中国计算机学会 CCF

21世纪大学本科计算机专业系列教材

屈婉玲 耿素云 张立昂 编著

离散数学习题解答与学习指导（第2版）

http://www.tup.com.cn

- 国家精品课程配套教材
- 根据教育部“高等学校计算机科学与技术专业规范”组织编写
- 与美国 ACM 和 IEEE *Computing Curricula 2005* 同步

清华大学出版社

国家精品课程配套教材

21世纪大学本科计算机专业系列教材

离散数学习题解答与学习指导

（第2版）

屈婉玲 耿素云 张立昂 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是根据清华大学出版社与中国计算机学会共同规划的"21世纪大学本科计算机专业系列教材"《离散数学(第2版)》(主教材)以及电子教案编写的配套教学指导用书. 全书分为14章,每章包含内容提要、习题、习题解答与分析三部分. 内容提要总结了本章的主要定义、定理、公式、重要的结果等;习题部分包含了与上述内容配套的数十道题;习题解答与分析部分不但对上述习题给出了详细的解答,而且对一些典型的解题方法做了比较深入的分析和总结. 总计超过500道,涵盖了数理逻辑、集合论、图论、组合数字、数论、离散概率、代数结构等不同模块的基本内容和典型的解题方法.

本书既可以作为主教材的配套教学用书,也可以单独使用,为学习离散数学的其他读者在解题能力和技巧的训练方面提供有益的帮助。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学习题解答与学习指导/屈婉玲,耿素云,张立昂编著. —2版. —北京:清华大学出版社,2008.2

(21世纪大学本科计算机专业系列教材)

ISBN 978-7-302-16820-1

Ⅰ. 离…　Ⅱ. ①屈…　②耿…　③张…　Ⅲ. 离散数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第005364号

责任编辑:张瑞庆
责任校对:李建庄
责任印制:何　芊

出版发行:清华大学出版社　　**地　址**:北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**:100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机:010-62770175　　**邮购热线**:010-62786544
投稿咨询:010-62772015　　**客户服务**:010-62776969

印 刷 者:北京市昌平环球印刷厂
装 订 者:三河市新茂装订有限公司
经　销:全国新华书店
开　本:185×230　**印　张**:17.75　　**字　数**:362千字
版　次:2008年2月第2版　　**印　次**:2008年2月第1次印刷
印　数:1～5000
定　价:25.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:010-62770177转3103　　产品编号:026635-01

序　言

PREFACE

21世纪是知识经济的时代，是人才竞争的时代．随着21世纪的到来，人类已步入信息社会，信息产业正成为全球经济的主导产业．计算机科学与技术在信息产业中占据了最重要的地位，这就对培养21世纪高素质创新型计算机专业人才提出了迫切的要求．

为了培养高素质创新型人才，必须建立高水平的教学计划和课程体系．在20多年跟踪分析ACM和IEEE计算机课程体系的基础上，紧跟计算机科学与技术的发展潮流，及时制定并修正教学计划和课程体系是尤其重要的．计算机科学与技术的发展对高水平人才的要求，需要我们从总体上优化课程结构，精炼教学内容，拓宽专业基础，加强教学实践，特别注重综合素质的培养，形成"基础课程精深，专业课程宽新"的格局．

为了适应计算机科学与技术学科发展和计算机教学计划的需要，要采取多种措施鼓励长期从事计算机教学和科技前沿研究的专家教授积极参与计算机专业教材的编著和更新，在教材中及时反映学科前沿的研究成果与发展趋势，以高水平的科研促进教材建设．同时适当引进国外先进的原版教材．

为了提高教学质量，需要不断改革教学方法与手段，倡导因材施教，强调知识的总结、梳理、推演和挖掘，通过加快教案的不断更新，使学生掌握教材中未及时反映的学科发展新动向，进一步拓广视野．教学与科研相结合是培养学生实践能力的有效途径．高水平的科研可以为教学提供最先进的高新技术平台和创造性的工作环境，使学生得以接触最先进的计算机理论、技术和环境．高水平的科研还可以为高水平人才的素质教育提供良好的物质基础．学生在课题研究中不但能了解科学研究的艰辛和科研工作者的奉献精神，而且能熏陶和培养良好的科研作风，锻炼和培养攻关能力和协作精神．

进入21世纪，我国高等教育进入了前所未有的大发展时期，时代的进步与发展对高等教育质量提出了更高、更新的要求．2001年8月，教育部颁发了《关于加强高等学校本科教学工作，提高教学质量的若干意见》．文件指出，本科教育是高等教育的主体和基础，抓好本科教学是提高整个高等教育质量的重点和关键．随着高等教育的普及和高等学校的扩招，在校大学本科计算机专业学生的人数将大量上升，对适合21世纪大学本科计算机科学与技术学科课程体系要求的，并且适合中国学生学习的计算机专业教材的需求量

