考研数学
精编综合复习指南

（理工类）

■ 余长安 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学精编综合复习指南．理工类/余长安编著．—武汉：武汉大学出版社，2007.4

ISBN 978-7-307-05454-7

Ⅰ.考…　Ⅱ.余…　Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第025742号

责任编辑：李汉保　　责任校对：程小宜　　版式设计：杜　枚

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.com.cn)

印刷：湖北新华印务有限责任公司

开本：787×1092　1/16　印张：45.75　字数：1110千字　插表：1

版次：2007年4月第1版　　2007年4月第1次印刷

ISBN 978-7-307-05454-7/O・356　　定价：53.00元

内容简介

本书是作者结合多年的高等数学教学和考研辅导经验精心编著而成的。全部内容均紧扣全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》,主要目的是使广大读者通过本书的阅读。把握数学考研的特点,掌握数学的基本概念、方法与理论,提高运算能力、空间想像能力、逻辑推理能力、分析判断能力和综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力,顺利通过研究生数学入学考试。

本书分三篇共22章,内容涵盖国家教育部所制定的《数学考试大纲》中所涉及的《高等数学》、《线性代数》及《概率论与数理统计》三个科目的所需知识点,每一章按下述结构编排:一、考试要求;二、内容概要;三、典型例题解析(主要部分);四、精选考题品析;五、同步自测题及参考答案。

本书主要针对参加全国硕士研究生入学统一考试的理工类考生,亦可作为各类高等学校数学教师和在校理工类学生的教学参考书。

前　言

几年前，全国硕士研究生入学数学考试的满分由100分增至150分，数学成绩对于研究生入学录取的作用变得更加重要。为了更好地适应和满足广大考生和读者考试复习的需要，我们编写了这本书。

本书紧扣全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》，结合作者多年的数学教学经验和考研辅导心得精心编写而成。该教程强调基本理论，突出解题技巧，尤其是注重灵活性、综合性及应用意识与能力的培养，以期获举一反三之效，得事半功倍之果。

本书内容涵盖《数学考试大纲》中所涉及的《高等数学》(微积分)、《线性代数》及《概率论与数理统计》三个科目的全部知识点，并按下述结构编排：一、考试要求；二、内容概要；三、典型例题解析(主要部分)；四、精选考题品析；五、同步自测题及参考答案。

纵观全书，具有以下鲜明特点：体系完整，重点突出；编排新颖，脉络清晰；提纲契领，纲举目张；纵横交织，相得益彰；归类科学，方法精当；分析独到，深入浅出；难点解释简明，疑点解析透彻。它让读者易于看懂，难以忘记，进而摆脱"题海"战术，达到速成的目的。具体讲，就是基本题解法简明；综合题解法灵巧；典型题解法精妙；多解题解法多变；证明题推导得当；应用题适应性强。

在第一篇高等数学中，作者对极限解法进行了精细分类，其中涉及了导数的定义、微分与积分中值定理、幂级数等多个知识点，综合性强；在微分中值定理的证明中，我们对其进行了精辟的分类归纳，以期获得一种思维定式，达到举一反三的效果；不定积分解法介绍全面、精巧，既包含常规解法，也拓广至特殊解法；多元微分解法精妙，一般摒弃函数关系图，淡化复合与简单、隐式与显式、抽象与具体的区分，单刀直入；在二、三重积分及线、面积分中，综合运用函数变换与平移变换等手段和正确利用对称与轮换对称性等方法，化繁为简，达到解题迅速、准确的效果；在常微分方程中，对常系数高阶方程强化算子解法，以达"速成"的目的。

在第二篇线性代数中，本书利用贯穿从矩阵到二次型各章的初等变换法，以纲带目，做到纲举目张；而在行列式中，则是以"产生基本行(列)，化为特殊式"为切入点，解法凸显简捷、明快。对于向量的相关证明，却是注重系统性，强化规律性。这些思路对于解决让考生感到棘手的线性代数证明问题，是一个较好的突破。

