高等学校教材

线性代数

Linear Algebra

北京理工大学
杨 刚 吴惠彬 编

高等教育出版社

高等学校教材

线 性 代 数

北京理工大学
杨　刚　吴惠彬　编

高等教育出版社

内容提要

本书是编者在多年的实际教学经验的基础上，根据工科本科类数学基础课程教学基本要求编写而成。本书结构严谨，内容丰富，阐述深入浅出，层次清晰，有大量的应用实例。全书共分为六章，内容包括：矩阵、线性方程组、线性空间与线性变换、行列式、特征值与特征向量、二次型与正定矩阵。

本书可作为高等院校理工类非数学专业的线性代数课程教材，也可作为有关工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/杨刚，吴惠彬编．—北京：高等教育出版社，2007.8

ISBN 978-7-04-021931-9

Ⅰ.线… Ⅱ.①杨…②吴… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 109125 号

策划编辑 王　强　**责任编辑** 董达英　**封面设计** 张申申　**责任绘图** 黄建英
版式设计 余　杨　**责任校对** 王　超　**责任印制** 韩　刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京汇林印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2007 年 8 月第 1 版
印　　张	19.25	印　　次	2007 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	360 000	定　　价	20.40 元

物料号　21931-00

前　　言

线性代数是理工院校本科生的一门数学公共基础课，它所讨论的内容和研究的问题是许多近代科学理论与工程技术的基础。特别是在自动控制、电子通讯、计算机技术以及工程力学等领域，线性代数有广泛的应用。另一方面，作为代数学的一个组成部分，线性代数有其自身的数学特点。从方法论的角度看，它的某些内容是体现数学思维模式的典型范例。因此，线性代数不仅为其他学科提供强有力的数学工具，而且在数学思维的训练和数学能力的培养上也发挥着重要作用。这正是本书力图达到的目标。

本书共分为六章，前三章由杨刚编写，后三章由吴惠彬编写。全书以矩阵为切入点，以线性方程组为发展线索，把矩阵作为贯穿始终的重要工具，从实际应用到理论推导全方位地突出矩阵概念。前三章（矩阵、线性方程组、线性空间与线性变换）的内容完全不涉及行列式，从而可使读者集中精力，理解、掌握矩阵的基本内容，为后续章节的学习打下良好的基础。行列式的内容被放在第四章，以便计算矩阵的特征值时使用。这样的安排可有效地防止过去那种行列式与矩阵几乎同时引入的模式所产生的两个概念相互混淆的现象发生。作者按照这种体系结构在北京理工大学 8 届试验班上讲授线性代数，均取得良好效果。

线性代数的许多内容或直接来源于实践，或在实践中有重要的应用。但长久以来，线性代数的教材重理论、轻实践者居多。这种理论与实践的相互脱节给学好、用好线性代数带来了不小的障碍，使得线性代数考试成绩突出的学生未必就能在实践中同样突出地使用线性代数解决实际问题。这与加强素质教育的宗旨偏差甚大。针对这种现状，本书加强了实践环节与工程应用的内容。首先，对重要的基本概念，力求做到从实践中来，即概念的引入尽可能源于实际问题或作为思维过程的自然延续。其次，增加了应用问题的举例，重点讨论如何将线性代数知识应用到实践中去的问题。作者多年的教学实践表明，理论联系实际的确会极大地增强对线性代数的思想和方法的理解与把握，对提高运用线性代数知识解决实际问题的能力也会有较大的推动作用。

近几年来，用 MATLAB 辅助线性代数的教学正越来越受到人们的重视，并且已经成为一种比较流行的教学模式。MATLAB 是一种以矩阵运算为基础的交互式程序语言，特别适用于求解线性代数的问题，尤其是计算量比较大的实际应用问题。为此，在本书每章的最后，作为阅读材料，安排了若干 MATLAB 算例，供感兴趣的读者使用。

