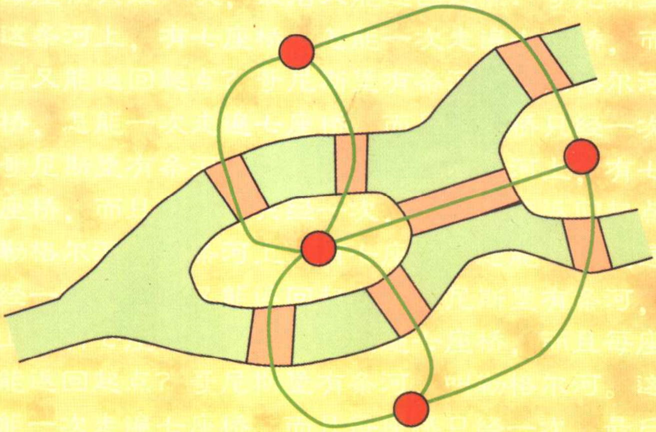
TURING 图灵数学·统计学丛书 13

McGraw Hill Education



Introduction to Graph Theory

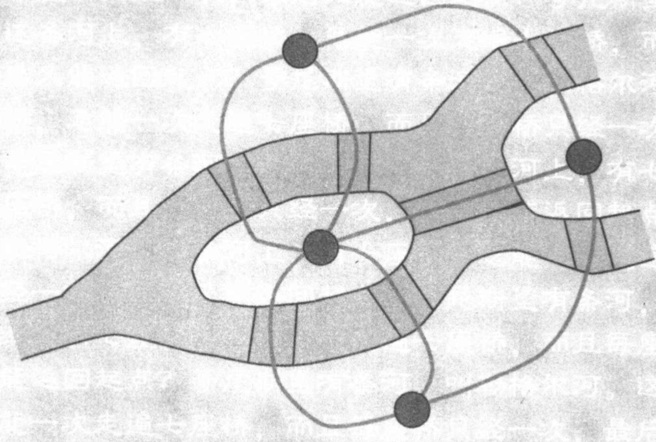
图论导引

[美] Gary Chartrand Ping Zhang 著

范益政 汪毅 龚世才 朱 明 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵数学·统计学丛书 13



Introduction to Graph Theory

图论导引

[美] Gary Chartrand Ping Zhang 著

范益政 汪毅 龚世才 朱明 译

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（CIP）数据

图论导引 /（美）沙特朗（Chartrand, G.）.（美）张萍著；范益政等译.
—北京：人民邮电出版社，2007.9
（图灵数学·统计学丛书）

ISBN 978-7-115-16153-6

Ⅰ. 图… Ⅱ. ①沙…②张…③范… Ⅲ. 图论－高教学校－教材 Ⅳ. O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 058176 号

内 容 提 要

本书介绍了图论的常见专题，同时也包含一些待研究或未解决的问题，用于激发学生兴趣，培养创新能力. 全书共分 13 章，前 3 章介绍一些基础知识，后面章节介绍了树、连通性、可遍历性、有向图、匹配和因子分解、可平面性、图的染色、Ramsey 数、距离及控制等内容. 本书内容全面，证明与应用实例并举，还给出了证明方法，书的最后提供了奇数号习题的解答或提示.

本书可作为高等院校相关专业本科生一学期课程的教材，也可供图论爱好者自学使用.

图灵数学·统计学丛书

图 论 导 引

◆ 著　　[美] Gary Chartrand　Ping Zhang
　译　　范益政　汪　毅　龚世才　朱　明
　责任编辑　明永玲

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街 14 号
　邮编　100061　　电子函件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
　新华书店总店北京发行所经销

◆ 开本：700 × 1000　1/16
　印张：25.75
　字数：505 千字　　　2007 年 9 月第 1 版
　印数：1－4 000 册　　2007 年 9 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2006-3970 号

ISBN 978-7-115-16153-6/O1

定价：49.00 元

读者服务热线：(010)88593802　印装质量热线：(010)67129223

版权声明

Gary Chartrand, Ping Zhang: *Introduction to Graph Theory* (ISBN: 0-07-320416-1).