在第三篇概率论与数理统计中，对于作为重点的全概率公式与贝叶斯定理，我们将相关解题过程归纳为"倒推、落实"，使得这类问题不再成为广大考生的薄弱点。而连续型多维随机向量的相关问题，无疑是学习概率论内容的难点所在。我们将其解题规则概述为"点、线、面"说与"平行观"论，用以处置非零积分区域问题，使纷繁错杂的情形，变得有规可循。在数理统计中，参数估计是历年考研试题的频出考点。我们对此是以"均匀分布"的点估计为突破口，采取"深论一点，布及其余"的手法处理；而假设检验里的两类错误的认识与计

算，往往是考生学习中的一个难点，作者对其则是在搞清概念上下功夫，并用“以例促识”的思路置之。

总之，通过本书的阅读，能帮助考生快速掌握数学基本概念、基本方法、基本理论，提高运算能力、空间想像能力、逻辑推理能力、分析判断能力和综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力，并能够结合实际问题，建立数学模型，应用所学数学方法解决实际问题，顺利通过研究生数学入学考试。

本书主要针对参加全国硕士研究生入学统一考试的理工类考生，亦可作为各类高等学校数学教师和在校学生的教学参考书。

作　者

于武汉大学樱园

二零零七年三月

目　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇　高等数学

第一章　函数、极限、连续

一、考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立简单应用问题中的函数关系式.
2. 理解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数、反函数、分段函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念.
5. 理解数列极限与函数极限(包括左极限与右极限)的定义以及它们的性质.
6. 掌握极限的四则运算，掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限.
7. 掌握两个重要极限及其应用.
8. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法；会用等价无穷小求极限.
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

二、内容概要

(一) 函数

1. 函数的定义

设在同一过程中有两个变量 x、y，x 的变化域为 X，若对于 X 中的每一个 x 值，依照某一规律，变量 y 都有惟一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),\quad x\in X.$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，X 称为函数的定义域. 因变量 y 的变化域称为函数的值域. 对应关系 f 和定义域 X 是函数定义中的两个要素.

2. 函数的图形

函数 $y=f(x)$ $(x\in X)$ 的图形是指点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in X\}.$$

一般情形下，它是 xOy 平面上的一条或几条曲线，且任何一条平行于 Oy 轴的直线，与曲线 $y=f(x)$ 至多相交于一点.

3. 函数的几种常见特性

(1) 有界性

若 $\exists M>0$（$\exists$ 表示存在），使得对任给 $x\in X$，$|f(x)|\leqslant M$ 都成立（$\forall$ 表示对于任意的，对于任给的），则称 $f(x)$ 在 X 上有界.

有界函数 $f(x)$ 的图形 $y=f(x)$ 的特点是该图形介于二直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

（2）单调性

设有函数 $y=f(x)$，若 $\forall x_1,x_2\in X$，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2)\ (\text{或} f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $y=f(x)$ 在 X 上单调上升（或单调下降）.

（3）周期性

设有函数 $y=f(x)$，$x\in X$. 若存在常数 $T>0$，使得对任给 $x\in X$，都有 $x+T\in X$，且有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为周期. 显然每个周期函数都有无穷多个周期，若其中有一个最小的正数，则称这个最小的正数为周期."周期"通常指最小正周期，但周期函数未必都有最小正周期.

（4）奇偶性

设有函数 $y=f(x)$，$x\in X$，其中 X 关于原点对称（即若 $x\in X$，$-x\in X$），

若 $f(-x)=-f(x)$，$\forall x\in X$，则称 $y=f(x)$ 为 X 上的奇函数.

若 $f(-x)=f(x)$，$\forall x\in X$，则称 $y=f(x)$ 为 X 上的偶函数.

4. 复合函数

设有函数 $y=f(u)$，$u\in U$；$u=\varphi(x)$，$x\in X$，$\varphi(x)$ 的值域为 U'. 若 $U'\subseteq U$，则在 X 上确定了一个新的函数 $y=f[\varphi(x)]\ (x\in X)$，称为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数，u 称为中间变量.

5. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的值域为 Y，若对 Y 中每一个 y 值，都可以由方程 $y=f(x)$ 惟一确定出 x 值，则得出一个定义在 Y 上的函数，称为 $y=f(x)$ 的反函数，记作

$$x=f^{-1}(y)\qquad y\in Y.$$

易知，严格单调函数必有反函数，并且其反函数也是严格单调的. 函数 $y=f(x)\ (x\in X)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)\ (y\in Y)$ 的图形相同. 习惯上 $x=f^{-1}(y)$ 记作 $y=f^{-1}(x)$，其图形与 $y=f(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称.

6. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的函数，称为初等函数.

基本初等函数是指这样六类函数：常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数.

（二）极限

1. 极限的定义

（1）数列极限的定义

设有数列 $\{x_n\}$ 及常数 a，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，使得 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称当 n 趋向于无穷大时，$\{x_n\}$ 以 a 为极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\ \text{或}\ x_n\to a\ (n\to\infty).$$

（2）函数极限的定义

（i）　设 $f(x)$ 在 $|x|$ 充分大时有定义，A 为常数. 若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，使得当 $|x|>X$

时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当x趋向于无穷大时,$f(x)$以A为极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to\infty).$$

(ii) 设$f(x)$在点x_0附近有定义(点x_0本身可能除外),A为常数,若$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称当$x$趋向于$x_0$时,$f(x)$以$A$为极限,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to x_0).$$

(iii) 设$f(x)$在点x_0的右近旁有意义,A为常数,若$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使得当$0<x-x_0<\delta$(即$x_0<x<x_0+\delta$)时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称$f(x)$在点$x_0$处的右极限为$A$,记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to x_0^+) \text{ 或 } f(x_0+0)=A.$$

类似地可以定义左极限$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x_0)=A$.

定理 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ ($\Leftrightarrow$表示充分必要条件).

同理 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A.$

2. 无穷小量及其比较

在某一极限过程中,以0为极限的变量(数列或函数)称为无穷小量.

无穷小量的比较:

设α,β是同一极限过程中的两个无穷小量,

(1) 若$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=k\neq0$,则称$\alpha$与$\beta$是同阶无穷小量;

(2) 若$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$,则称$\alpha$与$\beta$是等价无穷小量,记作$\alpha\sim\beta$;

(3) 若$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$,则称$\alpha$是比$\beta$更高阶的无穷小量,记作$\alpha=o(\beta)$.

3. 极限的四则运算

若$\lim f(x)$和$\lim g(x)$都存在,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$. 特别地,$\lim kf(x)=k\lim f(x)$($k$为常数).

(3) 当$\lim g(x)\neq0$时,有 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$.

4. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$,或$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

注:若$x\to0$时,$f(x)\to0$,则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$;

又若$x\to\infty$时,$g(x)\to\infty$,则$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{g(x)}\right)^{g(x)}=\mathrm{e}$.

(三) 连续

1. 函数连续的定义

(1) 设$f(x)$在点x_0的某邻域内有意义. 若极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称$f(x)$在点$x_0$处连续;否则称$f(x)$在点$x_0$处不连续,此时$x_0$称为$f(x)$的间断点.

(2) 若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,则称$f(x)$在点$x_0$处右连续. 类似地可以定义左连续.

2. 间断点的类型

(1) 第一类间断点

(ⅰ) (可去间断点) 若$f(x)$在点x_0处无定义,但极限$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$;或$f(x)$在点$x_0$处有定义,且$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq f(x_0)$,则称$x_0$为$f(x)$的可去间断点.

(ⅱ) (跳跃间断点) 若$f(x)$在x_0处的左、右极限都存在,但不相等,即$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$,这时的间断点称跳跃间断点.

(2) 第二类间断点

若$f(x)$在点x_0处的左,右极限至少有一个不存在. 特别地,当$f(x)$在点x_0的左,右极限中有一个为∞时,这时x_0称为$f(x)$的无穷间断点.

3. 初等函数的连续性和连续函数在闭区间上的性质.

(1) 初等函数的连续性:一切初等函数在其定义域内连续.

(2) 连续函数在闭区间上的性质.

(ⅰ) 最大值、最小值定理

定理 若$x\in[a,b]$,$f(x)$连续,则$f(x)$在$[a,b]$上有最大值和最小值,即$\exists x_1,x_2\in[a,b]$,使得$f(x_1)=\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$,$f(x_2)=\min\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$.

推论 闭区间上的连续函数是有界的.

(ⅱ) 介值定理

定理 若$x\in[a,b]$,$f(x)$连续且$f(a)\neq f(b)$,μ是介于$f(a)$与$f(b)$之间的任一实数,则在(a,b)内至少存在一点ζ,使得$f(\zeta)=\mu$.

