俄罗斯数学教材选译

概率论习题集

□ A. H. 施利亚耶夫 著
□ 苏淳 译，孔生林 校

高等教育出版社
Higher Education Press

俄罗斯数学
教材选译

● 数学天元基金资助项目

概率论习题集

□ A. H. 施利亚耶夫 著
□ 苏淳 译，孔生林 校

高等教育出版社
Higher Education Press

图字: 01–2007–2683 号

Ширяев А. Н.

Задачи по теории вероятностей, 2006

Originally published in Russian in the title

Задачи по теории вероятностей

图书在版编目 (CIP) 数据

概率论习题集 / (俄罗斯) 施利亚耶夫著; 苏淳译.
—北京: 高等教育出版社, 2008.1
ISBN 978-7-04-022554-9

I.概... II.①施...②苏... III.概率论–高等学校–习题 IV. 0211–44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 191594 号

策划编辑 赵天夫 **责任编辑** 赵天夫 **封面设计** 王凌波 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	肥城新华印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2008 年 1 月第 1 版
印　　张	23.5	**印　　次**	2008 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	480 000	**定　　价**	45.00 元

物 料 号　22554－00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要.《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

序

专门出版这本“概率论习题集”的想法是这样产生的.

在我们的书《概率》的前两版 (1980, 1989) 中, 全书八章的每一章中都配备有大量的各种类型的习题. 在准备出版第三版时, 由于改写和增补的部分较多, 将书分为了两卷, 于 2004 年 4 月份出版. 也正是在此过程中产生了单独出版一本习题集, 以把原书中的“老习题”, 以及由于各种原因未能收入原书中的“新习题”都包括进去的想法. (未能收入原书的一个基本原因是受到在书籍出版时关于篇幅限制的约束.)

习题的收集和剔除是我在多年之中根据自己的兴趣进行的, 习题的来源多种多样, 各种教科书、讲义、习题集、专著、刊物上面发表的论文, ……. 还有一些题目产生于我们为本科生和研究生举办的专门的讨论班.

很难逐一列出所有习题的确切来源. 但是其中不少可以从本书最后所附的参考文献中反映出来.

绝大多数习题后面都给出了提示, 这样做的原因如下:

我们的《概率》书诞生在国立莫斯科大学数学力学系, 是在我们的讲座的基础上形成的, 那里的本科生在第四学期末选择专业. 那些在三年级时以我为导师的学生会被告知: 你们 (在三年级) 的第一项工作由两部分组成, 其中的第一部分就是解答《概率》书中的习题, 例如第二卷第八至十章中的习题. 那么毫无疑问, 学生们为了解答这些习题, 不仅需要独立熟悉相应章节的内容, 而且在必要时, 还要熟悉以前学过的有关章节. 在收到他们的解答 (不是手写的, 而是用 Tex 打出来的) 之后, 通过批阅和讨论这些解答, 学生们获得了他们的第二部分工作, 这里面就已经有着更多的创造性了.

这样多年坚持的结果, 使我们积累起数量可观的对各种题目 (收录在《概率》的

各个版本中的题目) 的解答, 其中的多数解答曾按照我的要求反复进行过验证、校勘, 并且幸运地被我们教研室中的一些合作者、研究生和助教们系统地重新做解, 他们之中有 (按照解答的章节顺序排列): А. С. Черного (第一至五章), М. А. Урусов, И. А. Ярошенков 和 Ю. А. Кузнецов (第六至八章). 我谨在此对他们的工作致以深切的谢意.

收集完所有习题解答之后, 我立即意识到不可能立即出版它们, 因为它们所占的篇幅实在太大. 我不得不将习题解答改写为提示, 正如现在的这种形式, 此前我还为数目众多的新题目写了提示.

应当特别说一说放在本书末尾的附录. 通过附录, 我们可以较早地把一些概念介绍给读者, 尽管只能是初浅的介绍, 这样做的理由如下. 一方面, 附录中对本书以及《概率》第一、二卷中的一些基本符号、基础性概念给出了简介性、评述性的提示; 另一方面, 附录中收入了一些解题时需要用到的组合论、马尔可夫链的位势理论方面的补充材料, 其中有些概念是我们书的正文中所没有出现过的.

现在的这本习题集是与我们的《概率》第一、二卷紧密联系的. 例如, 在本书第二章第 3 节第 11 题的文字中写道: "试验证表 2 和表 3 中所列入的 '分布' 都是真正的概率分布". 应当明白, 这里所说的表 2 和表 3 是指《概率》第一卷第二章第 3 节中的表 2 和表 3 (p162–163). 又如, 第四章第 3 节中的题目 5(c):"证明, (恰姆别尔诺伊命题中的) 数 $\omega = 0.123456789101112\cdots$, 其中依次所写出的所有的数都是 '正常的' (按十进制表示, 参阅例 2)". 这里所说的例 2 是在《概率》第二卷第四章第 3 节中 (p19).