考虑到理工科院校各专业对线性代数的要求不尽相同，本书设置了两种学时安排：一、对机械制造、化学工程以及经济管理等专业，只讲授一至六章的基本内容，其中的线性空间与线性变换、Jordan 标准形，以及某些较难的例题可以略去，大约需要40 多个学时。二、对电子信息、自动控制以及工程力学等专业，讲授全部内容，大约需要60 学时左右。在实际讲授过程中，教师可根据学时及专业自行安排讲授内容。

在本书即将正式出版前，作者对在编写过程中给予过热情帮助和大力支持的各位同仁表示衷心的感谢！特别应指出的是，北京理工大学的孙良教授对全书的体系框架提出了非常重要的建设性意见，北京航空航天大学的李心灿教授和北京信息工程学院的吴昌悫教授对本书的编写给予了热情的关心和帮助，北京航空航天大学的王日爽教授仔细、认真地审阅了全稿，并提出了许多重要的建议，北京理工大学的魏丰副教授提供了本书的 MATLAB 算例。作者再次对上述专家表示衷心的谢意！同时，感谢高等教育出版社对本书出版的大力支持。由于时间仓促，加之作者水平所限，不妥或谬误之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2007 年 4 月 19 日

目　　录

第一章 矩 阵

矩阵的思想和概念最先由Laplace和Sylvester所使用和提出. 随着线性代数学科的不断发展和完善,矩阵的作用愈显重要,其应用也愈加广泛. 现在,矩阵已经成为线性代数中一个最重要的概念.

§1.1 Gauss消元法

线性方程组是线性代数的主要研究对象. 在中学的代数课程中,我们已接触过一些简单的线性方程组,知道如何对其求解. 在这里,我们将首先通过引入矩阵的概念,给出线性方程组求解的一个实用方法——Gauss消元法,以此作为本章的重要理论基础. 在后续章节,我们将完成对线性方程组全面和系统的讨论. 下面给出线性方程组的基本概念:

设有

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是未知数,$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 是系数,$b_1,b_2,\cdots,b_m$ 是常数项. 称式(1.1.1)为 **m 个方程 n 个未知数的线性方程组**,简称为 n 元线性方程组.

若 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为零,则称方程组(1.1.1)为**非齐次的**;若 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 全为零,则称方程组(1.1.1)为**齐次的**.

任取 n 个数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$,若分别代替 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,使(1.1.1)的每个方程的等号都成立,则称 $x_1=c_1,x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$ 是**方程组(1.1.1)的一个解**,也可以记之为$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$. 由此可见,n 元线性方程组的一个解是一个 n 元有序数组. 线性方程组全部解构成的集合称为**解集合**. 若两个线性方程组有相同的解集合,则称它们是**同解方程组**.

设 W 是方程组(1.1.1)全部解的集合. 若 $W=\varnothing$,则称(1.1.1)是**不相容方程组**,或称方程组(1.1.1)**无解**;若 $W\neq\varnothing$,则称(1.1.1)**有解**;此时若 W 只含一个元素,则称(1.1.1)**有唯一解**;若 W 包含不止一个元素,则称(1.1.1)**解不唯一**. 当方程组(1.1.1)解不唯一时,W 中的一个元素称为(1.1.1)的一个**特解**;W 中全部元素的一个通项表达式称为(1.1.1)的**通解**或**一般解**. 一个线性方程组是否有解称为解的存在性问题,是否解唯一称为解的唯一性问题,解的存在性与

唯一性统称为解的判别.

对齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1.1.2}$$

显然,$x_1=0,x_2=0,\cdots,x_n=0$ 是方程组(1.1.2)的一个解,称之为**零解**;除零解外,若再有其他解,则未知数的取值必然不全为零,因此称之为**非零解**.

例如,齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

只有零解(0,0),而齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

除零解(0,0)外,还有许多非零解,如$(2,-1)$,$\left(3,-\frac{3}{2}\right)$,$\cdots$.

有了上述必要的准备知识,下面就可以讨论线性方程组的求解问题.