译 者 序

1736 年，欧拉 (Euler) 在他的一篇论文中讨论了哥尼斯堡七桥问题，由此诞生了一个全新的数学分支 —— 图论 (Graph Theory). 经过 200 多年的发展，图论已发展成为一个理论与应用兼有的研究领域. 除经典图论之外，图论与代数 (如矩阵论和群论等) 的结合形成了代数图论，与拓扑的结合形成了拓扑图论，与概率的结合形成了随机图论，与谱几何的结合形成了谱图理论，等等. 此外，它在有机化学上的应用形成了化学图论，同时它在计算机和模式识别等领域也有很高的应用价值.

本书是一本优秀的图论教材，由美国西密歇根大学教授 Gary Chartrand 和 Ping Zhang 合著. Chartrand 教授为国际著名的图论专家，他在图论领域发表了数量众多的优秀论文，总数排名世界第 4 位，合作者包括 Erdős 和 Frank Harary 等著名数学家.

本书生动有趣地介绍了图论的常见专题，同时也包含一些待进一步研究或未解决的问题，用于激发学生兴趣，培养创新能力. 本书可作为本科生一学期课程教材，也可供图论爱好者自学使用. 本书内容全面，证明与应用实例并举，还给出了证明方法，书的最后提供了奇数号习题的解答或提示.

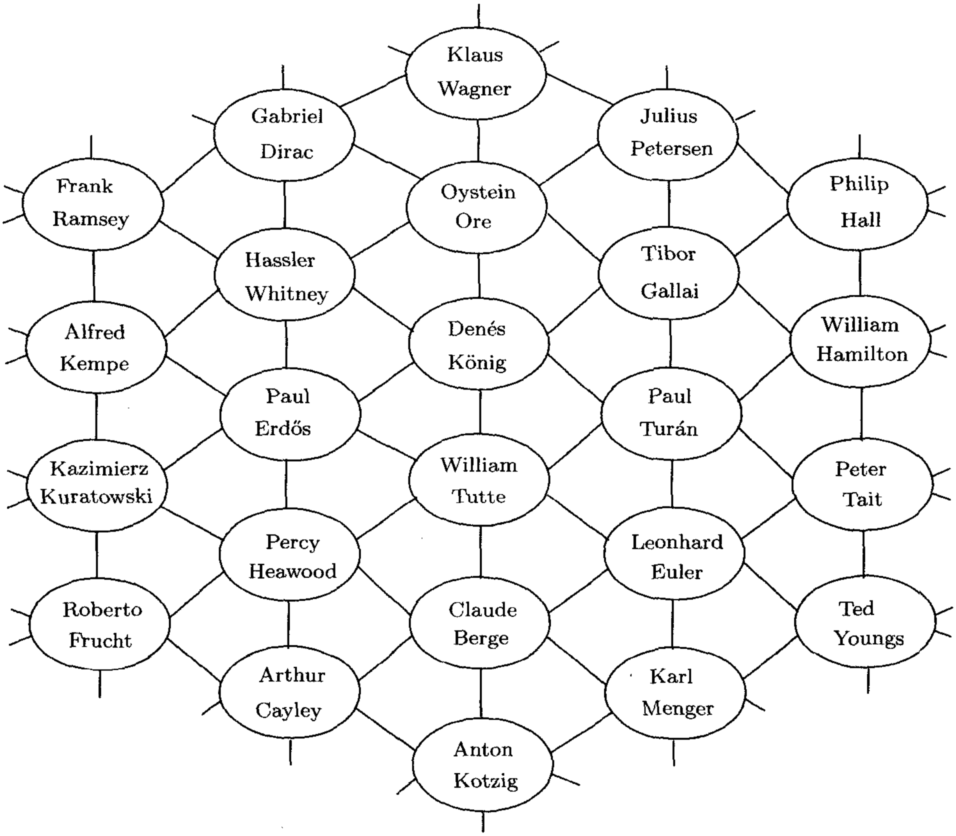
本书由范益政、汪毅、龚世才和朱明翻译，全书最后由范益政统稿. 限于译者水平，译文中难免存在疏漏和错误，望广大读者批评指正.