读者们将会发现, 收集在本书中的习题有着多种不同的性质.

(A) 一些题目和练习是用来检查对《概率》第一、二卷中所介绍过的概念、事实和结论的掌握情况的 (例如: 第一章第 1, 2 节关于有利场合下的样本点个数的组合计数, 以及为此目的而展开的各种概念, 诸如非完全阶乘 $(N)_n$, 组合数 C_N^n 和 C_{N+n-1}^n, 卡塔兰数 C_n, 一阶和二阶斯特林数 s_N^n 和 S_N^n, 贝尔数 B_n, 斐波拉契数 F_n, 等等).

(B) 另外一些 (中等难度和高等难度的) 习题则要求具有较大的创造性 (例如: 证明将关于强收敛的勒贝格定理和关于条件数学期望中的极限性状的莱维定理联系起来的结果, 见第七章第 4 节第 3 题).

(C) 为了陈述许多题目, 需要补充《概率》第一、二卷正文中所没有出现的一些资料, 介绍读者认识一些已经熟知的或者关于其存在性已经有所证实的事实 (例如, 第二章第 2 节第 27 题介绍了苏斯林的如下结论: 平面博雷尔集在一个坐标轴上的投影可以不是直线上的博雷尔集; 还介绍了对集合进行怎样的运算, 可以得到由某个集合类所生成的最小代数和 σ-代数中的所有集合, 参阅第二章第 2 节第 25, 26 和 32 题).

(我们完全清楚, 这种类型的题目事实上就是具有难度的定理. 然而, 把它们写成习题的形式可以引导读者去思索, 例如, 在非初等的概率论中, 考虑如何可以实际

地构造出在概率模型的描述中起着关键作用的完整的 σ-代数来.)

(D) 许多题目与随机游动朝向布朗运动和布朗桥收敛的极限过程有关 (例如第三章第 4 节的习题). 这些关于 "不变原理" 的习题是认识连续时间随机过程, 特别地, 是认识泛函极限定理中的问题的前奏.

再谈一些其他方面的问题.

多年以来, 莫斯科大学的教师们曾出版过若干本概率论习题集, 它们不仅常年被使用在莫斯科大学的教学过程中, 而且还被许多其他高等院校采用. 它们是:

1963 年, Мешалкин Л. Д. 概率论习题集, 莫斯科大学出版社;

1980 年, Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Зубков А. М. 概率论习题集, 莫斯科: 科学出版社;

1986 年, Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г. 概率论习题集 (基本概念. 极限定理. 随机过程), 莫斯科: 科学出版社;

1989 年, Зубков А. М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. 概率论习题集, 第二版, 莫斯科: 科学出版社;

1990 年, Козлов М. В. 初等概率论中的例题与习题, 莫斯科大学出版社.

自从上述习题集中的最后一本出版以来, 已经十五年过去了. 在这段时间中, 概率论教科书的结构已经发生了很大的变化. 出现了许多新的方向、新的分支和新的题目. 非常希望我们这本于 2006 年出版的习题集, 能够与上列诸本习题集一道, 不仅能够充分反映出概率论的现状, 而且能够充分反映出它的传统和经典的部分.

在结束序言之时, 我们指出, 本书共约收录了一般难度的习题 1500 道 (包括子题在内).

正如在出版《概率》第一、二卷时那样, 在本书的出版准备工作中, 托洛佐娃 (Т. Б. Толозова) 一如既往地做了大量的校对、录入文字和学术编辑工作, 谨在此向她致以诚挚的谢意.

A. 施利亚耶夫
莫斯科大学概率论教研室
俄罗斯科学院数学研究所
莫斯科, 2004 年

目 录

第一章　初等概率论

§1. 有限种结局试验的概率模型

1. 考察对于集合 Ω 的子集进行的博雷尔交 $(\cap)$ 并 $(\cup)$ 运算, 验证它们具有下述性质:

$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A$ (交换律),

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,\quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ (结合律),

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),\ A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (分配律),

$A\cup A=A,\quad A\cap A=A$ (幂等性).

并且证明, 对于交并运算的取余运算, 还有如下的德摩根法则成立:

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

(其中 $\overline{A}$ 表示集合 A 的补集, 即 $\Omega\backslash A$).