在中学里,我们已学过用加减消元法求解二元和三元线性方程组.由于我们在这里讨论的是最一般的线性方程组,因此就必须对原有方法进行改进,以使新方法简便而又规范,同时适用所有的线性方程组,首先通过例子说明新方法是如何进行求解的.

例 1.1.1 解下列线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 & ① \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 & ② \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 7 & ③ \end{cases}$$

解 ①$\times\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 & ① \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 & ② \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 7 & ③ \end{cases}$$

①$\times(-2)+$②,①$\times(-3)+$③:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 & ① \\ x_3 = 1 & ② \\ x_2 + 2x_3 = 1 & ③ \end{cases}$$

②↔③：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 & ① \\ x_2 + 2x_3 = 1 & ② \\ x_3 = 1 & ③ \end{cases}$$

由③得 $x_3 = 1$，代入②得 $x_2 = -1$，代入①得 $x_1 = 2$，故原方程组的解为 $(2, -1, 1)$.

例 1.1.1 虽然简单，但却能说明改进后的消元法的基本步骤：首先，求解过程可分为两部分，第一是把方程组变为易于求解的形式，称之为**消元过程**；第二是根据新方程组，从最后一个方程开始反复进行求解代入，直到解出全部未知数，称之为**回代过程**. 其次，在消元过程中，我们对方程组进行了三种类型的变换：

（ⅰ）用一个非零数乘一个方程；

（ⅱ）把一个方程的常数倍加到另一个方程上；

（ⅲ）互换两个方程的位置.

称上述三种变换为**方程组的初等变换**. 利用初等变换，我们把原方程组变成另一个方程组. 但为什么新方程组的解就是原方程组的解呢？对此，我们有

定理 1.1.1 方程组的初等变换把一个线性方程组变成另一个同解的线性方程组.

考虑下述三元线性方程组.

Ⅰ：
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

把Ⅰ的第一个方程乘以常数 k 再加到第二个方程上得

Ⅱ：
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ (a_{21} + ka_{11})x_1 + (a_{22} + ka_{12})x_2 + (a_{23} + ka_{13})x_3 = b_2 + kb_1 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

显然，方程组Ⅰ的解也是方程组Ⅱ的解. 反之，任取Ⅱ的一个解 (c_1, c_2, c_3)，则有

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 = b_1 \\ (a_{21} + ka_{11})c_1 + (a_{22} + ka_{12})c_2 + (a_{23} + ka_{13})c_3 = b_2 + kb_1 \\ a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3 = b_3 \end{cases}$$

把上式中第一式乘以 $-k$ 再加到第二式上得

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3 = b_2 \\ a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3 = b_3 \end{cases}$$

由此得知(c_1,c_2,c_3)也是Ⅰ的解. 所以，Ⅰ与Ⅱ同解. 容易验证，对方程组Ⅰ做(ⅰ)或(ⅲ)型初等变换也必然得到同解方程组. 对一般的方程组(1.1.1)，验证方法完全相同.

对方程组进行消元时有一个约定：① 用上面的方程中的未知数消去下面方程中的未知数；② 一个方程中从左向右依次消去未知数. 这样，最后总是可以把方程组化为一种特殊形式：从上向下，每个方程中系数不为零的第一个未知数的下标是严格增大的. 例如，

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ \qquad x_2+x_3=2 \\ \qquad\qquad x_3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ \qquad\qquad x_3+x_4=0 \end{cases}$$

称这种形式的方程组为**阶梯形方程组**. 显然，阶梯形方程组非常便于回代过程的进行.

当未知数与方程比较多时，按例 1.1.1 的方法求解方程组，其消元过程的书写量非常大. 通过对消元过程的细心观察，我们发现方程组的初等变换只是改变了系数与常数项，而未知数、某些"+"号及"="号是不参与运算的. 这就促使人们去寻找一种消元过程的简便表示方法，使之既能反映消元的真实过程，同时又不含与变换无关的成分.

