的形式出现. 如 2003 年上海卷第 5 题，2002 年全国卷第 5 题，2004 年全国卷第 1 题，2004 年浙江卷第 1 题，2004 年江苏卷第 1 题，2005 年全国卷第 2 题，2005 年上海卷第 14 题，北京卷第 1 题，2006 年全国卷 I 第 1 题，2006 年江苏卷第 7 题等，都是以选择题和填空题的形式直接判断集合与元素的关系和直接求集合的并、交、补运算，都属于容易题. 又例如 2003 年上海卷第 6 题，2003 年天津卷第 4 题，2004 年重庆卷第 4 题，2002 年天津卷第 2 题，2005 年广东卷第 1 题，2005 年江西卷第 1 题，2005 年福建卷第 7 题，2006 年四川卷第 1 题，2006 年福建卷第 4 题，2006 年江西卷第 1 题等，都是以选择题和填空题的形式直接求出绝对值不等式、一元二次不等式和分式不等式的解集，都属于容易题. 又例如 2003 年上海卷第 16 题，2002 年北京卷第 15 题，2004 年全国卷第 16 题，2005 年湖北卷第 2 题，2005 年天津卷第 3 题，2006 年湖北卷第 8 题，2006 年山东卷第 16 题等，都是以选择题和填空题的形式直接判断命题的真假性. 再例如 2003 年北京卷第 3 题，2003 年上海卷第 15 题，2004 年上海卷第 14 题，2004 年辽宁卷第 3 题，2004 年天津卷第 8 题，2004 年重庆卷第 7 题，2005 年江西卷第 3 题，2005 年重庆卷第 6 题，2005 年山东卷第 10 题，2006 年天津卷第 4 题，2006 年湖南卷第 4 题，2006 年浙江卷第 7 题等，都是以选择题和填空题的形式直接判断充分条件或必要条件的基础题. 另一类是集合与不等式，命题与充要条件融合在其他内容中的综合性题目，如 2003 年全国卷第 19 题，第 22 题，2001 年全国卷第 21 题，2002 年上海卷第 22 题，2005 年全国卷第 17 题，2005 年江西卷第 17 题，2006 年上海卷第 20 题等，这一类题目渗透了丰富的数学思想，体现了灵活的数学方法，常常作为压轴题来考查学生的创新能力.

本章内容考试的重点是集合的概念与运算，条件的充要性的判定，命题真假性的判断；难点是集合思想的灵活运用，充要条件的论证，复合命题真假性的判断.

知识结构框图



典型题目剖析

例 1 已知集合 $A=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=a+1\}$，集合 $B=\{(x,y)|(a^2-1)x+(a-1)y=30\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的值.

分析：集合 A 的几何意义是：一条直线 $l_1: y-3=(a+1)(x-2)$ 去掉一个点 $M(2,3)$；集合 B 的几何意义是：当 $a\neq 1$ 时，表示一条直线 $l_2:(a^2-1)x+(a-1)y=30$，当 $a=1$ 时，$B=\varnothing$. 条件 $A\cap B=\varnothing$ 的几何意义是 $l_1 /\!/ l_2$，反映在代数上，就是由 l_1 与 l_2 的方程组成的方程组无解，通过方程组无解的分析，即可求出实数 a 的值.

精讲：由条件 $A\cap B=\varnothing$ 可知，方程组 $\begin{cases}\frac{y-3}{x-2}=a+1,\\(a^2-1)x+(a-1)y=30\end{cases}$ ···①

无解，也就是混合组 $\begin{cases}x\neq 2,\\y-3=(a+1)(x-2),\\(a^2-1)x+(a-1)y=30\end{cases}$ ···②解解. 由②式消去 y 得 $2(a^2-1)x=2a^2-3a+31$···③，当 $a^2=1$ 时，方程③无解，此时，混合组②也无解；当 $a^2\neq 1$ 时，由②得 $x=\frac{2a^2-3a+31}{2(a^2-1)}$，令 $\frac{2a^2-3a+31}{2(a^2-1)}=2$，解之得 $a=-5$ 或 $a=\frac{7}{2}$，因为混合组②中 $x\neq 2$，所以，当 $a=-5$ 或 $a=\frac{7}{2}$ 时，方程组①无解.