2. (不完全阶乘$(N)_n$ 的性质与各种解释, 其中 $(N)_n\equiv N(N-1)\cdots(N-n+1)$ 是自 N 个元素中取出 n 个来的排列数, 具体介绍参阅附录第 1 节.) 证明,

(a) 由共有 $|A|=N$ 个元素的集合 A 中取出的大小为 n 的有序样本 $(\cdots)$(无重复元素, 即 "无放回抽样") 的数目等于 $(N)_n$, $1\leqslant n\leqslant N$.

(b) 从由 N 个不同字母构成的字母表中取出不同字母所形成的长度为 n 的单词的数目为 $(N)_n$, $1\leqslant n\leqslant N$.

(c) 定义在集合 X $(|X|=n)$ 上, 取值于集合 Y $(|Y|=N, N\geqslant n)$, 并且满足性质 "如果 $x_1\neq x_2$, 则 $f(x_1)\neq f(x_2)$" 的不同函数 $y=f(x)$(即 $f:X\to Y$ 单射) 的数目等于 $(N)_n$.

3. (二项系数 $C_N^n \equiv \frac{N!}{n!(N-n)!}$ 的性质与各种解释, 具体介绍参阅附录第 1 节.) 证明,

(a) 由共有 $|A| = N$ 个元素的集合 A 中取出的大小为 n 的无序样本 $[\cdots]$(无重复元素, 即 "无放回抽样") 的数目等于 C_N^n, $1 \leqslant n \leqslant N$.

(b) 由 n 个 1 和 $N-n$ 个 0 所组成的有序数组 $(\cdots)$ 的数目等于 C_N^n, $1 \leqslant n \leqslant N$.

(c) n 个不可区分的小球放入 N 个不同的盒子, 每个盒子至多放 1 个小球 ("有限制的放球") 的放法数目等于 C_N^n, $1 \leqslant n \leqslant N$.

(d) 2 维非负格点集合 $\mathbb{Z}_+^2 = \{(i,j):\ i,j = 0,1,2,\cdots\}$ 上的以原点 $(0,0)$ 为起点, 以 $(n, N-n)$ 为终点的非降路径(所谓非降路径, 就是每一步都只能向上或者向右移动一个单位的路径) 的条数等于 C_N^n, $0 \leqslant n \leqslant N$, $C_N^0 = 1$.

(e) 元素个数 $|A| = N$ 的集合 A 的由 n 个元素构成的不同的子集 D ($|D| = n \leqslant N$) 的数目等于 C_N^n.

提示: 如果首先直接证明其中的一个命题, 例如先证命题 (a) 成立, 那么其余命题就可以利用已经证得的结果来证明, 例如可采用证明途径: (a)$\rightleftharpoons$(b), (a)$\rightleftharpoons$(c), $\cdots$, 参阅第 1 节例 6.

4. 如同上题中的 (d), 我们考察 2 维非负格点集合 $\mathbb{Z}_+^2 = \{(i,j):\ i,j = 0,1,2,\cdots\}$ 上的以原点 $(0,0)$ 为起点, 以 (n,n) 为终点的位于 "对角线" 下方, 且至多与之相切的路径 (即仅经过集合 $\{(i,j) \in \mathbb{Z}_+^2:\ 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n\}$ 中的点的路径).

证明, 这样的路径的条数等于 C_{n+1}, 其中

$$C_n = \frac{1}{n} C_{2(n-1)}^{n-1}, \quad n \geqslant 1,$$

称为卡塔兰 (Catalan) 数, 见 [45]. (有时也将卡塔兰数理解为 $c_n = C_{n+1}$, $n \geqslant 1$, 例如, 参阅 [61].)

试验证 $C_1, \cdots, C_9$ 的值分别为 $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430$.

5. 对卡塔兰数 C_n, $n \geqslant 1$, 有许多有趣的组合解释. 例如, 对于 n 个数 $a, b, c, d, \cdots$ 的求和, 如果每次只将两个数相加 (但不允许改变加数的顺序), 我们来考察不同的求和方式的数目 N_n. 比如说, 当 $n = 3$ 时, 如果按照每次只将两个数相加的规则, 和 $a+b+c$ 可以有如下各种不同的 "加括号" 方式: $a+b+c = \Big(a+(b+c)\Big) = \Big((a+b)+c\Big)$, 此处不同的求和方式数目 $N_3 = 2$. 对于 $n = 4$, 我们有 5 种不同的 "加括号" 方式 ($N_4 = 5$):

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= \Big((a+b)+(c+d)\Big) = \Big(((a+b)+c)+d\Big) \\ &= \Big((a+(b+c))+d\Big) = \Big(a+((b+c)+d)\Big) = \Big(a+(b+(c+d))\Big). \end{aligned}$$

(a) 证明, 对任何 $n \geqslant 3$, 不同的求和方式数目 N_n 都等于 C_n.