也将急剧增加. 为此，中国计算机学会和清华大学出版社共同规划了面向全国高等院校计算机专业本科生的“**21 世纪大学本科计算机专业系列教材**”. 本系列教材借鉴美国 ACM 和 IEEE 最新制定的 *Computing Curricula 2005*（简称 CC2005）课程体系，反映当代计算机科学与技术学科水平和计算机科学技术的新发展、新技术，并且结合中国计算机教育改革成果和中国国情.

中国计算机学会教育专业委员会和全国高等学校计算机教育研究会，在清华大学出版社的大力支持下，跟踪分析 CC2001，并结合中国计算机科学与技术学科的发展现状和计算机教育的改革成果，研究出了《中国计算机科学与技术学科教程 2002》（China Computing Curricula 2002，简称 CCC2002），该项研究成果对中国高等学校计算机科学与技术学科教育的改革和发展具有重要的参考价值和积极的推动作用.

“**21 世纪大学本科计算机专业系列教材**”正是借鉴美国 ACM 和 IEEE CC2005 课程体系，依据 CCC2002 基本要求组织编写的计算机专业教材. 相信通过这套教材的编写和出版，能够在内容和形式上显著地提高我国计算机专业教材的整体水平，继而提高我国大学本科计算机专业的教学质量，培养出符合时代发展要求的具有较强国际竞争力的高素质创新型计算机人才.

陈火旺

中国工程院院士

国防科学技术大学教授

21 世纪大学本科计算机专业系列教材编委会名誉主任

第 2 版前言

FOREWORD

作为清华大学出版社和中国计算机学会共同规划的“21 世纪大学本科计算机专业系列教材”之一，这本《离散数学习题解答与学习指导》已经出版两年了. 在这两年的时间里，教育部推出了一系列为提高高等学校本科生教育质量的重要举措. 特别是今年年初发布的《教育部、财政部关于实施高等学校本科教学质量与教学改革工程的意见》(教高[2007]1 号)和《教育部关于进一步深化本科教学改革，全面提高教学质量的若干意见》(教高[2007]2 号)对专业设置、教学模式、课程建设、师资队伍等各个方面不但提出了更高的建设目标，也为保证这一工程的顺利执行提供了有力的保证.

好的教师和好的教材是保证教学质量的前提条件. 本着对读者负责的精神，我们在这次修订工作中认真地审阅了原书，根据教学要求对其中的部分内容做了调整，更正了某些错误和疏漏之处，并对文字做了进一步的加工. 内容上主要做了如下改动：

与主教材配套，去掉了数理逻辑中有关“一阶逻辑推理理论”的内容. 主要原因是：这部分内容涉及形式系统. 形式系统在系统定义和推理中应该采用完全形式化的方法，通常包含形式语言以及用形式语言表述的公理和推理规则. 在形式系统中，符号串本身是没有语义的，只能通过解释赋予它们一定的语义，但在讨论系统的公理或推理规则时应该与语义无关. 本书在第 1 版的叙述中没有完全采用这种形式化的方法. 如果从知识体系的严谨性出发，应该采用这种完全形式化的表述方法. 但是，这不但与本书的整体写作风格不够协调，而且内容也偏深，超出本教材的要求，因此本次修订决定删掉这部分内容.

为了进一步提高本书的质量，我们恳切地欢迎读者继续提出建议和意见.

作　者

2007 年 11 月于北京大学

第 1 版前言

FOREWORD

离散数学是研究离散量的结构及其相互关系的数学学科．美国 ACM 和 IEEE *Computing Curricula 2005*（CC2005）与我国教育部高教司主持评审的《中国计算机科学与技术学科教程 2002》（CCC2002）都把离散数学列为计算机科学与技术专业的核心课程．通过离散数学的学习，不但可以使学生掌握处理离散结构的描述工具和方法，为后续课程的学习创造条件，而且能够提高学生的数学素养，培养抽象思维和严格的逻辑推理能力，对将来参与创新性的研究和开发工作也是非常有益的．