感谢人民邮电出版社北京图灵文化发展有限公司为我们提供机会，把这本优秀教材推荐给国内广大读者，促进中国图论的发展. 最后感谢国家自然科学基金 (10601001) 的资助.

译 者

2007 年 1 月

谨以此书献给那些以不同方式为推动图论发展做出杰出贡献的众多数学家们.



从 Königsberg 到 König 的书,
图论的传说正是如此,
而且越来越精彩……

——Blanche Descartes (1969)

前　言

也许你并不感到惊讶, 当我们自己在学习数学时, 一直认为我们所学到的就是那些已知的事实 —— 那些自古就有的事实. 直到后来, 我们才明白这些事实 (即"定理", 已经成为我们词汇的一部分) 并非早就存在, 而正是人们发现了这些事实. 的确, 这些人的名字也成为我们学习内容的一部分.

数学已经存在了几千年. 在远古时代, 一些特定的文化形成了它们独特的数学. 这当然包括埃及、巴比伦、希腊、中国、印度和日本. 在近代, 这些都融合为统一的国际数学. 数学已经变得更加系统化, 且已经被划分为有更加明确定义的若干领域 (尽管它们之间存在一些重要的交叉). 有了这些变化, 关于一个数学命题正确性的阐述 (或证明) 也就变得更加结构化且更加易于表达.

本书的宗旨是向本科生 (或者某些高中生) 介绍数学的一个领域 —— 图论, 它诞生于 18 世纪上半叶. 到 19 世纪下半叶这个领域才发展为数学的一个系统的分支. 而直到 20 世纪上半叶, 这门学科才有自己的著作出现. 然而自 20 世纪下半叶开始, 这门学科发展迅猛.

我们的意图是向读者介绍这门学科的若干主要专题, 以及那些为发展和塑造该领域做出贡献的人. 一开始, 大多数人都和你一样, 喜欢数学并带着强烈的好奇心. 正如其他事物 (尽管不常提起) 一样, 数学也有其自身非严格的一面; 我们也介绍其中的若干事件. 即使是最聪明的数学家, 他也不可能洞悉一切, 我们给出一些没有研究透彻的专题, 它的答案甚至这些问题也还是未知的. 这将为你提供一些机会, 进行一些创造性思考. 事实上, 也许下一个对此学科有重大影响的人就是你.

促使图论变得有趣的原因之一, 是可以用图为特定问题建模. 这些问题在图的帮助下得以展开研究 (或可能被解决). 正由于这一点, 图模型在全书经常出现. 当然, 图论是数学的一个领域, 因而必然涉及数学理论的研究 —— 一些概念以及它们之间的联系. 我们之所以选择本书所含的专题和结论, 是因为它们或者非常有趣, 或者非常重要, 或者是这门学科的代表.

如前所述, 这本书是为本科生写的. 正因为这一点, 我们一般在合适的地方都给出了定理的证明, 证明的方法带有启发性, 且证明也不是太长. 我们总希望本书的内容不仅对学数学的学生, 也对其他图论爱好者都是有益的、有趣的. 这本书同样适用于自学.

本书包含 3 个附录. 在附录 1 中, 我们回顾一些重要的有关集合和逻辑的事实; 附录 2 主要讨论等价关系和映射; 附录 3 介绍了一些证明的方法. 考虑到本科生仍然处于掌握证明的学习过程中, 我们在每个证明的开始之处都指出证明的方法. 我们知道, 如果一个学习者在试图弄清楚一个证明时, 这个证明读起来并不舒服且需

要很多的预备知识, 那么他会很沮丧. 因此, 我们尽最大努力给出清晰的、表述流畅的证明.

我们感到, 如果能够熟悉古往今来为图论做出贡献的人, 对图论的喜爱也能得以加强, 这一点对于数学的其他领域, 事实上对于任一个学术领域都是类似的. 因此, 本书也包含一些我们认为有趣的有关"图论人"的评注. 我们相信这些人也是图论故事的一部分, 我们在正文中讨论他们, 而不是仅作为脚注. 我们经常忽略数学是一个活的学科. 图论是由人创造的, 是一门正在进化发展的学科.