综上所述，符合条件的实数 $a=1,-1,-5$ 或 $\frac{7}{2}$.

评析：本题的求解过程体现了等价转化的思想.

将条件 $A\cap B=\varnothing$ 转化为方程组

$\begin{cases}\frac{y-3}{x-2}=a+1,\\(a^2-1)x+(a-1)y=30\end{cases}$ 无解，通过对方程组无解的条件进行分析，求出了符合条件的 a 的值，这是从数的角度进行等价转化. 本题也可以从形的角度进行转化，将 $A\cap B=\varnothing$ 转化为直线 $l_1 /\!/ l_2$，然后利用直线的平行条件也可以求出 a 的值.

例 2 已知命题 p：函数 $f(x)=x^2-4mx+4m^2+2$ 在区间 $[-1,3]$ 上的最小值等于 2；命题 q：不等式 $x+|x-m|>1$ 对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立. 如果复合命题“p 或 q”为真，“p 且 q”为假、

试求实数 m 的取值范围.

分析:由条件"p 或 q"为真,"p 且 q"为假可知,命题 p,q 中有且只有一个为真,即 p 真 q 假或 p 假 q 真. 然后根据已知条件分别求出使命题 p,q 成立的 m 的范围,再利用 p 真 q 假或 p 假 q 真这一结论,即可求出实数 m 的取值范围.

精讲:$y=f(x)=(x-2m)^2+2$ 在区间$[-1,3]$上的最小值设为 y_{min},则

$y_{min}=\begin{cases}f(-1)>2(2m<-1),\\ f(2m)=2(-1\leqslant 2m\leqslant 3),\\ f(3)>2(2m>3),\end{cases}$ 于是,命题 p 是真命题$\Leftrightarrow$

$-1\leqslant 2m\leqslant 3\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant\frac{3}{2}$.

令 $g(x)=x+|x-m|$,则 $g(x)=\begin{cases}2x-m>m(x>m),\\ m(x\leqslant m)\end{cases}$ 的最小值为 m,于是,命题 q 是真命题$\Leftrightarrow m>1$.

记 $A=\{m\mid -\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant\frac{3}{2}\}$,$B=\{m\mid m>1\}$,则$[A\cap(\complement_{R}B)]\cup[B\cap(\complement_{R}A)]=[-\frac{1}{2},1]\cup(\frac{3}{2},+\infty)$,故所求的实数 m 的取值范围是$[-\frac{1}{2},1]\cup(\frac{3}{2},+\infty)$.

评析:1. 含参二次函数 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 在闭区间$[p,q]$上的最值问题要分类讨论求解. 分类的标准是:将对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$分别放置于区间$(-\infty,p]$,$(p,q]$或$(q,+\infty)$内,然后在每一个区间内讨论求解.

2. p 真 q 假$\Leftrightarrow p$ 真非 q 真;p 假 q 真$\Leftrightarrow$非 p 真 q 真.

例3　已知关于 x 的实系数一元二次方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个实数根 α,β,求证:$2|a|<b+4$ 且 $|b|<4$ 的充要条件是 $|\alpha|<2,|\beta|<2$.

分析1:由求根公式求出方程的实根,然后讨论根与系数的关系即可证得结论成立.

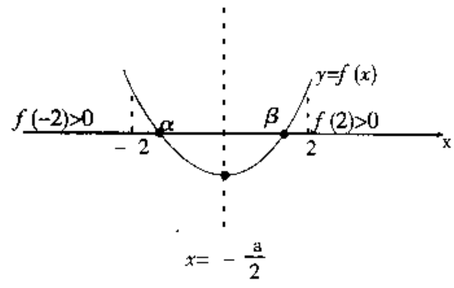
证法1:已知二次方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个实根 α,β,所以,$\Delta=a^2-4b\geqslant 0,\alpha\beta=b$,由求根公式得 $x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$.记 $\alpha=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$,$\beta=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$.

①充分性:因为$|\alpha|<2,|\beta|<2$,所以,$|b|=|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|<4$,$-2<\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}<2$,$-2<\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}<2$.由此得 $0\leqslant\sqrt{a^2-4b}<4-a$,$0\leqslant\sqrt{a^2-4b}<4+a$,两边平方得 $a^2-4b<16-8a+a^2$,$a^2-4b<16+8a+a^2$,由此变形得 $-4(4+b)<8a<4(4+b)$,即 $2|a|<4+b$.

