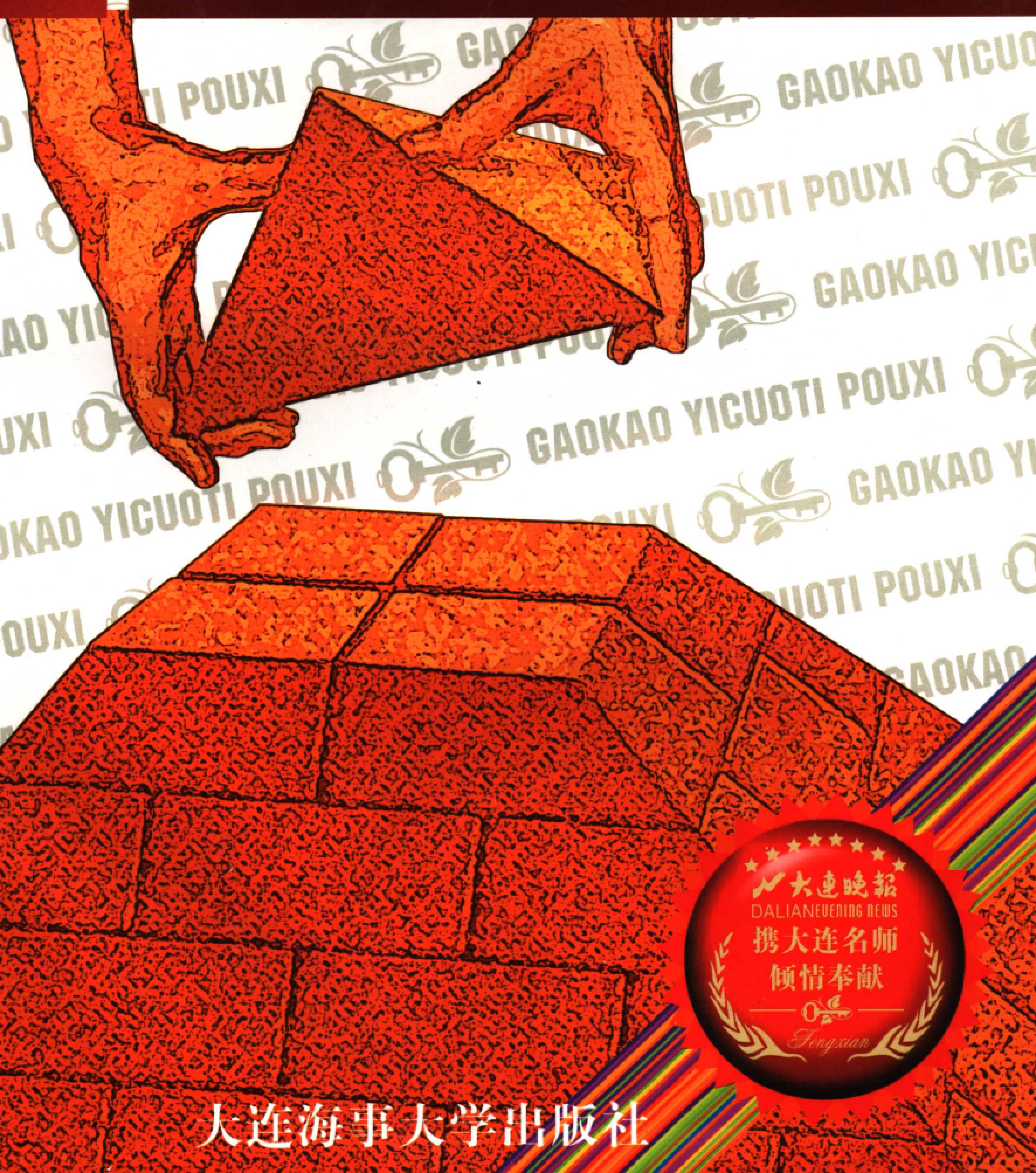
GAOKAO YICUOTI

◎独家选题◎考前必读◎备考实用

高考易错题剖析

GAOKAO YICUOTI POUXI

高三一线名师专业打造
最适合高三、高二学生备考



大连晚报
DALIANEVENING NEWS
携大连名师
倾情奉献
Fengxian

大连海事大学出版社

高考易错题剖析

李 华　梁红岩 主编

大连海事大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考易错题剖析/李华,梁红岩主编.- 大连:大连海事大学出版社,2007.4