离散数学具有数学类课程的内容抽象、体系严谨、逻辑性强、习题量大、解题思路灵活多变等特征，除此之外还有它自己的特点，主要体现如下：

- 概念多，定理多，知识点比较散，概念容易混淆，不太容易掌握知识点之间的内在联系与知识体系．
- 数理逻辑、集合论、图论、组合数学、数论、离散概率、代数结构等各部分内容分别来自不同的数学分支，所采用的数学模型和处理方法差别较大，特别是解题的思路和技巧有着明显的区别．
- 在学习中要用到初等数学、微积分、线性代数等多门课程中的相关的概念与结果．
- 与计算机专业的其他课程，如数据结构、编译技术、人工智能、信息安全、算法设计与分析、数据库原理、网络技术等联系紧密，应用背景较强．

由于这些特点，初学者往往会感到比较困难，特别是拿到题目后不知道如何着手．为了帮助学生更好地掌握这门课程，我们在多年教学实践和大量习题资料积累的基础上，编写了这本《离散数学习题解答与学习指导》．

本书与清华大学出版社出版的中国计算机学会“21 世纪大学本科计算机专业系列教材”《离散数学（第 2 版）》（主教材）以及配套的电子教案一起构成了立体化离散数学系列教材．全书分为 14 章，与主教材中的章对应．每章包含内容提要、习题、习题解答与分析三部分．内容提要总结了本章的主要定义、定理、公式、重要的结果等；习题部分包含与上述内容配套的数十道题；习题解答与分析部分不但对上述习题给出了比较详细的解答，而

且对一些典型的解题方法做了比较深入的分析和总结. 解答的习题(大题)总计超过500道,涵盖了数理逻辑、集合论、图论、组合数学、数论、离散概率、代数结构等各个不同离散数学模块的基本内容和典型的解题方法. 全书内容丰富,概念清晰,讲解翔实易懂,通过不同解法的对比与分析,进一步加强了解题技巧的训练,同时本书习题中也选择了计算机科学技术中的典型应用实例,以增加理论联系实际的感性认识.

本书既可以作为主教材的配套教学用书,也可以单独使用,为学习离散数学的其他读者在解题能力和技巧的训练方面提供有益的帮助.

本书的第1、2、3、6、7章由耿素云编写,第4、5、8、9、10、14章由屈婉玲编写,第11、12、13章由张立昂编写.

在本书编写过程中参考了国内外多种版本的离散数学教材和相关的文献资料,本书的出版也得到21世纪大学本科计算机专业系列教材编委会与清华大学出版社的大力帮助,在此表示衷心的谢意. 由于水平所限,错误和疏漏之处期待着读者的批评指正.