②必要性:因为 $2|a|<4+b$ 且 $|b|<4$,所以,$|a|<\frac{1}{2}(4+|b|)<4$,$4\pm a>0$,$\Delta=a^2-4b<a^2-4(2|a|-4)=a^2\pm 8a+16=(4\pm a)^2$,因为 $\Delta>0$,所以,$4\pm a>\sqrt{a^2-4b}$,$-4<-a-\sqrt{a^2-4b}\leqslant -a+\sqrt{a^2-4b}<4$,由此得 $-2<\alpha\leqslant\beta<2$,即$|\alpha|<2,|\beta|<2$.

分析2:将一元二次方程实根的分布与二次函数的图象和性质相结合,可得如下简捷的证法.

证法2:设二次函数 $f(x)=x^2+ax+b$,它的两根均在$(-2,2)$内的充要条件是:



$$\begin{cases}f(-2)>0,\\ f(2)>0,\\ \Delta=a^2-4b\geqslant 0,\\ -2<-\frac{a}{2}<2.\end{cases}\qquad\cdots(*)$$

如图所示,$(*)$式即为$\begin{cases}4+b>2a,\cdots①\\ 4+b>-2a,\cdots②\\ a^2\geqslant 4b,\cdots③\\ -4<a<4.\cdots④\end{cases}$

由①,②得 $2|a|<4+b\cdots⑤$

由⑤得 $4+b>2|a|\geqslant 0,b>-4\cdots⑥$

由③,④得 $b\leqslant\frac{a^2}{4}<4\cdots⑦$

由⑥,⑦得$|b|<4$,所以,$2|a|<4+b$,且$|b|<4$.

分析3:利用根与系数的关系证明.

证法3:因为 $\alpha+\beta=-a,\alpha\beta=b$,所以,$\begin{cases}|\alpha|<2,\\ |\beta|<2\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}(\alpha^2-4)(\beta^2-4)>0,\\ |\alpha\beta|<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4(\alpha^2+\beta^2)<16+\alpha^2\beta^2,\\ |\alpha\beta|<4\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}4(\alpha+\beta)^2<(4+\alpha\beta)^2,\\ |\alpha\beta|<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2|\alpha+\beta|<4+\alpha\beta,\\ |\alpha\beta|<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2|a|<4+b,\\ |b|<4.\end{cases}$

评析:将已知条件和求证的结论逐步统一是解题的基本策略. 解决一个数学问题实际上就是实现条件与结论的统一. 分析问题首先要分析条件和结论之间的联系与差异,解题的思路就是从缩小差异、扩大联系去思考,直到实现条件和结论的统一. 本题充分性的证明就是抓住二次方程 $x^2+ax+b=0$ 的两个实根 α,β 的绝对值都小于2这个条件,去寻找它与结论 $2|a|<b+4$ 且$|b|<4$之间的联系,逐步缩小了条件与结论之间的差异,最后实现了条件和结论的统一,证明必要性也有类似的思路.

第二章 函数

1. 映射与函数

考点与知识

◆考点

理解映射和函数的定义,能够运用定义解决一些简单问题.

◆知识要点

1. 映射的定义:设 A,B 是两个集合,如果按照某种对应法则 f,对于集合 A 中的任何一个元素 a,在集合 B 中都有唯一的元素 b 与之对应,这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射,记作:映射 $f:A\to B$.

2. 函数的定义:

传统定义:如果在某个变化过程中,存在着两个变量 x,y,并且对于在某个范围内的每一个确定的 x 值,按照某种对应法则,都有唯一确定的 y 值和它对应,那么 y 就是 x 的函数.x 叫自变量,x 的取值范围叫做函数的定义域,和 x 对应的 y 值叫做函数值,函数值 y 构成的集合叫做函数的值域.

近代定义:设 A,B 都是非空数集,f 是从 A 到 B 的一个对应法则,那么 A 到 B 的映射 $f:A\to B$ 就叫做 A 到 B 的函数,记作 $y=f(x)$.其中,$x\in A,y\in B$.原象 x 的集合 A 叫做函数 $f(x)$ 的定义域,象的集合 C 叫做函数 $f(x)$ 的值域,显然 $C\subseteq B$.