一个线性方程 $x_1-x_2+3x_3=2$ 由系数及常数项唯一确定，在约定好的前提下，可将之简记为$[1\quad -1\quad 3\quad 2]$. 同理，例 1.1.1 中给定的方程组可简记为

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

在数阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 中，每一行对应一个方程. 依此方法，我们把例 1.1.1 在消元过程中得到的三个同解方程组也分别简记为

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \end{bmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{A}}_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{A}}_3=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

不难发现，把 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的第一行乘上$\frac{1}{2}$即得 $\tilde{\boldsymbol{A}}_1$；把 $\tilde{\boldsymbol{A}}_1$ 的第一行乘上 -2 加到第二行，乘上 -3 加到第三行，即得 $\tilde{\boldsymbol{A}}_2$；把 $\tilde{\boldsymbol{A}}_2$ 的第二行与第三行互换即得 $\tilde{\boldsymbol{A}}_3$. 也就是说，通过对数阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的行做若干次变换，完全可以替代对方程组的初等变换. 这些数阵就是矩阵.

定义 1.1.1 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 构成的 m 行 n 列的矩形表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1.3}$$

称为 $m\times n$ **矩阵**,简称矩阵;矩阵(1.1.3)可简记为$[a_{ij}]_{m\times n}$. 其中,

$$a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$$

是$[a_{ij}]_{m\times n}$的第 i 行,

$$\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}$$

是$[a_{ij}]_{m\times n}$的第 j 列,因此 a_{ij}位于$[a_{ij}]_{m\times n}$的第 i 行第 j 列,称之为矩阵$[a_{ij}]_{m\times n}$的(i,j) - 元.

矩阵一般用大写黑体英文字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$表示,其元素一般用小写英文字母 $a,b,a_i,b_i,a_{ij},b_{ij},\cdots$表示. 例如,矩阵(1.1.3)可表示为 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n},\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{A}$等形式.

对线性方程组(1.1.1),令

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

分别称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 为方程组(1.1.1)的系数矩阵和增广矩阵. 显然,非齐次方程组由增广矩阵唯一确定,齐次方程组由系数矩阵唯一确定.

前面对例 1.1.1 的分析表明,方程组的三种初等变换恰对应增广矩阵的下列三种变换:

(ⅰ) 用一个非零数乘一行的全部元素;

(ⅱ) 某行全部元素乘上同一个数加到另一行对应元素上;

(ⅲ) 互换两行的位置.

我们称这三种变换为**矩阵的初等行变换**. 既然方程组的初等变换与增广矩阵的初等行变换作用等同,那么当然就可以通过对增广矩阵做初等行变换来达到消元的目的. 如此一来,求解过程的书写量将大大减少.

下面利用增广矩阵的初等行变换,重新给出例 1.1.1 的求解过程.

例 1.1.1′ 解下列线性方程组

$$\begin{cases}2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4\\2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5\\3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 7\end{cases}$$

解　写出方程组的增广矩阵

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix}2 & 2 & 2 & 4\\2 & 2 & 3 & 5\\3 & 4 & 5 & 7\end{bmatrix}$$

对 $\tilde{A}$ 作初等行变换：

$$\tilde{A} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\2 & 2 & 3 & 5\\3 & 4 & 5 & 7\end{bmatrix} \xrightarrow[R_2+(-2)R_1]{R_3+(-3)R_1} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{R_{23}} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\0 & 1 & 2 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

以最后一个矩阵为增广矩阵，得到原方程组的同解方程组

$$\begin{cases}x_1 + x_2 + x_3 = 2\\ \qquad x_2 + 2x_3 = 1\\ \qquad\qquad x_3 = 1\end{cases}$$

依次回代后即得原方程组的解(2，-1，1).

有三点需引起我们的注意：

(1) 引入变换提示符指明所用初等行变换：

cR_i：用非零数 c 乘第 i 行的全部元素；

$R_k + cR_i$：第 i 行乘以数 c 加到第 k 行上；

R_{ik}：第 i 行与第 k 行互换.