作　者

2005年10月于北京大学

目　录

CONTENTS

第 1 章　数学语言与证明方法 …… 1

1.1　内容提要 …… 1

1.2　习题 …… 3

1.3　习题解答与分析 …… 8

第 2 章　命题逻辑 …… 22

2.1　内容提要 …… 22

2.2　习题 …… 26

2.3　习题解答与分析 …… 31

第 3 章　一阶逻辑 …… 58

3.1　内容提要 …… 58

3.2　习题 …… 60

3.3　习题解答与分析 …… 64

第 4 章　关系 …… 79

4.1　内容提要 …… 79

4.2　习题 …… 84

4.3　习题解答与分析 …… 88

第 5 章　函数 …… 95

5.1　内容提要 …… 95

5.2　习题 …… 97

5.3　习题解答与分析 …… 100

第6章 图 …… 104

6.1 内容提要 …… 104
6.2 习题 …… 107
6.3 习题解答与分析 …… 112

第7章 树及其应用 …… 130

7.1 内容提要 …… 130
7.2 习题 …… 131
7.3 习题解答与分析 …… 134

第8章 组合计数基础 …… 145

8.1 内容提要 …… 145
8.2 习题 …… 148
8.3 习题解答与分析 …… 151

第9章 容斥原理 …… 158

9.1 内容提要 …… 158
9.2 习题 …… 160
9.3 习题解答与分析 …… 161

第10章 递推方程与生成函数 …… 166

10.1 内容提要 …… 166
10.2 习题 …… 176
10.3 习题解答与分析 …… 179

第11章 初等数论 …… 191

11.1 内容提要 …… 191
11.2 习题 …… 193
11.3 习题解答与分析 …… 197

第12章 离散概率 …… 212

12.1 内容提要 …… 212
12.2 习题 …… 214

12.3 习题解答与分析 …… 218

第 13 章 初等数论和离散概率的应用 …… 234

13.1 内容提要 …… 234
13.2 习题 …… 235
13.3 习题解答与分析 …… 237

第 14 章 代数系统 …… 245

14.1 内容提要 …… 245
14.2 习题 …… 254
14.3 习题解答与分析 …… 258

参考文献 …… 267

第 1 章 数学语言与证明方法

1.1 内容提要

1. 常用的数学符号

- **集合符号；**
- **运算符号；**
- **逻辑符号．**

2. 集合及其运算

集合与元素：

$x \in A$（x 是 A 的元素）、$x \notin A$（x 不是 A 的元素）．

特殊数的集合：

$\mathbf{N}$（自然数集合）；$\mathbf{Z}$（整数集合）；

$\mathbf{Z}^+$（正整数集合）；$\mathbf{Q}$（有理数集合）；

$\mathbf{Q}^*$（非 0 有理数集合）；$\mathbf{R}$（实数集合）；

$\mathbf{R}^*$（非 0 实数集合）．

集合之间的关系：

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B)$$

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

$$A \not\subset B \Leftrightarrow A \nsubseteq B \vee A = B$$

$\varnothing$（**空集**）．

定理 1.1 空集是一切集合的子集．

推论 空集是唯一的．

全集 全集不是唯一的．

集合的幂集:

$$P(A)=\{x \mid x \subseteq A\}$$

定理 1.2 n 元集的幂集有 2^n 个元素.

集合的运算:

$$A \cup B=\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$
$$A \cap B=\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$
$$A-B=\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$
$$\sim A=\{x \mid x \notin A\}=E-A(E\text{ 为全集})$$
$$A \oplus B=(A-B) \cup (B-A)=(A \cup B)-(A \cap B)$$

注意 (1) 以上有些运算可以推广到多个集合;

(2) 可以用文氏图直观表示运算结果;

(3) 若 $A \cap B=\varnothing$,则称 A 与 B 是不交的.

基本集合恒等式:

幂等律 $A \cup A=A$; $A \cap A=A$.

交换律 $A \cup B=B \cup A$; $A \cap B=B \cap A$.

结合律 $(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)$;

$(A \cap B) \cap C=A \cap (B \cap C)$.

分配律 $A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$;

$A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

德摩根律绝对形式 $\sim(A \cup B)=\sim A \cap \sim B$;

$\sim(A \cap B)=\sim A \cup \sim B$.

德摩根律相对形式 $A-(B \cup C)=(A-B) \cap (A-C)$;

$A-(B \cap C)=(A-B) \cup (A-C)$.

吸收律 $A \cup (A \cap B)=A$; $A \cap (A \cup B)=A$.

零律 $A \cup E=E$; $A \cap \varnothing=\varnothing$.

同一律 $A \cup \varnothing=A$; $A \cap E=A$.

排中律 $A \cup \sim A=E$.

矛盾律 $A \cap \sim A=\varnothing$.

余补律 $\sim\varnothing=E$; $\sim E=\varnothing$.

双重否定律 $\sim(\sim A)=A$.

补交转换律 $A-B=A \cap \sim B$.

对称差$\oplus$运算满足:

交换律 $A \oplus B=B \oplus A$.

结合律 $A \oplus (B \oplus C)=(A \oplus B) \oplus C$.

$\cap$对$\oplus$分配律 $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$.

$A\oplus\varnothing=A$；$A\oplus E=\sim A$；

$A\oplus A=\varnothing$；$A\oplus\sim A=E$.

3. 证明方法概述

推理的形式结构

从前提 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 推结论 B 的形式结构

$$A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k\to B\ (\text{简记为 } A\to B)$$

上述推理正确，记为

$$A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k\Rightarrow B\ (\text{简记为 } A\Rightarrow B)$$

证明推理正确的方法：

直接证明法 由 A 为真，证明 B 为真.

间接证明法 证明 $\neg B\to\neg A$ 为真(从而 $A\to B$ 为真).

归谬法(也称**反证法**) 欲证 B 为真.若 $\neg B$ 为真，能推出矛盾，从而证明 B 为真. 间接证明法也是特殊的归谬法.

分情况证明法(穷举法) 欲证$(A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_k)\to B$ 为真，只需证明$(A_1\to B)$，$(A_2\to B)$，$\cdots$，$(A_k\to B)$均为真.

构造性证明法 若 A 为真，能构造出 B 来，从而证明了 $A\to B$ 为真.

前件假证明法 若能证明 A 为假，从而证明了 $A\to B$ 为真.

后件真证明法(平凡证明法) 若能证明 B 为真，从而证明了 $A\to B$ 为真.

谬误的证明方法 举反例.

数学归纳法

第一数学归纳法的步骤：

(1) 归纳基础：证明 $P(n_0)(n_0\geqslant 0)$为真；

(2) 归纳步骤(或归纳推导)：$\forall n(n\in\mathbf{N}\wedge n\geqslant n_0)$，若 $P(n)$为真，能证明出 $P(n+1)$为真.