ISBN 978-7-5632-2051-9

I.高… II.①李… ②梁… III.课程 - 高中 - 升学参考 IV.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 053033 号

大连海事大学出版社出版

地址:大连市凌海路 1 号 邮编:116026 电话:0411-84728394 传真:0411-84727996

http://www.dmupress.com E-mail: cbs@dmupress.com

大连天正华延彩色印刷有限公司印装 大连海事大学出版社发行

2007 年 5 月第 1 版 2007 年 5 月第 1 次印刷

幅面尺寸:210 mm×285 mm 印张:13.25

字数:270 千字 印数:1~5 050 册

责任编辑:如海 封面设计:云罡 排版:李红

书号:ISBN 978-7-5632-2051-9

定价:16.00 元

大连晚报社与大连市重点高中联手
献给高考学生的礼物

高三的奇妙在于它随时会产生奇迹!

到了高三，会有很多所谓的差生一鸣惊人，创造出令老师和同学们称奇的优异成绩。其原因之一就是名师的指导。

为了大连的学子成长成才,《大连晚报·大教育》专刊曾连续多年与大连市重点高中联手,请高三一线的名师为高考学生指点迷津。多年的经验让我们发现,提高分辨与避开答题“陷阱”的能力,可以保证高考时少出错、不出错,自然就能得高分。因此,《大教育》专刊自2007年1月15日起,再度与大连市重点高中联手,请高三一线名师专题剖析高考出题人设下的“陷阱”,以《大连名师剖析高考易错题》为名,陆续刊登名师们的剖析文章。

这批文章是高三老师对连续三年全国各地高考试卷的分析结果,对高二、高三考生及所有参加高考的人的复习具有明显的指导作用。《大连名师剖析高考易错题》一见报,便在高三学生和老师中产生非常好的反响。一批精明的高二考生也收集起每期的《大连名师剖析高考易错题》。一些没收集齐全的读者多次打电话给本报，希望能够购买到全套剖析读本。

报纸出版时,因版面所限,老师们的剖析文章曾被大大删节。现在,根据读者的需求,一直致力于服务读者的大连晚报社将老师的原稿合订成书,献给所有的高三、高二考生。

大连晚报的《大教育》专刊是大连市记者协会评出的“大连市名牌栏目”。自大连市记协设立此奖以来,《大教育》连续当选。为考生服务是《大教育》贯彻大连晚报编委会服务读者精神的具体体现。“好人好报,晚报情怀”是大连晚报的追求目标,广大读者支持关心晚报,晚报也一直把回报读者视为己任。每年高考前夕,《大教育》编辑部都请老师为考生讲授备考战术与策略；请考试专家指导考生填报高考志愿；请大学招生办负责人指导考生认知并选择大学……只要考生需要,《大教育》就努力去做。

据调查,大连市的高考成绩,已连续多年在辽宁省名列前茅。仅以2006年为例,高考报名为38 000人,被高等院校录取29 000余人,占高考报名人数的77.8%。其中，本科生录取为19 858人,占高考报名人数的52.4%。同时,大连考生考入北京大学、清华大学、浙江大学、复旦大学等名牌大学的比例也位居辽宁省各市首位。

大连的考生为何能取得如此骄人的成绩?究其根源，还在于大连市高中教师尤其是重点高中教师的教学功底扎实,施教水平很高,指导学生复习到位。大连市的重点高中,聚集了一批拥有丰富高考指导经验的优秀老师，他们多年来潜心研究高考出题思路，总结出丰富的具有指导性和操作性的备考经验。近几年来,大连市重点高中老师们的考前指导，特别是考前复习策略、考前解题技巧、考前模拟试题,都是我省其他城市高中学校希望得到的一手资料。一些当年参加高考成绩不理想的考生,在第二年复读时,也常会选择到大连的重点高中学习。

此次,《大连晚报·大教育》专刊邀请执笔《大连名师剖析高考易错题》的老师们,都是各重点高中的一线教师，其中部分教师连续多年奋战在高三,他们精心设计的高考答题破题方法,对高考学生具有实实在在的指导意义。

目录

数学篇

语文篇

英语篇

物理篇

化学篇

生物篇

历史篇

地理篇

政治篇

函数中几个易混易错问题的剖析

读书笔记

名师简介

李振权

大连市劳动模范，大连市第二十四中学首席教师、大连市骨干教师。辽宁省数学会数学理事，辽宁省中学竞赛委员会副主任，竞赛命题中心组成员，国家级竞赛教练员。在教学期间，曾荣获国家优质课一等奖，发表论文多篇。