3. 对应、映射、函数和方程的区别与联系:映射是特殊的对应,函数是特殊的映射;映射是两个任意性质的集合间的特殊对应,而函数必须为两个非空数集间的映射.函数的表达式是方程,但方程不一定是函数,因为方程中变量间不一定遵循映射的对应关系.

预习与自查

1. 已知映射 $f:A\to B$,其中集合 $A=\{-2,-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{2},1,2,3\}$,集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的象,且对任意的 $a\in A$,在 B 中和它对应的元素是 $|a|$,则集合 B 中元素的个数是( )

A.5　　B.6　　C.7　　D.8

2. 下列函数中,表示同一函数的是( )

A. $f(x)=1,g(x)=x^0$

B. $f(x)=x+1,g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

C. $f(x)=\sqrt{x^2},g(x)=|x|$

D. $f(x)=x,g(x)=(\sqrt{x})^2$

3. 设 A,B 是两个正整数集,映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中的元素 n 映射成集合 B 中的元素 2^n+n,则在映射 f 下,象 20 的原象是( )

A.2　　B.3　　C.4　　D.5

4. 设函数 $f(x)=-\frac{x}{1+|x|}(x\in\mathbf{R})$,区间 $M=[a,b]$,集合 $N=\{y|y=f(x),x\in M\}$,则 $M=N$ 成立的实数对 (a,b) 有( )

A. 0 个　　B. 1 个

C. 2 个　　D. 无限多个

5. 设集合 $A=\{1,2,3\}$,集合 $B=\{a,b,c\}$,那么从集合 A 到 B 的映射的个数为( )

A. 3　　B. 27　　C. 9　　D. 18

精讲与精析

例1　从集合 A 到集合 B 的映射是 $f:x\to y=\frac{x}{2x+1}$,从集合 B 到集合 C 的映射是 $g:y\to z=y^2-4y$,则 A 中的元素 1 在 C 中的象是什么? C 中的元素 0 在 A 中的原象是什么?

分析:由题意可用映射的传递性求解.

精讲:因为 $f:A\to B$,即 $x\to y=\frac{x}{2x+1}$,$\therefore x=1\Rightarrow y=\frac{1}{2\times1+1}=\frac{1}{3}$.

又因为 $g:B\to C$,即 $y\to z=y^2-4y$,$\therefore y=\frac{1}{3}\Rightarrow z=(\frac{1}{3})^2-4\times\frac{1}{3}=-\frac{11}{9}$.

所以 A 中元素 1 在 C 中的象是 $-\frac{11}{9}$.

当 $z=0$ 时,$y^2-4y=0\Rightarrow y=0$ 或 $y=4$.

当 $y=0$ 时,$x=0$;

当 $y=4$ 时,$x=-\frac{4}{7}$.

所以,C 中元素 0 在 A 中的原象是 0 或 $-\frac{4}{7}$.

评析:解答本题的关键是运用映射的定义.

例2　设集合 A 和 B 是坐标平面上的点集 $\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中的元素 (x,y) 映射成集合 B 中的元素 $(x+y,x-y)$,则在映射 f 下,$(2,1)$ 的原象是______,$(2,1)$ 的象是______.

分析:根据映射的相关概念,分清象与原象和对应法则即可解决此题.

精讲:由题意知 $f:(x,y)\to(x+y,x-y)$ 为两点集的映射,由 $\begin{cases}x+y=2,\\x-y=1,\end{cases}$ 解之得 $\begin{cases}x=\frac{3}{2},\\y=\frac{1}{2},\end{cases}$ 即 $(2,1)$ 的原象是 $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$;同理可得 $(2,1)$ 的象是 $(3,1)$.

评析：原象与象靠法则对应起来，注意对应关系，哪个是象，哪个是原象，注意方向性.

例3 某旅游点有50辆自行车供游客租用，管理这些车的费用是每天115元，据调查，若每辆车日租金不超过6元时，则自行车可以全部租出；若超过6元，每超过1元，租不出去的自行车就会增加3辆. 为了便于结算，每辆车的日租金 x（元）只取整数，并且要求出租自行车一日总收入必须高于这一日的管理费用. 用 y（元）表示出租自行车的日净收入.