(b) 我们来观察正 n 边形 ($n \geqslant 4$) 的用其对角线所作的三角形剖分, 即用不

在形内相交的对角线将其分为一系列三角形 (显然, 自每个顶点所引出的对角线条数等于 $n-3$). 证明, 这样的剖分数目 N_n 等于 C_{n-1}.

(c) 证明, 卡塔兰数 C_n, $n>1$, 满足递推关系式

$$C_n^* = \sum_{i=1}^{n-1} C_i^* C_{n-i}^*, \tag{$*$}$$

其中 $C_0^*=0$, $C_1^*=1$.

(d) 证明, 由递推式 $(*)$ 所定义的序列 $(C_n^*)_{n\geqslant 1}$ 的母函数 $F^*(x)=\sum\limits_{n\geqslant 1} C_n^* x^n$ 满足方程

$$F^*(x) = x + \big(F^*(x)\big)^2.$$

(e) 证明 (注意 $F^*(0)=0$),

$$F^*(x) = \frac{1}{2}\Big(1-(1-4x)^{1/2}\Big), \quad |x|<\frac{1}{4}.$$

并由此算出 (x^n 的) 系数 C_n^*, 正如我们所期望的, 它重合于卡塔兰数 C_n:

$$C_n^* = -\frac{1}{2}C_{1/2}^n(-4)^n = \frac{1}{n}C_{2(n-1)}^{n-1} = C_n.$$

($C_{1/2}^n$ 的定义可参阅本章第 2 节第 22 题.)

6. (二项系数 C_{N+n-1}^n 的性质与各种解释.) 证明,

(a) 由共有 $|A|=N$ 个元素的集合 A 中取出的大小为 n 的无序样本 $[\cdots]$(有重复元素, 即 "有放回抽样") 的数目等于 C_{N+n-1}^n.

(b) 由满足关系式 $n_1+\cdots+n_N=n$ 的非负整数 n_i, $i=1,\cdots,N$, 构成的有序数组的数目等于 C_{N+n-1}^n, $n\geqslant 1$, $N\geqslant 1$.

(c) n 个不可区分的小球放入 N 个不同的盒子 (每个盒子放入的球数不限, 即 "无限制的放球") 的放法数目等于 C_{N+n-1}^n, $n\geqslant 1$, $N\geqslant 1$.

提示: 参阅第 3 题的提示.

7. (参阅上题 (b).) 我们来观察方程 $n_1+\cdots+n_N=n\,(n\geqslant 1,\ N\geqslant 1)$ 的非负整数解 $n_i\geqslant 0$, $i=1,\cdots,N$ 的无序数组 $[n_1,\cdots,n_N]$. 这样的数组的个数有多少? 如果只限于正整数解 ($n_i>0$, $i=1,\cdots,N$), 那么相应的数组的个数有多少? 方程 $n_1+\cdots+n_N=n\,(n\geqslant 1,\ N\geqslant 1)$ 的正整数解的有序数组 $(n_1,\cdots,n_N)$ 的个数有多少?

8. (参阅第 6 题 (b) 和第 7 题.) 我们来考察关于非负整数或正整数 n_i, $i=1,\cdots,N$ 的不等式 $n_1+\cdots+n_N\leqslant n$. 试求满足不等式 $n_1+\cdots+n_N\leqslant n\,(n\geqslant 1,\ N\geqslant 1)$ 的有序解组 $(n_1,\cdots,n_N)$ 和无序解组 $[n_1,\cdots,n_N]$ 的个数.

9. 证明,

(a) n 条直线可以把平面 $\mathbb{R}^2$ 所分成的部分的最大数目为

$$1+\frac{n(n+1)}{2}.$$

(b) n $(n\geqslant 3)$ 个平面可以把空间 $\mathbb{R}^3$ 所分成的部分的最大数目为

$$\frac{1}{6}(n^3+5n+6).$$

10. 设 A 与 B 是 Ω 的两个子集. 证明, 由它们, (按照第 3 节的术语) 由子集类 $\mathscr{A}_0=\{A,B\}$, 所张成的代数 $\alpha(A,B)$ 共由 $N(2)=16$ 个元素组成:

$$\Big\{A,\ B,\ \overline{A},\ \overline{B},\ A\cap B,\ \overline{A}\cap\overline{B},\ A\setminus B,\ B\setminus A,\\ A\cup B,\ A\cup\overline{B},\ \overline{A}\cup B,\ \overline{A}\cup\overline{B},\ A\triangle B,\ \overline{A\triangle B},\ \Omega,\ \varnothing\Big\},$$

其中 $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ 为集合 A 与 B 的对称差 (参阅第二章第 1 节中的表格).