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用初等行变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$，记为 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$，但不能记为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

(3) 方程组的消元过程以阶梯形方程组为变形目标，而阶梯形方程组的增广矩阵也有阶梯的特征：

(ⅰ) 零行(元素全为零的行)在所有非零行(含有非零元的行)的下面；

(ⅱ) 随着行标的增大，每个非零行的首非零元(行中列标最小的非零元)的列标严格增大.

称这样的矩阵为**阶梯形矩阵**. 例如，

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\0 & 2 & 1 & 1\\0 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & 0 & 3 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

都是阶梯形矩阵，而

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&0\\0&2&1&1\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&2&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&1&2&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&0&1&2\\0&1&2&3\end{bmatrix}$$

都不是阶梯形矩阵. 显然,以阶梯形矩阵为增广矩阵的线性方程组一定也是阶梯形方程组. 因此,只要把增广矩阵用初等行变换化为阶梯形矩阵,即可得所求的阶梯形方程组,从而完成消元过程.

例 1.1.1′中所使用的求解方法就是所谓的 Gauss 消元法. 此方法的关键是把增广矩阵用初等行变换化为阶梯形,它的依据是方程组的初等变换不改变方程组的解集合. 对前者,我们有

定理 1.1.2 任一矩阵均可通过有限次初等行变换化为阶梯形矩阵.

证 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$,对行数 m 作数学归纳法:

当 $m=1$ 时,$\boldsymbol{A}$ 只有一行,本身即为阶梯形;

对 $m>1$,设结论对全部有 $m-1$ 行的矩阵成立;下面证明对有 m 行的矩阵,结论也成立.

考虑 $\boldsymbol{A}$ 的第一列有无非零元,若没有则考虑 $\boldsymbol{A}$ 的第二列,依此类推,直到找出一个非零元. 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{A}$ 本身即为阶梯形. 否则,可设 $\boldsymbol{A}$ 的第一列有非零元. 不妨设 $a_{11}\neq 0$,因为若 $a_{11}=0$ 而 $a_{i1}\neq 0$,则互换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 i 行即可使新矩阵的(1,1) - 元不为零. 对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow[i=2,3,\cdots,m]{R_i+\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right)R_1}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a'_{22}&\cdots&a'_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&a'_{m2}&\cdots&a'_{mn}\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}'$$

令
$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}a'_{22}&\cdots&a'_{2n}\\\vdots&&\vdots\\a'_{m2}&\cdots&a'_{mn}\end{bmatrix}$$

因 $\boldsymbol{A}_1$ 只有 $m-1$ 行,故由归纳假设知,$\boldsymbol{A}_1$ 可用初等行变换化为阶梯形 $\boldsymbol{B}_1$. 对 $\boldsymbol{A}'$ 的第 $2,3,\cdots,m$ 行作同样的初等行变换,可得

$$\boldsymbol{A}'=\begin{bmatrix}a_{11}&*\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_1\end{bmatrix}\longrightarrow\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{11}&*\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}_1\end{bmatrix}$$

显然,$\boldsymbol{B}$ 是阶梯形矩阵. 所以,$\boldsymbol{A}$ 可通过初等行变换化为阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$.

定理 1.1.1 与定理 1.1.2 为 Gauss 消元法的可行性提供了可靠的理论保证，而 Gauss 消元法不仅可用于求解线性方程组，同时还可使我们对线性方程组有更多的认识. Gauss 消元法的流程可见图 1.1.1.

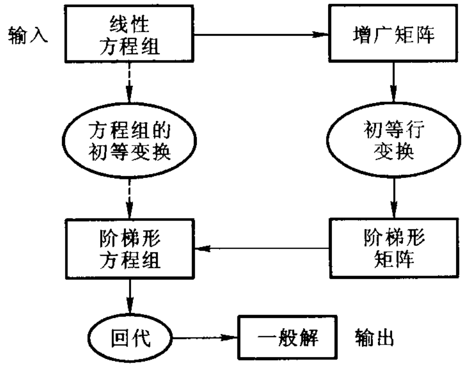

图 1.1.1

下面举两个例子说明 Gauss 消元法的用法.