(1)求函数的解析式及定义域；

(2)试问当每辆自行车的日租金定价为多少元时，才能使一日的净收入最多？

分析：抓住一个等量关系：日净收入 = 日出租的总收入 - 管理费，建立函数关系式.

精讲：(1)由题意可得，当 $x \leqslant 6$ 时，$y = 50x - 115$，

令 $50x - 115 > 0$，解得 $x > 2.3$，

因为 $x \in \mathbf{N}$，所以 $3 \leqslant x \leqslant 6$，且 $x \in \mathbf{N}$，

当 $x > 6$ 时，$y = [50 - 3(x-6)]x - 115 = -3x^2 + 68x - 115$，

令 $y > 0$ 即 $3x^2 - 68x + 115 < 0$，解得 $2 \leqslant x \leqslant 20, x \in \mathbf{N}$，

所以，函数解析式为

$$y = \begin{cases} 50x - 115, (3 \leqslant x \leqslant 6, x \in \mathbf{N}) \\ -3x^2 + 68x - 115. (6 < x \leqslant 20, x \in \mathbf{N}) \end{cases}$$

(2)当 $y = 50x - 115 (3 \leqslant x \leqslant 6, x \in \mathbf{N})$ 时，显然 $x = 6$，y 取最大值185元.

当 $y = -3x^2 + 68x - 115 = -3(x - \frac{34}{3})^2 + \frac{811}{3} (6 < x \leqslant 20, x \in \mathbf{N})$ 时，$x = 11$，y 取最大值270元.

综上所述，当每辆自行车的日租金定价在11元时，才能使收入最高.

评析：应用题是高考的热点，弄清题意，找到等量关系是解题的关键，还要注意自变量的实际取值范围.

例4 （2004年上海高考题）记函数 $f(x) = \sqrt{2 - \frac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为 A，$g(x) = \lg[(x-a-1)(2a-x)] (a < 1)$ 的定义域为 B.

(1)求 A；

(2)若 $B \subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

分析：函数的定义域实质是使函数有意义的 x 的取值范围. 而 $B \subseteq A$ 是满足 B 的实数必须满足 A.

精讲：(1) $A = \left\{x \mid 2 - \frac{x+3}{x+1} \geqslant 0\right\} = \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x \geqslant 1\}$.

(2) $B = \{x \mid 2a < x < a+1\}$，

所以 $2a \geqslant 1$ 或 $a + 1 \leqslant -1$.

故 $a \leqslant -2$ 或 $\frac{1}{2} \leqslant a < 1$.

评析：关键是满足 B 的实数必须满足 A.

例5 （2005湖北高考）已知函数 $f(x) = a - \frac{1}{|x|}$，

(1)求证：函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数；

(2)若 $f(x) < 2x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围；

(3)若函数 $y = f(x)$ 在 $[m, n]$ 上的值域是 $[m, n]$，求实数 a 的取值范围.

精讲：(1)直接用定义作差比较即可.

(2)由 $f(x) < 2x \Leftrightarrow a < 2x + \frac{1}{|x|}$，当 $x \in (0, +\infty)$ 时，$2x + \frac{1}{x} \geqslant 2\sqrt{2} \Rightarrow a < 2\sqrt{2}$.

(3)由函数 $f(x) = a - \frac{1}{|x|}$ 的图象知函数 $y = f(x)$ 为偶函数，在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数，且在 $[m, n]$ 上的最值由端点取到，故① $\begin{cases} f(m) = n \\ f(n) = m \end{cases}$，即方程 $f(x) = -x \Leftrightarrow a = x - \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有两解，显然不可能；或② $\begin{cases} f(m) = n \\ f(n) = m \end{cases}$，即方程 $f(x) = x \Leftrightarrow a = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两解，则 $a > 2$.

评析：(1)可用复合函数的单调性直接判断，也可用定义证明，两种方法都是应该掌握的基本方法；

(2) $a < f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a$ 小于 $f(x)$ 的最小值，反之，a 大于 $f(x)$ 的最大值；

(3)要解决此问题，必须弄清从 $y = \frac{1}{x}$ 到 $y = a - \frac{1}{|x|}$ 的图象变换，再数形结合.