推论1 若$f(x)$在$[a,b]$上连续,且$f(a)\cdot f(b)<0$,则至少存在一点$\zeta\in(a,b)$,使得$f(\zeta)=0$.

推论2 若$f(x)$在$[a,b]$上连续,则$f(x)$可以取到介于其最大值M与最小值m之间的一切实数.

三、典型例题解析

Ⅰ 函 数

(一) 函数的表示

例 设$f(x)$满足方程$|a|f(x)+|b|f\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\sin x(|a|\neq|b|)$,求$f(x)$.

解 利用函数表示法只与定义域和对应法则有关而与用什么字母表示无关的特性,通

过适当变量代换，产生另一含 $f(x)$ 与 $f\left(-\frac{1}{x}\right)$ 的方程，再联立用消元法求得 $f(x)$.

令 $u=-\frac{1}{x}$，则 $x=-\frac{1}{u}$，从而代入原方程，可得

$$|b|f(u)+|a|f\left(-\frac{1}{u}\right)=-\sin\frac{1}{u}，\text{即}\ |b|f(x)+|a|f\left(-\frac{1}{x}\right)=-\sin\frac{1}{x}.$$

将上述方程与原方程联立消元，可得 $f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(|a|\sin x+|b|\sin\frac{1}{x}\right)$.

（二）函数的特性

1. 奇、偶性

例 1 设 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & -1\leqslant x<0,\\ \sqrt{x-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$ 求 $\varphi(x)$，使 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是奇函数.

解法一 因为

$$f(-x)=\begin{cases}\varphi(-x), & -1\leqslant -x<0\\ \sqrt{(-x)-(-x)^2}, & 0\leqslant -x\leqslant 1\end{cases}=\begin{cases}\varphi(-x), & 0<x\leqslant 1,\\ \sqrt{-x-x^2}, & -1\leqslant x\leqslant 0.\end{cases}$$

而
$$-f(x)=\begin{cases}-\varphi(x), & -1\leqslant x<0,\\ -\sqrt{x-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

令 $f(-x)=-f(x)$，则 $-1\leqslant x<0$ 时，$-\varphi(x)=\sqrt{-x-x^2}$.

故 $\varphi(x)=-\sqrt{-x-x^2}\,(-1\leqslant x<0)$. 易验证此时 $f(x)$ 确为奇函数.

解法二 对 $x\in[-1,0)$ 应有 $f(-x)=-\varphi(x)$.

所以 $\varphi(x)=-f(-x)\xlongequal[\text{故}\ -x\in(0,1]]{\text{因}\ x\in[-1,0)}-\sqrt{(-x)-(-x)^2}=-\sqrt{-x-x^2},x\in[-1,0)$.

易验证 $\varphi(x)$ 即为所求.

例 2 证明定义于对称区间 $(-a,a)\,(a>0)$ 内的任何函数 $f(x)$，皆可表示为偶函数与奇函数之和的形式.

证 因为 $f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$，而 $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ 与 $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 分别为偶函数与奇函数，故（$f(x)$ 可以表示为偶函数、奇函数之和的）结论为真.

2. 单调性

例 设 $F(x)=\int_0^a f(x+y)\mathrm{d}y$，其中 $a>0$，$f(u)$ 为处处有定义且单调增加的连续函数，试讨论 $F(x)$ 的增减性.

解 任取 $x_2>x_1$，由题设，有 $f(x_2+y)>f(x_1+y)$，又因 $a>0$，故有

$$F(x_2)-F(x_1)=\int_0^a f(x_2+y)\mathrm{d}y-\int_0^a f(x_1+y)\mathrm{d}y=\int_0^a[f(x_2+y)-f(x_1+y)]\mathrm{d}y>0,$$

即有 $F(x_2)>F(x_1)$，所以 $F(x)$ 为单调增函数.

3. 有界性

例 试证函数 $f(x)=\frac{(1+x)^2}{1+x^2}(-\infty,+\infty)$ 为有界函数.

证 因对 $x \in (-\infty, +\infty)$，有

$$|f(x)| = \left|\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\right| = \left|1 + \frac{2x}{1+x^2}\right| \leqslant 1 + \left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leqslant 2.$$

故 在 $(-\infty, +\infty)$ 内，函数 $f(x)$ 为有界函数.