本书也把若干节设置为"延伸阅读". 若该书作为教材使用, 则这些部分可以省略, 并无负面影响. 有时, 一个延伸阅读就是图论的一个研究领域, 我们认为它非常有趣, 但可能授课的老师不去讲它, 或者是因为没有时间, 或者这不是他的擅长. 有的时候, 延伸阅读可以提供一些图论杂闻, 涉及的数学内容很少, 仅仅是因为我们认为它非常有趣.

本书还有一些节设置为"专题探索". 这些节包含了一些专题, 学生可以去尝试, 可以去发挥想象. 这就为学生提供一个发现问题的机会. 总之, 我们相信这会为某些学生带来学习的乐趣.

就本书作为课程教材而言, 我们认为前 3 章可作为介绍性的内容. 这部分内容可以讲得快一点. 学生应该可以自己读懂它们. 授课老师也可以不讲连通性和 Menger 定理. 8.3 节、9.2 节、10.3 节和 11.2 节可以略去, 第 12 章和第 13 章可根据老师个人意愿选讲.

在本书的结尾, 我们提供了奇数号习题的解答或提示、参考文献、人名索引、数学术语索引以及符号列表.

撰写这本书的想法源于我们与 McGraw-Hill 出版公司执行编辑 Robert Ross 的交流与讨论. 我们对他的鼓励表示感谢. 我们也向 McGraw-Hill 出版公司的其他员工的帮助表示感谢, 包括 Daniel Seibert (编辑助理), Vicki Krug (高级策划编辑). 此外, 我们对下面的审稿人致以最高的敬意, 他们是: Jay Bagga (鲍尔州立大学); Richard Borie(阿拉巴马大学)、Anthony Evans(赖特州立大学)、Mark Ginn (阿巴拉契亚州立大学)、Mark Goldberg(伦斯勒工业学院)、Arthur Hobbs(得克萨斯农工大学)、Garth Isaak(利哈伊大学)、Daphne Liu(加州州立大学洛杉矶分校)、Alan Mills (田纳西技术大学)、Dan Pritikin (迈阿密大学)、John Reay(西华盛顿大学) 和 Yue Zhao(中佛罗里达大学).

Gary Chartrand
Ping Zhang

译者简介

范益政 安徽大学数学与计算科学学院教授, 博士生导师. 2001 年获中国科学与技术大学理学博士学位, 2003~2005 年在南京师范大学从事博士后研究工作, 主要研究方向为代数图论及其应用; 已发表学术论文 20 多篇, 其中有 10 篇被 SCI 收录, 8 篇被 EI 收录. 主持国家自然科学基金《图的 Laplace 理论及其在计算机视觉中的应用》和安徽省自然科学基金《谱图理论及其应用》等项目.

汪　毅 安徽大学数学与计算科学学院讲师. 主要研究方向为谱图及其应用, 已发表学术论文 10 余篇.

龚世才 安徽理工大学副教授. 主要研究方向为图论及其应用, 已发表学术论文 10 余篇.

朱　明 安徽大学数学与计算科学学院研究生. 主要研究方向为代数图论及其应用, 已发表学术论文 2 篇.

目 录

第1章 引 言

1.1 图与图模型

一家大型的出版公司在科学、技术和计算领域内有 10 名编辑 (分别用 $1, 2, \cdots$, 10 来标记). 这 10 位编辑在每个月的第一个星期五都有一个固定的会议时间. 他们把自己分成 7 个委员会, 会后再碰头讨论关系公司利益的一些具体问题, 分别是: 做广告宣传、留住审稿人、联系新作者, 还有财务问题、二手书和新版书、竞争品种、院校代表等. 这就有了本书的第一个例子.

例 1.1 这 10 名编辑分成 7 个委员会: $c_1 = \{1,2,3\}$, $c_2 = \{1,3,4,5\}$, $c_3 = \{2,5,6,7\}$, $c_4 = \{4,7,8,9\}$, $c_5 = \{2,6,7\}$, $c_6 = \{8,9,10\}$, $c_7 = \{1,3,9,10\}$. 当这 10 名编辑在星期五都出席的情形下, 为了使这 7 个委员会都能够成功举行会议, 他们留出 3 个时间段. 由于有些编辑参与了两个委员会, 所以这些委员会是不能同时开会的. 这种情况可以用图 1.1 所示的图形象地建立模型.