反思与延伸

1. 映射的定义是有方向性的，即从集合 A 到 B 与从集合 B 到 A 的映射是两个不同的映射，映射是一种特殊的对应关系，只有一对一，多对一的对应才有可能是映射.

2. 函数的定义有两种：一种从元素的角度来定义；一种从集合的角度来定义，它们都有三个要素：定义域、值域和从定义域到值域的对应法则，函数是一种特殊的映射.

3. 判断两个函数的解析式是否为同一函数，抓住函数的三要素是解题的关键.

2. 函数的解析式与定义域

考点与知识

◆考点

掌握求函数解析式与定义域的常见方法.

◆知识要点

1. 函数解析式是函数的一种表示方法，在求函数解析式时，要注意找出它们的对应法则与函数的定义域，两者缺一不可（函数的表示还有列表法和图象法）.

2. 求函数解析式的方法有待定系数法，换元法，配凑法，消参法等.

3. 根据函数解析式求定义域要注意：分式的分母不能等于零；根式的根指数为偶数时被开方数大于等于零；对数式的真数大于零，底数大于零且不等于1；另外，三角函数、反三角函数等还有其他的限定条件.

4. 如果函数是一些基本函数通过四则运算复合而成，那么它的定义域是使各部分都有意义的 x 值组成的集合.

5. 已知$f(x)$的定义域为A,求函数$f[g(x)]$的定义域,实际上是已知中间变量$u=g(x)$的值域($u\in A$),求$u=g(x)$的自变量x的取值范围.

预习与自查★

1. 函数$y=\sqrt{\dfrac{2+x}{1-x}}+\sqrt{x^2-x-2}$的定义域是(　　)

A. $\{x|-2\leqslant x\leqslant -1\}$　　B. $\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$

C. $\{x|x>2\}$　　D. $\{x|x\neq 1,x\in\mathbf{R}\}$

2. 已知函数$f(x)=\dfrac{1}{x+1}$,则$f[f(x)]$的定义域为(　　)

A. $\{x|x\neq -2\}$

B. $\{x|x\neq -1\}$

C. $\{x|x\neq -2$ 且 $x\neq -1\}$

D. $\{x|x\neq -2$ 或 $x\neq -1\}$

3. 下列函数:$y=2x+5$;$y=\dfrac{1}{x^2+1}$;$y=\sqrt{x-|x|}$;

$y=\begin{cases}2x,(x\geqslant 4)\\ \sqrt{x+1}(-1\leqslant x<4)\end{cases}$中,定义域是$\mathbf{R}$的函数有(　　)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

4. 设$f(x)=\dfrac{1}{1-x}(x\neq 0,x\neq -1)$,则$f\{f[f(x)]\}$的解析式是(　　)

A. $\dfrac{1}{1-x}$　　B. $\dfrac{1}{(1-x)^3}$

C. $-x$　　D. x

5. 函数$y=\sqrt{25-x^2}+\lg\cos x$的定义域为________.

精讲与精析

例1　求下列函数的定义域.

(1)$f(x)=\dfrac{\sqrt{3-x}}{|x|-2}$;　　(2)$f(x)=\dfrac{(x+1)^0}{\sqrt{|x|-x}}$

精讲:(1)要使函数有意义,x需满足:

$\begin{cases}3-x\geqslant 0\\ |x|-2\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant 3\\ x\neq\pm 2\end{cases}\Rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,3]$

(2)由题意知x需满足:

$\begin{cases}x+1\neq 0\\ |x|-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq -1\\ x<0\end{cases}\Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)$.

评析:在不作特殊说明的情况下,函数的定义域是使函数表达式有意义的自变量的取值范围.

例2　用长为l的铁丝弯成下部为矩形,上部为半圆形框架,若矩形底边长为$2x$,求此框架围成的面积S与x的函数关系式,并写出它的定义域.

分析:问题的关键是找到圆的直径是$2x$.

精讲:由题知圆的半径为x,所以

$S=\dfrac{1}{2}x(2l-4x-\pi x)\left(0<x<\dfrac{l}{\pi+2}\right)$

评析:矩形的另一边必须大于零,由此确定了函数的定义域.