4. 周期性

例 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，且 $f(x)$ 的图形关于直线 $x = a$ 与 $x = b$ $(a < b)$ 对称，证明 $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数.

解 由题设可得 $f(a+x) = f(a-x)$，$f(b+x) = f(b-x)$，因此，$\forall x \in (-\infty, +\infty)$，有

$$\begin{aligned} f[x+2(b-a)] &= f[b+(x+b-2a)] = f[b-(x+b-2a)] \\ &= f[a+(a-x)] = f[a-(a-x)] = f(x). \end{aligned}$$ 得证.

(三) 几类特殊函数

1. 反函数

例 求函数 $y = \dfrac{1-\sqrt{1-2x}}{1+\sqrt{1-2x}}$ 的反函数(包括定义域).

解 令 $\sqrt{1-2x} = t$，则 $y = \dfrac{1-t}{1+t}$，即 $y + yt = 1 - t$，$t = \dfrac{1-y}{1+y}$，亦即 $\sqrt{1-2x} = \dfrac{1-y}{1+y}$，从而 $x = \dfrac{2y}{(1+y)^2}$. 故 $y = \dfrac{2x}{(1+x)^2}(x \neq -1)$ 即为所求.

注 求 $y = f(x)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的一般过程为：先将 $y = f(x)$ 看做 y 已知、x 未知的方程，解出 x(注意 $x \in D$) 得 $x = f^{-1}(y)$(当反函数存在时，解是惟一的)，最后将 x, y 互换即为所求. 而对于分段函数，只要分段求反函数即可.

2. 复合函数

例 设 $f(x) = x/(x-1)$，(1) 试验证 $f\{f\{f[f(x)]\}\} = x$；(2) 求 $f[1/f(x)]$ $(x \neq 0, x \neq 1)$.

解 (1) 设 $f_1(x) = f(x)$，$f_k(x) = f[f_{k-1}(x)]$ $(k = 2,3,4)$

因 $f_1(x) = x/(x-1) = \dfrac{1}{1-(1/x)}$，故 $\dfrac{1}{f_1(x)} = 1 - \dfrac{1}{x}$. 于是，可得

$$f_2(x) = f[f_1(x)] = \frac{1}{1-[1/f(x)]} = \frac{1}{1-(1-(1/x))} = x,$$

$$f_3(x) = f[f_2(x)] = f(x); f_4(x) = f[f_3(x)] = f[f(x)] = f[f_1(x)] = f_2(x) = x.$$

(2) 因 $1/f(x) = 1 - (1/x)$，故

$$f[1/f(x)] = f(1-1/x) = \frac{1-(1/x)}{(1-1/x)-1} = 1 - x(x \neq 0, x \neq 1).$$

3. 分段函数

函数 $y = f(x)$ 在其定义域内，其两个变量的对应关系需用几个式子表示，这种函数称为分段函数(分段函数不是初等函数). 例如，函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, x < 0 \\ \ln(1+x) + x, x \geqslant 0 \end{cases}$$

就是一个分段函数.除此之外,带绝对值的函数及最值函数实际上也是分段函数,甚至个别含参数的极限与定积分等皆可以表示为分段函数的形式,而分段函数的复合函数一般仍为分段函数,但个别情形亦未必.下面就此各举一例(因为分段函数在连续,导数及积分等方面具有一定的特殊性,因而应予注意).

例1　将函数$f(x)=|\ln x|$写为分段表达式.

解　易知　$f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\geqslant 1;\\ -\ln x, & 0<x<1.\end{cases}$

例2　将下列函数写为分段表达式:(1)$f(x)=\max\{x^3,x^2,1\}$;(2)$g(x)=\min\{2,x^2\}$.

解　将曲线$y=x^3,y=x^2,y=1$及$y=2,y=x^2$分别画在两个坐标平面上,然后,视其大、小(即曲线间的上、下)关系,便可以写出分段表达式

$$f(x)=\begin{cases}x^2,x\leqslant -1;\\ 1,|x|<1,\\ x^3,x\geqslant 1.\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}x^2,|x|<\sqrt{2}\\ 2,|x|\geqslant\sqrt{2}.\end{cases}$$

例3　设$f(x)=\sin x,g(x)=\begin{cases}x-\pi,x\leqslant 0,\\ x+\pi,x>0.\end{cases}$求　$f[g(x)]$.