例 1.1.2 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 7 \\ 7x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

解 把增广矩阵化为阶梯形

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & 10 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & 10 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2+(-2)R_1]{\substack{R_4+(-7)R_1 \\ R_3+(-3)R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{23}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4+(-1)R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4+(-1)R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

由此得阶梯形方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \quad + x_3 = 2 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 1 \\ \qquad\qquad x_3 = 1 \\ \qquad\quad 0 = -10 \end{cases}$$

显然,无论 x_1, x_2, x_3 如何取值,都无法使上述方程组中最后一个式子"$0=-10$"成立.因此,上述方程组无解,亦即原方程组无解.

称"零=非零数"这样的式子为**矛盾方程**,它一般出现在阶梯形方程组中.矛盾方程的出现即表明原方程组是不相容的.

例 1.1.3 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 5 \end{cases}$$

解

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2+(-2)R_1]{R_3+(-3)R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+(-1)R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由此得阶梯形方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ \qquad x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases} \qquad ①$$

阶梯形矩阵中的零行对应方程 $0=0$,可忽略不写.上述方程组只有两个独立方程,因此只能确定两个未知数.把 x_3, x_4 移到等号另一侧,视之为常数,得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - x_3 - x_4 \\ \qquad x_2 = -1 - 2x_3 - 3x_4 \end{cases} \qquad ②$$

令 $x_3 = k, x_4 = l$,则由上式得 $x_2 = -1-2k-3l, x_1 = 3+k+2l$.因 x_1, x_2, x_3, x_4 的取值满足②,即

$$\begin{cases} (3+k+2l) + (-1-2k-3l) = 2 - k - l \\ \qquad -1-2k-3l = -1-2k-3l \end{cases}$$

故它们也满足①,即

$$\begin{cases} (3+k+2l) + (-1-2k-3l) + k + l = 2 \\ \qquad (-1-2k-3l) + 2k + 3l = -1 \end{cases}$$

由此得

$$(3+k+2l,\ -1-2k-3l,k,l) \qquad ③$$

是阶梯形方程组①的解. 又 k 与 l 是任意两个数,故方程组①有无穷多个解.

反之,任取方程组①的一个解 (s,t,k,l),则有

$$\begin{cases} s+t\ \ +k\ \ +l=2 \\ \quad t+2k+3l=-1 \end{cases}$$

整理为②的形式得

$$\begin{cases} s+t=\ \ 2\ \ -k-l \\ \quad t=-1-2k-3l \end{cases}$$

由上式解出 $s=3+k+2l, t=-1-2k-3l$. 这说明解 (s,t,k,l) 也可由③得到. 因此,当 k 与 l 取遍所有数时,③式可给出方程组①的全部解. 所以③是方程组①的一般解. 又原方程组与①同解,故得原方程组有无穷多个解,其一般解为③.

在解③中,x_3,x_4 的值是人们自由取定的,故称它们是**自由未知数**. 为简单起见,自由未知数的取值就用其本身表示,而不再引入新符号. 因此,原方程组的一般解可表示为

$$\begin{cases} x_1=\ \ 3\ \ +x_3+2x_4 \\ x_2=-1-2x_3-3x_4 \\ x_3=\qquad\ \ x_3 \\ x_4=\qquad\qquad\ \ x_4 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x_1=\ \ 3\ \ +x_3+2x_4 \\ x_2=-1-2x_3-3x_4 \end{cases} \quad (x_3,x_4\text{ 是自由未知数})$$

例 1.1.4 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3\qquad\ +3x_5=0 \\ 2x_1-2x_2-x_3+2x_4+4x_5=0 \\ 3x_1-3x_2-x_3+4x_4+5x_5=0 \\ x_1-x_2+x_3+4x_4-x_5=0 \end{cases}$$

解 因齐次方程组常数项全为零,故消元过程只需对系数矩阵进行. 把系数矩阵化为阶梯形:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2+(-2)R_1]{\substack{R_4+(-1)R_1 \\ R_3+(-3)R_1}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$