例3　已知函数$f(x)$的定义域是$[0,1]$,那么$f(x^2-1)$的定义域是(　　)

A. $[0,1]$　　B. $[1,2]$

C. $[1,\sqrt{2}]$　　D. $[-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}]$

分析:求复合函数定义域的问题,首先要求$f(x^2-1)$的定义域,实际上是求使中间变量$u=x^2-1$在$u\in[0,1]$上对应的x的取值范围.

精讲:令$u=x^2-1$,$\therefore f(x^2-1)=f(u)$,由已知得

$0\leqslant x^2-1\leqslant 1$

即$x\in[-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}]$.

评析:抓住复合函数的定义是解题的关键.明确中间变量是什么,然后代入主函数的定义域中即可确定x的范围.

例4　某人要建造一个长方体的家用蓄水池,它的容积为8m^3,深为2m,如果池底和池壁的造价每平方米分别为120元和80元,那么水池的最低总造价为多少元?

分析:问题的关键是要寻找总造价与池底的长或宽的函数关系.

精讲:方法1:设池底的一边长为x米,水池的总造价为y元.

则$y=120\times\dfrac{8}{2}+80\left(4x+4\times\dfrac{8}{2x}\right)=480+320\left(x+\dfrac{4}{x}\right)$

$(x>0)$,

$\because x+\dfrac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{x\times\dfrac{4}{x}}=4$,当且仅当$x=\dfrac{4}{x}\Rightarrow x=2$时取等号,

$\therefore y$的最小值为$480+320\times 4=1760$(元).

方法2:由于容积和池深均为定值,则底面积为定值,从而底面造价为定值,这样水池的总造价与底面周长有关.

因为面积为定值的矩形中,正方形的周长最短,从而很快求出总造价为

$480+1280=1760$(元).

评析:方法一的关键是建立函数关系式,再利用基本不等式求得造价的最小值;方法二利用了解选择题和填空题的做法,没有列出函数解析式,而是采取分步求解的方法.

例5　已知函数$f(x)=\lg(x^2-mx+3)$(m为常数),

(1)函数$f(x)$的定义域与值域能否同时为实数集$\mathbf{R}$?证明你的结论;

(2)是否能找到这样的实数m,使函数$f(x)$的定义域和值域同时为$[1,+\infty)$,若有这样的实数,请求出m的值,若没有,请说明理由.

分析:(1)中给出的信息对任意$x\in\mathbf{R}$,都有$x^2-mx+3>0$恒成立,且x^2-mx+3取遍$(0,+\infty)$上的所有值,而(2)要求当任意$x\in[1,+\infty)$时,$x^2-mx+3\geqslant 10$恒成立.

精讲:(1)由于对任意$x\in\mathbf{R}$,都有$x^2-mx+3>0$恒成立,

令$y=x^2-mx+3$,则对任意$x\in\mathbf{R}$,$y>0$恒成立,所以$\Delta<0$,

又因为x^2-mx+3取遍$(0,+\infty)$上的所有值(定义域不一定为$\mathbf{R}$),则$\Delta\geqslant 0$.

故满足题意的m的值不存在.

(2)由题意知,当$x\in[1,+\infty)$时,$x^2-mx+3\geqslant 10$,

令$g(x)=x^2-mx+3\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{m}{2}\leqslant 1\\ g(1)=10\end{cases}\Rightarrow m=-6$.

所以,满足题意的m的值存在且$m=-6$.

评析:本题考查二次函数在给定区间$[1,+\infty)$上的值域必须满足条件$y\in[10,+\infty)$,需要寻找满足$y\in[10,+\infty)$的限制条件.

反思与延伸

1. 分段函数是一类重要的函数,要熟练掌握分段函数解析

式中求对应函数值的方法.

2. 关于复合函数的表达式,要特别注意内层函数的值域应在外层函数定义域的哪一段内,进而选择相应的表达式计算.

3. 对含有参数的函数求其定义域,或已知定义域,求参数的取值范围,要注意对参数的取值情况进行分类讨论.

4. 由实际问题确定函数关系式时,关键是建立函数模型,其步骤是:①设元;②列式;③用 x 表示 y;④考虑函数定义域(定义域必须使实际问题有意义).

3. 函数的值域与最值

考点与知识

◆考点

掌握函数值、函数值域和函数最值的概念和求函数值域与函数最值的方法.