解　因　$f[g(x)]=\begin{cases}\sin(x-\pi),x\leqslant 0\\ \sin(x+\pi),x>0\end{cases}=\begin{cases}-\sin x,x\geqslant 0,\\ -\sin x,x<0.\end{cases}$

故　$$f[g(x)]=-\sin x(-\infty<x<+\infty).$$

例4　由极限表示的分段函数.求函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}(x\geqslant 0)$的分段表达式.

解(1)因　$x\geqslant 0$,故　当$x<1$时,$1\leqslant\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}<\sqrt[n]{3}$;

又因　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$.故由两边夹法则,知当$0\leqslant x<1$时,$f(x)=1$.

(2)因　$\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=x\sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^n+1+\left(\frac{x}{2}\right)^n}(x>0)$,

故　当$1\leqslant x<2$时,$1\leqslant\sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^n+1+\left(\frac{x}{2}\right)^n}<\sqrt[n]{3}$,即$x\leqslant\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}<x\sqrt[n]{3}$.

亦由两边夹法则,知当$1\leqslant x<2$时,$f(x)=x$.

(3)因　$\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\frac{x^2}{2}\sqrt[n]{\left(\frac{2}{x^2}\right)^n+\left(\frac{2}{x}\right)^n+1}(x>0)$,故　当$x\geqslant 2$时,

$$1\leqslant\sqrt[n]{\left(\frac{2}{x^2}\right)^n+\left(\frac{2}{x}\right)^n+1}\leqslant\sqrt[n]{3},\text{即}\frac{x^2}{2}\leqslant\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}\leqslant\frac{x^2}{2}\sqrt[n]{3}.$$

从而,仍由两边夹法则,知当$x\geqslant 2$时,$f(x)=\frac{x^2}{2}$.综上所述,$f(x)=\begin{cases}1,0\leqslant x<1\\ x,1\leqslant x<2\\ x^2/2,x\geqslant 2.\end{cases}$

Ⅱ 极 限

(一) 求极限应首选的一些处理方式(技巧)

(1) 利用极限性质,将极限(非零)确定的因式(子)首先算出(例1).(2) 约去零因子(例2).(3) 等价无穷小代换(例3).(4) 恒等变形①指数函数公式(例4);②对数函数公式(例5);③三角函数公式(例6);④有理化(例7);⑤"同化"变形(例8);(5) 变量代换①降幂代换(例9);②倒代换(例10);③可比较非等价无穷小代换(例11).(6)"阶"的妙用,①略去低价无穷小项(例12);②略去(或添加)无穷大项(例13);③替换(简化)同阶无穷大(小)因子(例14).

例1 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin(2x)}{x(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)}$;(2) $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}(a>0)$.

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1+2\cos x)}{2x}=\dfrac{3}{2}$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{(x+a)(x-a)}}=\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\lim\limits_{x\to a^+}\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}+1\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2a}}\left(1+\lim_{x\to a^+}\frac{x-a}{\sqrt{x-a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}\right)=\frac{1}{\sqrt{2a}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{a}}\lim_{x\to a^+}\sqrt{x-a}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2a}}(1+0)=\frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

例2 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-1}}{2\sqrt[3]{x^2-1}}$.

解 原式 $=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)(x^2+x+1)}}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{\dfrac{x^2+x+1}{x+1}}=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$.

例3 求极限:(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2}{e^x-1}\sin\dfrac{x}{x^2+1}$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\right]$.

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2}{x}\cdot\dfrac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2}{x^2+1}=2$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\dfrac{3}{x}=3$.

例4 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2\ln a}-e^{x^2\ln b}}{(e^{x\ln a}-e^{x\ln b})^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2\ln b}[e^{x^2(\ln a-\ln b)}-1]}{(e^{x\ln b})^2[e^{x(\ln a-\ln b)}-1]^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\ln a-\ln b)}{x^2(\ln a-\ln b)^2}=\frac{1}{\ln a-\ln b}.$$

注 另一解法见例8(2).

例5 求极限(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{ax})\ln\left(1+\dfrac{b}{x}\right)(a>0)$;(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{xe^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)\right]$.

解 (1) 原式 $= b\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^{ax})}{x} = b\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax+\ln(1+e^{-ax})}{x}$

$$= ab + b\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{-ax})}{x} = ab.$$

注 一般应将高阶无穷大之因子变到分数线以下，从而使其极限为0.