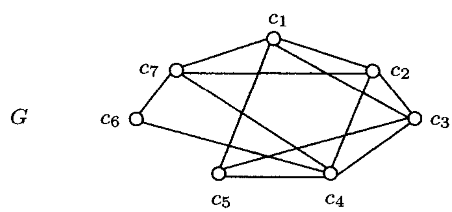


图 1.1 一个图

在这个图中, 用 7 个小圆圈分别代表 7 个委员会; 如果两个小圆圈所代表的委员会至少有一个共同的成员, 那么在它们之间连一条直线段. 换句话说, 两个小圆圈 (委员会) 间的直线段告诉我们, 这两个委员会不能同时安排开会. 这就给出了一个图或 "模型", 它反映了这些委员会以及其成员之间的重叠属性. ◇

我们在图 1.1 中所画的就称为一个图. 正式地说, **图 (graph)**G 是由有限非空集合 V 及其二元子集 E 构成, 其中 V 中元素称为**顶点 (vertex)**, E 中元素称为**边 (edge)**; 集合 V 和 E 分别称为 G 的**顶点集 (vertex set)**和**边集 (edge set)**. 因此, 图 G 是由 V 和 E 构成的二元组 [实际上是一个有序 (ordered) 的二元组], 记为 $G = (V, E)$. 有时把 V 和 E 写成 $V(G)$ 和 $E(G)$ 以强调这些顶点集和边集是属于特定图 G 的. 虽然 G 是图的一般记号, 但也可以用 F, H, G', G'', G_1, G_2 等记号. 顶

点也可以称为**点** (point)或**结点** (node); 边也可以称为**线** (line). 事实上, 有些人把我们所描述的图称为**简单图** (simple graph). 当 $V(G) = V(H)$, $E(G) = E(H)$ 时, 则称图 G 和图 H 是**相同的** (equal), 记为 $G = H$.

通常, 用平面上的图表来表示图 (就如我们在图 1.1 中所做的那样). 图表中的点 (实际上是小圆圈 —— 中空的或者实心的) 就代表了图的顶点; 如果图上的某两顶点之间存在边, 则在图表上与其对应的两点之间连接直线段或者曲线段. 图表自身也可以看成是一个图. 对于图 1.1 中的图 G, 其顶点集就是 $V(G) = \{c_1, c_2, \cdots, c_7\}$, 图 G 边集是

$$E(G) = \{\{c_1, c_2\}, \{c_1, c_3\}, \{c_1, c_5\}, \{c_1, c_7\}, \{c_2, c_3\}, \{c_2, c_4\}, \{c_2, c_7\},$$
$$\{c_3, c_4\}, \{c_3, c_5\}, \{c_4, c_5\}, \{c_4, c_6\}, \{c_4, c_7\}, \{c_6, c_7\}\}.$$

我们再来考虑另外一种情形. 你见过这样的一个整数序列吗?

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots$$

序列中的每个整数都是它前面最近的两个整数之和 (除了最前面的两个整数). 这些整数在数学中是非常著名的, 称为**Fibonacci 数**. 事实上, 这些整数出现得相当频繁, 甚至有本期刊 (*The Fibonacci Quarterly*, 一年出版 5 期!) 专门来研究它们的性质. 我们的第二个例子就是关于这些整数的.