◆知识要点

1. 函数值、函数值域和函数最值的关系:函数值是一个局部概念,函数值域是一个整体概念,函数值域是函数值的集合.函数的所有函数值都在函数的值域中,函数的值域中的每一个元素都是该函数的一个函数值.函数的最值是函数值域中的最大值或最小值.

2. 函数的定义域、对应法则与函数值域的关系:定义域、对应法则是确定函数值域的基础,若改变函数的定义域或对应法则则就可能改变函数的值域.

3. 常见函数的最值:一次函数、反比例函数、指数函数、对数函数、二次函数的最值,正余弦函数的有界性,给定区间上的单调函数以及适合均值不等式条件的函数最值等.

4. 求值域与最值的常用方法:配方法、判别式法、不等式法、换元法、数形结合法、反函数法、单调性法和求导法.

预习与自查

1. 函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的定义域是 $(0,3)$,则它的值域是(　　)

A. $(\frac{10}{3},+\infty)$　　B. $[2,\frac{10}{3})$

C. $(2,\frac{10}{3})$　　D. $[2,+\infty)$

2. 若函数 $f(x)=\log_a x(0<a<1)$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最大值是最小值的3倍,则 a 的值为(　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

3. 函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最小值为______.

4. 设 x,y 满足条件 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x\geqslant y,\\ 2x-y\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=3x+y$ 的最大值是______.

5. ① $y=x+\frac{1}{x}$ 的值域为 $[2,+\infty)$;② $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)$ 的值域为 $(-\infty,0]$;③ $y=|x-1|-1$ 的值域为 $[-1,+\infty)$;④ $y=(\frac{1}{2})^{|x|}$ 的值域为 $[1,+\infty)$;⑤ $y=\frac{x^2}{x^2+1}$ 的值域为 $[0,1]$. 上述命题中错误的有______.

精讲与精析

例1　(2003年北京春招题)求函数 $f(x)=\frac{1}{1-x(1-x)}$ 的最大值.

答案:$\frac{4}{3}$.

例2　$y=\sin^2x+\frac{2}{\sin^2x}$ 的值域是(　　)

A. $[4,+\infty)$　　B. $[2\sqrt{2},+\infty)$

C. $[3,+\infty)$　　D. $[0,+\infty)$

精讲:方法1:设 $\sin^2x=t$,则 $t\in(0,1]$,∴ 原函数式化为 $y=t+\frac{2}{t}\Rightarrow t^2-yt+2=0$,设方程的根为 t_1,t_2,则 $t_1\cdot t_2=2$,

∴ 只能有一个在区间 $(0,1]$ 上,

设 $f(t)=t^2-yt+2$,由 $f(1)\leqslant 0\Rightarrow 1-y+2\leqslant 0$,解之得 $y\geqslant 3$.

方法2:设 $t=\sin^2x$,其中 $x\neq k\pi$,则 $0<t\leqslant 1$,而 $y=t+\frac{2}{t}$ 在 $(0,\sqrt{2}]$ 内递减,

又 $y=t+\frac{2}{t}$ 的定义域为 $(0,1]$,

∴ $y=t+\frac{2}{t}$ 在 $t=1$ 时,取得最小值

∴ $y_{min}=1+2=3$,此时 $\sin^2x=1$

∴ $y=\sin^2x+\frac{2}{\sin^2x}$ 的值域为 $[3,+\infty)$.

评析:①注意均值不等式的运用,牢记“一正、二定、三相等”的含义.

②灵活运用函数 $f(x)=ax+\frac{b}{x}(x>0,a>0,b>0)$ 在 $x\in(0,\sqrt{\frac{b}{a}}]$ 上单调递减,在 $x\in[\sqrt{\frac{b}{a}},+\infty)$ 上单调递增,只有当 $ax=\frac{b}{x}\Rightarrow x=\sqrt{\frac{b}{a}}$,而 $\sqrt{\frac{b}{a}}$ 刚好落在 x 的取值范围内时,才能运用均值不等式求最小值,否则只能用该函数的单调性来求最小值.

例3　求下列函数的值域.

(1) $y=2x^2+x$;(2) $y=\sqrt{-x^2-6x-5}$;(3) $y=\frac{2x+1}{x-3}$;