(2) **解法一** 原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{xe^x}{1+e^x}-x\right)+(x-\ln(1+e^x))\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{1+e^x} + \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{e^x}{1+e^x}\right) = 0.$$

解法二 令 $e^x = u$，则 $x = \ln u$，因 $x\to+\infty$，故 $u\to+\infty$.

原式 $= \lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u\ln u-(1+u)\ln(1+u)}{1+u} = \lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u}{1+u}\ln\dfrac{u}{1+u} - \lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln(1+u)}{1+u} = 0.$

例6 求极限(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\cos^2x-1}{(x+\sin x)^2}$；(2) $\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{1-x^2}\cot\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

解 (1) 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-\sin^2x}{(x+\sin x)^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sin x/x}{1+\sin x/x} = 1.$

(2) 原式 $= \lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{1-x^2}\left(\cos\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\Big/\sin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$

$$= \lim_{x\to1^-}(\sqrt{1-x^2})\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\left(\cos\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \lim_{x\to1^-}(1+x) = 2.$$

例7 求极限(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$；(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

解 (1) 原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}.$

(2) 原式 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1-\cos x+x\sin x} = 2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos x+x\sin x}$

$$= 2\lim_{x\to0}\frac{1}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\dfrac{\sin x}{x}} = \frac{2}{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2/2}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}} = \frac{4}{3}.$$

例8 求极限(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin^3x+e^x)-x}{\ln(e^{2x}-x^3)-2x}$；(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$.

解 (1) 原式 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin^3x+e^x)-\ln e^x}{\ln(e^{2x}-x^3)-\ln e^{2x}} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln[1+(\sin^3x/e^x)]}{\ln[1-(x^3/e^{2x})]} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^3x/e^x}{x^3/e^{2x}}$

$$= -\lim_{x\to0}\frac{\sin^3x}{x^3}\cdot e^x = -1.$$

(2) 原式 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{x^2}\cdot\dfrac{x^2}{(a^x-b^x)^2} \xlongequal{令y=x^2} \left(\lim\limits_{y\to0}\dfrac{a^y-b^y}{y}\right)\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{a^x-b^x}\right)^2$

$$= [\lim_{y\to0}(a^y\ln a-b^y\ln b)][\lim_{x\to0}\frac{1}{a^x\ln a-b^x\ln b}]^2$$

$$= (\ln a-\ln b)\left(\frac{1}{\ln a-\ln b}\right)^2 = \frac{1}{\ln(a/b)}.$$

注 这是两个“同化”变形之例. 所谓“同化”,这里是指化函数或中间变量一致(以简化运算).

例 9 求极限(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x^2-e^{-x^2}}{x\sin^3(2x)}$;(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6(2x)}$.

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x^2-e^{-x^2}}{8x^4}\xlongequal{令 u=x^2}\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{1-u-e^{-u}}{8u^2}=\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{e^{-u}-1}{16u}$

$=-\dfrac{1}{16}$.

(2) 显然当 $x\to0$ 时,$\sin(2x)\sim2x$,故原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{2^6\cdot x^6}$,令 $y=x^3$,则有

$$原式=\lim_{y\to0}\frac{e^y-1-y}{2^6y^2}=\frac{1}{2^6}\lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{2y}=\frac{1}{2^7}.$$

例 10 求极限:(1) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{-1/x^{20}}}{x^{100}}$;(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\{x^3\ln[(x+1)/(x-1)]-2x^2\}$.

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(1/x^{20})^5}{e^{1/x^{20}}}\xlongequal{令 u=1/x^{20}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u^5}{e^u}=0$;

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln[(x+1)/(x-1)]-2}{1/x^2}\xlongequal{令 u=1/x}\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{\ln(u+1)-\ln(1-u)-2u}{u^3}$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{[1/(u+1)]+[1/(1-u)]-2}{3u^2}=\lim_{u\to0^+}\frac{2}{3(1-u^2)}=\frac{2}{3}.$$

例 11 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(1-\cos x)}{(3x^2-8x^7)\sin x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(1-\cos x)}{3x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot(x^2/2)}{3x^2\cdot x}=\dfrac{1}{6}$.