例 1.2 考虑由 6 个给定的 Fibonacci 数构成的集合 $S = \{2, 3, 5, 8, 13, 21\}$. S 含有这样一些不同整数对, 它们的和或差 (取绝对值) 还是属于 S, 即, $\{2,3\}$, $\{2,5\}$, $\{3,5\}$, $\{3,8\}$, $\{5,8\}$, $\{5,13\}$, $\{8,13\}$, $\{8,21\}$, $\{13,21\}$. 通过图 1.2 中的图 H, 就有了一个更加形象化的方法来找出这几对整数. 在此情形下, $V(H) = \{2, 3, 5, 8, 13, 21\}$,

$$E(H) = \{\{2,3\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{3,8\}, \{5,8\}, \{5,13\}, \{8,13\}, \{8,21\}, \{13,21\}\}. \quad \diamondsuit$$

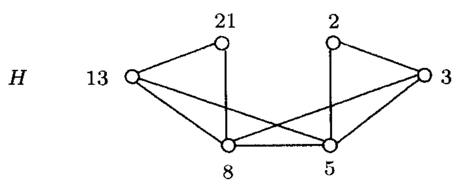


图 1.2 另一个图

在处理图的时候, 通常把 2 元集 $\{u, v\}$ 简写成 uv (或者 vu). 如果 uv 是图 G 的边, 那么就称 u 和 v 在 G 中是**邻接的** (adjacent). G 中的顶点数和边数分别称为该图的**阶** (order)和**边数** (size). 由于图的顶点集是非空的, 所以一个图的阶至少是 1. 只有一个顶点的图称为**平凡图** (trivial graph), 这意味着**非平凡图** (nontrivial graph)的阶至少是 2. 图 1.1 中图 G 的阶是 7, 边数是 13; 图 1.2 中图 H 的阶是 6,

边数是 9. 一般用 n 和 m 来分别表示图的阶和边数. 因此, 对于图 1.1 中的图 G 来说, $n=7$, $m=13$; 而对于图 1.2 中的图 H, $n=6$, $m=9$.

如图 1.3(a) 所示的图 G, $V(G)=\{u,v,w,x,y\}$, $E(G)=\{uv,uw,vw,vx,wx,xy\}$. 有些情况下, 我们只对图的结构感兴趣, 而不在意顶点的命名. 因此, 在画图时就可以不给顶点标号. 图 1.3(a) 中的图 G 称为**标号图 (labeled graph)**, 而图 1.3(b) 中的图称为**非标号图 (unlabeled graph)**.

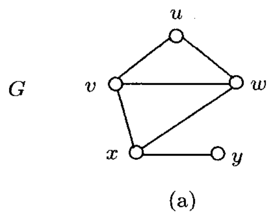


图 1.3 标号图与非标号图

现在我们讨论另一个情形.

例 1.3 假设我们有两枚硬币, 一金一银. 把它们放到一个 2×2 跳棋盘的两个方格内. 这样就有 12 种构形, 如图 1.4 所示, 深色硬币代表是金币.

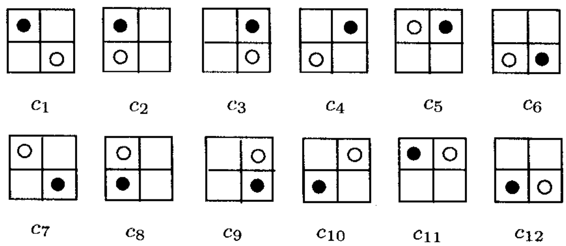


图 1.4 12 种构形

一种构形可以按照一定的规则变换为另一种构形. 特别地, 如果构形 c_j 可以由构形 c_i 按照下面两个步骤之一恰好获得, 那么就称 c_i 可以变换为 c_j $(1\leqslant i,j\leqslant 12, i\neq j)$:

(1) 把 c_i 中的一枚硬币水平地或者竖直地移到一个空格子内;

(2) 交换 c_i 中两枚硬币的位置.

显然, 若 c_i 可以变换为 c_j, 则 c_j 也可以变换为 c_i. 例如, 如图 1.5 所示, c_2 可以变换为: (i) c_1 (向右移动 c_2 的一枚银币); (ii) c_4 (向右移动 c_2 的一枚金币); (iii) c_8 (交换 c_2 的两枚硬币).