第二数学归纳法的步骤：

(1) 归纳基础：证明 $P(n_0)$为真；

(2) 归纳步骤：$\forall n(n\in\mathbf{N}\wedge n\geqslant n_0)$，若 $P(n_0)$，$P(n_0+1)$，$\cdots$，$P(n)$均为真，能证明 $P(n+1)$为真.

1.2 习 题

1.1 将下列各集合表示成列举法表示的集合.

(1) $\{x\mid x$ 是方程 $2x^2+3x-2=0$ 的根$\}$.

(2) $\{x|x$ 是方程 $x^2-2x+5=0$ 的实根$\}$.

(3) $\{x|x$ 是完全数 $\land 5\leqslant x\leqslant 10\}$.

(4) $\{x|x$ 是整数 $\land x^2=3\}$.

(5) $\{x|x$ 是空集$\}$.

1.2 将下列各集合用谓词描述法表示.

(1) $\{x,y,z\}$.

(2) $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

(3) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

(4) $\varnothing$.

1.3 判断下列每组的两个集合是否相等.

(1) $A=\{3,1,1,5,5\}, B=\{1,3,5\}$.

(2) $A=\varnothing, B=\{\varnothing\}$.

(3) $A=\varnothing, B=\{x|x$ 是有理数并且是无理数$\}$.

(4) $A=\{1,2,\varnothing\}, B=\{\{\varnothing\},2,1\}$.

1.4 判断下列命题是否为真.

(1) $\varnothing\subseteq\varnothing$.

(2) $\varnothing\subset\varnothing$.

(3) $\varnothing\in\varnothing$.

(4) $\varnothing\in\{\varnothing\}$.

(5) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$.

(6) $\{\varnothing\}\subseteq\varnothing$.

(7) $\{\varnothing\}\in\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\}\}$.

1.5 设 A 为任意集合,判断下列命题是否为真.

(1) $\varnothing\in P(A)$.

(2) $\varnothing\subseteq P(A)$.

(3) $\{\varnothing\}\in P(A)$.

(4) $\{\varnothing\}\subseteq P(A)$.

(5) $\{\varnothing\}\in P(P(A))$.

(6) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\subseteq P(P(A))$.

1.6 求下列集合中的元素个数.

(1) $\{x|x\in\mathbf{Z}\land -3\leqslant x<2\}$.

(2) $\{x|x\in\mathbf{N}\land x$ 是偶素数$\}$.

(3) $\{x|x\in\mathbf{N}\land x$ 是奇数 $\land x$ 是偶数$\}$.

(4) $\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

(5) $\{\{\{\varnothing\}\}\}$.

(6) $P(A), A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

1.7 设 $A=\{a,2,\{3\},4\}$, $B=\{\{a\},4,3,1\}$. 判断下列命题是否为真.

(1) $a\in A$.

(2) $a\in B$.

(3) $\{a\}\in A$.

(4) $\{a\}\in B$.

(5) $\{a\}\subseteq A$.

(6) $\{a\}\subseteq B$.

(7) $\{a,\{3\},4\}\subseteq A$.

(8) $\{a,\{3\},4\}\subseteq B$.

(9) $\varnothing\subseteq A$.

(10) $\varnothing\subseteq\{\{a\}\}\subseteq B$.

1.8 已知 A,B 为两个集合,且 $A\subseteq B$,则 $A\notin B$ 一定为真吗?

1.9 设 $A=\{1,2,3,4\}$,试求出 A 的全部 2 元子集.

1.10 设 $A=\{\varnothing,a\}$,求出 A 的全部子集.

1.11 求下列集合的幂集.

(1) $\varnothing$.

(2) $\{1,\{a,b\}\}$.

(3) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

(4) $\{2,2,2,3\}$.

1.12 设全集 $E=\{1,2,3,4,5,6\}$,其子集 $A=\{1,4\}$, $B=\{1,2,5\}$, $C=\{2,4\}$. 求下列集合.

(1) $A\cap\sim B$.

(2) $(A\cap B)\cup\sim C$.

(3) $\sim(A\cap B)$.

(4) $P(A)\cap P(B)$.

(5) $P(A)\cap\sim P(B)$.

1.13 画出下列集合的文氏图.

(1) $A\cap(B\cup C)$.

(2) $\sim A\cap\sim B\cap\sim C$.

(3) $(A-(B\cup C))\cup((B\cup C)-A)$.

1.14 设 $A=\{\varnothing\}$, $B=\{1,2\}$,求 $P(A)\oplus P(B)$.

1.15 设 $A\subseteq B\wedge C\subseteq D$,证明 $A\cup C\subseteq B\cup D$.