试给出 Ω 的分割 $\mathscr{D}$(参阅第 3 节), 使得由它所张成的代数 $\alpha(\mathscr{D})$ 与 $\alpha(A,B)$ 相同.

证明, 由子集类 $\mathscr{A}_0=\{A_1,\cdots,A_n\}$, 其中 $A_i\subseteq\Omega$, $i=1,\cdots,n$, 所张成的代数 $\alpha(A_1,\cdots,A_n)$ 由 $N(n)=2^{2^n}$ 个元素组成, 因而 $N(2)=16$, $N(3)=256$, 等等.

11. 证明布尔 (Boole) 不等式:

(a) $$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i),\quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)\geqslant 1-\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(\overline{A}_i).$$

证明, 对任何 $n\geqslant 1$, 都成立不等式

(b) $$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i)-(n-1),$$

且成立如下的古尼阿斯 (Кyниac) 不等式

(c) $$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\leqslant\min_k\left\{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i)-\sum_{i\neq k}\mathbf{P}(A_i\cap A_k)\right\}$$

和钟开莱–爱尔迪希 (Chung-Erdös) 不等式①

(d) $$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\geqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i)\right)^2}{\sum_{i,j=1}^{n}\mathbf{P}(A_i\cap A_j)}.$$

①原文中的不等号错为 “$\leqslant$” —— 译者注.

提示: 对于上述不等式 (b) 在 $n=3$ 时的情形, 即 $\mathbf{P}(A_1\cap A_2\cap A_3)\geqslant \mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}(A_2)+\mathbf{P}(A_3)-2$, 可以直接通过观察来验证, 而对于其余情形, 则需采用归纳法.

12. 证明如下的关于事件 $A_1,\cdots,A_n\ (n\geqslant 1)$ 的并与交的概率容斥公式① (称为庞加莱 (Poincaré) 公式, 庞加莱定理, 庞加莱恒等式):

$$\text{(a)}\quad \mathbf{P}(A_1\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{1\leqslant i_1\leqslant n}\mathbf{P}(A_{i_1})-\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}\mathbf{P}(A_{i_1}\cap A_{i_2})+\cdots+$$
$$+(-1)^{m+1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\mathbf{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_m})+\cdots+(-1)^{n+1}\mathbf{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n)$$

和

$$\text{(b)}\quad \mathbf{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n)=\sum_{1\leqslant i_1\leqslant n}\mathbf{P}(A_{i_1})-\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}\mathbf{P}(A_{i_1}\cup A_{i_2})+\cdots+$$
$$+(-1)^{m+1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\mathbf{P}(A_{i_1}\cup\cdots\cup A_{i_m})+\cdots+(-1)^{n+1}\mathbf{P}(A_1\cup\cdots\cup A_n).$$

注 1. 公式 (a) 和 (b) 可以缩写为下述形式:

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m+1}S_m,\quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m+1}\widetilde{S}_m,$$

其中

$$S_m=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\mathbf{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_m}),\quad \widetilde{S}_m=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\mathbf{P}(A_{i_1}\cup\cdots\cup A_{i_m}).$$

注 2. 虽然介绍容斥公式是《概率》(第一卷) 第一章中的内容, 在那里仅仅涉及了有限的概率空间 $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$, 我们需要强调的是, 这个公式对于一般的概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$ 也是适用的 (参阅第二章).

注 3. 我们用 $|A|$ 表示有限集合 Ω 的子集 A 中的元素个数. 那么在 $\mathbf{P}(A)=|A|/|\Omega|$(古典概型) 的场合下, 可以由公式 (a) 和 (b) 推出关于有限集合 $A_1,\cdots,A_n$ 的容斥公式:

$$\text{(a}'\text{)}\qquad \left|\bigcup_{i\in T}A_i\right|=\sum_{\varnothing\neq S\subseteq T}(-1)^{|S|+1}\left|\bigcap_{i\in S}A_i\right|;$$

$$\text{(b}'\text{)}\qquad \left|\bigcap_{i\in T}A_i\right|=\sum_{\varnothing\neq S\subseteq T}(-1)^{|S|+1}\left|\bigcup_{i\in S}A_i\right|,$$

其中 $T=\{1,\cdots,n\}$.

①也称为进出公式 —— 译者注.