现在考虑图 1.4 中的 12 种构形. 构形中有些对 c_i, c_j $(1\leqslant i,j\leqslant 12, i\neq j)$ 能够

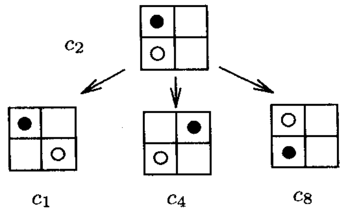


图 1.5 构形 c_2 的变换

相互变换, 而有些对却不可以. 这种情形也可以用图来描述, 例如用图 F 描述, 其中 $V(F)=\{c_1,c_2,\cdots,c_{12}\}$; c_ic_j 是 F 中的边, 如果 c_i 和 c_j 可以相互变换的话. (这个图 F 如图 1.6 所示.) ◇

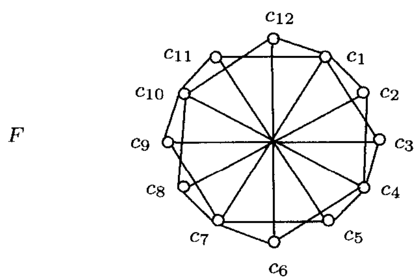


图 1.6 12 种构形的变换图模型

我们再来看一个例子.

例 1.4 我们收集了一些 3 字母的英文单词 (即由 3 个字母构成的英文单词):

ACT, AIM, ARC, ARM, ART, CAR, CAT, OAR, OAT, RAT, TAR.

如果单词 W_2 能够由单词 W_1 通过下面两个步骤之一恰好获得, 那么就称 W_1 可以变换为 W_2:

(1) 交换 W_1 中两个字母;

(2) 用另外一个字母来替代 W_1 中的一个字母.

易见, 如果 W_1 可以变换为 W_2, 那么 W_2 也可以变换为 W_1. 这种情形可以建立图模型 G. G 中的顶点就是所给的单词; 如果两个单词可以相互变换, 那么它们所对应的 G 中顶点就是邻接的. 这样的图称为**词集的单词图 (the word graph of a set of words)**. 对于上面的 11 个单词, 它的单词图就是图 1.7 所示的图 G.

如果图 G 是某个 3 字母单词集 S 的单词图, 那么称 G 为**单词图 (word graph)**. 例如, 在图 1.8(a) 中, (非标号) 图 G 就是一个单词图, 注意到它是词组 $S=$ {BAT, BIT, BUT, BAD, BAR, CAT, HAT}的单词图, 如图 1.8(b) 所示. (这个想法涉及 "同构图"

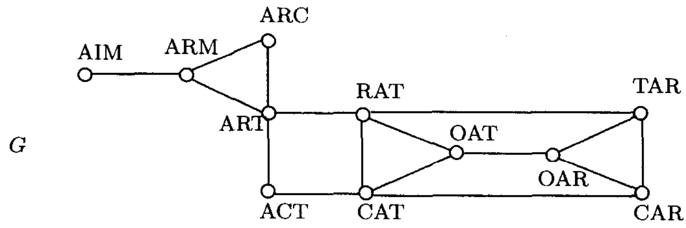


图 1.7 关于 11 个单词的单词图

的概念, 该概念将在第 3 章作详细讨论.) ◇

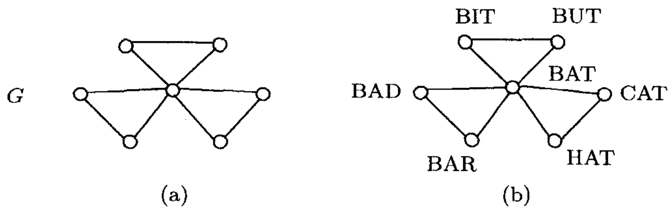


图 1.8 单词图

我们以最后一个例子来结束本节.

例 1.5 图 1.9 所画的是两个繁忙街道交叉口的交通车道. 当一个车辆到达这个路口时, 它会在 9 个车道的一个车道上出现, 这 9 个车道分别记为: L1, L2, $\cdots$, L9.