例 12 求极限(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+1}\cos\dfrac{1}{x}}$;(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^7-3x^3+5x+7}{5x^7+x^6+4x^5+x}$.

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2}\cdot1}=1$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^7}{5x^7}=\dfrac{2}{5}$. 常规作法:原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x^4}+\dfrac{5}{x^6}+\dfrac{7}{x^7}}{5+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^6}}=\dfrac{2}{5}$.

例 13 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{1+x^2}}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan^2x}{1}=\dfrac{\pi^2}{4}$.

(二) 求函数极限的几种常用方法

1. 等价无穷小代换

常用等价无穷小代换公式:当 $x\to0$ 时:

(1) $\sin x \sim x$;(2) $\tan x \sim x$;(3) $\arcsin x \sim x$;(4) $\arctan x \sim x$;(5) $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$;

(6) $\ln(1+x) \sim x$;(7) $e^x - 1 \sim x$;(8) $a^x - 1 \sim x\ln a$;(9) $\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{x}{2}$;

(10) $1-\sqrt[n]{1-x} \sim \frac{x}{n}$.

例 1 求极限(1) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x-\sin x}}$;(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x(a^x-1)}{\ln(1+\tan x^3)}(a>1)$.

解 (1) $x\to0$ 时, $x^3\to0$ 及 $\sqrt{x-\sin x}\to0$, 故

$$e^{x^3}-1 \sim x^3,\ 1-\cos\sqrt{x-\sin x} \sim \frac{1}{2}(\sqrt{x-\sin x})^2.$$

故 $$原式 = \lim_{x\to0^+}\frac{x^3}{\frac{1}{2}(x-\sin x)} = 2\lim_{x\to0^+}\frac{3x^2}{1-\cos x} = 2\lim_{x\to0^+}\frac{3x^2}{x^2/2} = 12.$$

(2) $$原式 = \lim_{x\to0}\frac{x^2(e^{x\ln a}-1)}{\tan x^3} = \lim_{x\to0}\frac{x^2(x\ln a)}{x^3} = \ln a.$$

例 2 求极限(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan^3(2x)}{x^4}\left(1-\dfrac{x}{e^x-1}\right)$;(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\arctan(a^{\sqrt[3]{x^3-1}}-1)}{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x^2-1}}-1}(a>0)$.

解 (1) 因 $x\to0$ 时, $\tan(2x)\sim 2x$, $e^x-1\sim x$.

故 $$原式 = \lim_{x\to0}\frac{(2x)^3}{x^4}\left(\frac{e^x-1-x}{e^x-1}\right) = 8\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x\cdot x} = 8\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x} = 4.$$

(2) 因 $x\to1$ 时, $\sqrt[3]{x^3-1}\to0$, $\sqrt[3]{x^2-1}\to0$.

故 $a^{\sqrt[3]{x^3-1}}-1\to0$, $\arctan(a^{\sqrt[3]{x^3-1}}-1)\sim a^{\sqrt[3]{x^3-1}}-1\sim\sqrt[3]{x^3-1}\cdot\ln a$

且 $$\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x^2-1}}-1\sim\frac{1}{5}\sqrt[3]{x^2-1}.$$

故 $$原式 = \lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^3-1}\cdot\ln a}{\sqrt[3]{x^2-1}/5} = 5\ln a\lim_{x\to1}\sqrt[3]{\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}} = (5\ln a)\sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

例 3 求极限(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^x-1)^2}{x^2\ln x^2}$;(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin[\ln(1+xe^x)]}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$.

解 (1) $$原式 = \lim_{x\to1}\frac{(e^{x\ln x}-1)^2}{x^2\ln[1+(x^2-1)]} = \lim_{x\to1}\frac{(x\ln x)^2}{x^2(x^2-1)} = \lim_{x\to1}\frac{x^2\ln^2[1+(x-1)]}{x^2(x^2-1)}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{x^2-1} \overset{(\frac{0}{0})}{=\!=} \lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{2x} = 0.$$

(2) $$原式 = \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+xe^x)}{\ln[1+(x+\sqrt{1+x^2}-1)]} = \lim_{x\to0}\frac{xe^x}{x+\sqrt{1+x^2}-1}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}-1} = \lim_{x\to0}\frac{1}{1+x/\sqrt{1+x^2}} = 1.$$

例 4 求极限(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$;(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.