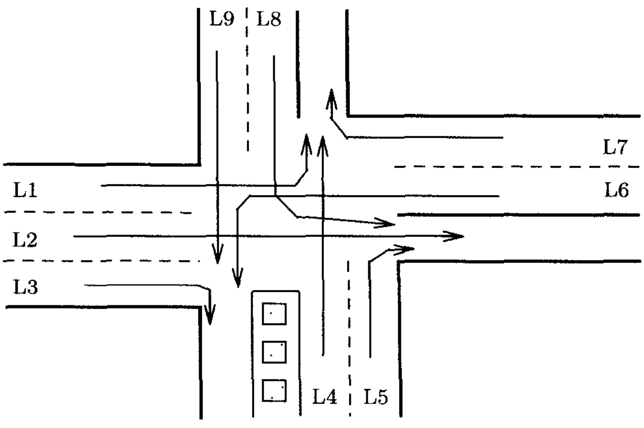


图 1.9 街道交叉路口的交通车道

在这个路口处有一个交通灯, 它告知不同车道上的司机何时可以通过这个路口, 这是为了确保某些处于不同车道上的车辆不会在同一时间进入路口, 比如 L1 和 L7.

然而 L1 和 L5 上的车辆同时穿过路口是没有问题的. 这种情形可以用图 1.10 中的图 G 表示, 其中 $V(G)=\{\text{L1}, \text{L2}, \cdots, \text{L9}\}$. 当两个车道上的车辆不能同时进入路口时 (否则可能引发交通事故), 则在这两个顶点 (对应于上述车道) 之间连接一条边.

◇

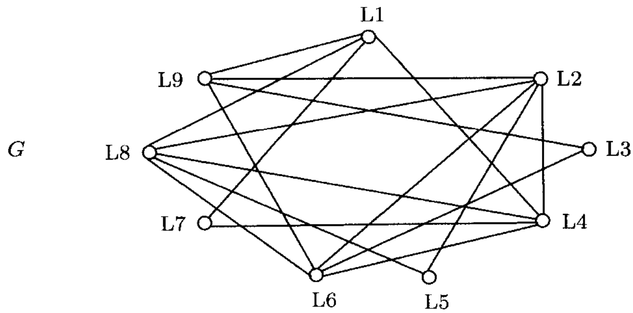


图 1.10 例 1.5 中的图 G

前面所看到的就是如何把 5 种不同情形用图来表示. 实际上, 每个例子都涉及一个集合: (1) 委员会集合; (2) 整数集合; (3) 2×2 跳棋盘上两枚硬币的构形集合; (4) 3 字母单词集合; (5) 路口的交通车道集合. 在每个集合内, 若干对元素之间都以某种方式相关联: (1) 两个委员会有一个共同的成员; (2) 集合内两个整数的和或差 (取绝对值) 属于这个集合; (3) 两种构形可以通过某种规则相互变换; (4) 两个 3 字母单词通过字母的某种移动相互变换; (5) 某几对车道上的车辆不能在同一时间内进入路口. 在每个例子中, 都会定义一个图 G, 它的顶点就是集合中的元素. 当 G 的两个顶点满足上述条件时, 它们就是邻接的. 图 G 对所给的情形建立了模型. 对于涉及上述情形的相关问题, 常常通过研究其图模型来分析它们.

习题

1.1 在例 1.1 中, 可以提出什么逻辑问题? 回答这个问题.

1.2 仿照例 1.1, 自己用 9 名编辑和 8 个委员会构造一个例子, 并画出相应的图.

1.3 设 $S=\{2,3,4,7,11,13\}$, 画出一个图 G, 其顶点集是 S, 而且对于 $i,j\in S$, 当 $i+j\in S$ 或者 $|i-j|\in S$, 则 $ij\in E(G)$.

1.4 设 $S=\{-6,-3,0,3,6\}$, 画出一个图 G, 其顶点集是 S, 而且对于 $i,j\in S$, 当 $i+j\in S$ 或者 $|i-j|\in S$, 则 $ij\in E(G)$.

1.5 自己构造一个整数集合 S, 画出一个图 G, 其顶点集是 S, 而且当 i 和 j 满足一定条件时, 则 $ij\in E(G)$.

1.6 考虑图 1.4 中的 12 种构形 $c_1, c_2, \cdots, c_{12}$. 对于每两个构形 c_i 和 c_j $(1\leqslant i,j\leqslant 12$, $i\neq j)$, 首先水平或竖直地移动其中一枚硬币, 然后交换两枚硬币的位置, 这样 c_j 就有