定义域、值域和对应法则常被称为函数的三要素；对每一个具体的函数而言，定义域是确定的；但函数的解析式中并非都在实数集上定义函数，有时也在实数集的某一个子集上定义函数，因而产生了有关函数定义域的问题。

题目一：没有真正理解复合函数定义域的含义

例：函数$f(2^x)$的定义域为$[-1,1]$，则$y=f(\log_2 x)$的定义域为________。

错解：由题意得$-1\leq\log_2 x\leq 1$，解得定义域$\frac{1}{2}\leq x\leq 2$。

剖析：错解在于没有理解定义域的概念。复合函数的定义域应从两方面考虑。

①求任何一个函数的定义域就是求自变量x的范围（而非整体变量的范围）；

②$y=f[g(x)]$由$y=f(u)$，$u=g(x)$复合而成。外层函数$f(u)$的定义域制约着内层函数$g(x)$的值域，从而限制着x的范围。

正确解法：因为$y=f(2^x)$的定义域是$[-1,1]$，所以其内层函数$u=2^x$的值域为$[\frac{1}{2},2]$，所以函数$y=f(\log_2 x)$的内层函数$t=\log_2 x$的值域为$[\frac{1}{2},2]$，由$1/2\leq\log_2 x\leq 2$，解得$\sqrt{2}\leq x\leq 4$，即$y=f(\log_2 x)$的定义域为$x\in[\sqrt{2},4]$。

题目二：求函数的单调区间时，必须先考虑定义域

例：函数$\log_{0.5}(x^2+4x+4)$在什么区间上是增函数？

错解：因为$\log_{0.5}u$是减函数，所以当$u=x^2+4x+4$是减函数时，$\log_{0.5}(x^2+4x+4)$是增函数，而函数$u=x^2+4x+4$在区间$(-\infty,-2)$上是减函数，因而$y=\log_{0.5}(x^2+4x+4)$在区间$(-\infty,-2)$上是增函数。

剖析：没有考虑到$\log_{0.5}u$的定义域是$u>0$，在研究其增减性时没有剔除$x=-2$这个点，正确解法的答案应是$(-\infty,-2)$。

目前，在高中数学学习中，函数定义域的应用主要有以下几个方面：求函数的值域，求函数的单调区间，奇偶函数的判断，求函数的反函数，求复合函数的表达式以及函数的应用问题。

题目三:混淆反函数与反函数的函数值概念

读书笔记

例: 已知$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$,$(x\neq1)$,求$f^{-1}(\frac{1}{x})$。

错解: 由$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$,$(x\neq1)$得$f(\frac{1}{x})=\frac{x+1}{x-1}$,设$y=f(\frac{1}{x})$,即$y=\frac{x+1}{1-x}$,解得$x=\frac{y-1}{y+1}$,所以$f^{-1}(\frac{1}{x})=\frac{x-1}{1+x}$,$(x\neq1)$。

剖析: 误认为$f^{-1}(\frac{1}{x})$是函数$y=f(\frac{1}{x})$的反函数,而事实上$f^{-1}(\frac{1}{x})$表示$f^{-1}(x)$中x用$\frac{1}{x}$代替后的函数值。

正确的解法: 令$y=f^{-1}(x)$,则$y=\frac{x+1}{x-1}$,$x=\frac{y+1}{y-1}$,故$f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-1}$,$(x\neq1)$将$x$用$\frac{1}{x}$代替得$f^{-1}(\frac{1}{x})=\frac{x+1}{1-x}$,$(x\neq1)$。

题目四:没有理解抽象复合函数的奇(偶)性概念的含义

例:(1)已知函数$y=f(x)$为偶函数,则有( )。

(A) $f(x+1)=f(-x-1)$　　(B) $f(x+1)=f(-x+1)$

(2)已知函数$y=f(x+1)$为偶函数,则有( )。

(A) $f(x+1)=f(-x+1)$　　(B) $f(x+1)=f(-x-1)$

(3)已知函数$y=f(x)$为奇函数,则有( )。

(A) $f(x+1)=-f(-x-1)$　　(B) $f(x+1)=f(-x+1)$

(4)已知函数$y=f(x+1)$为奇函数,则有( )。

(A) $f(x+1)=-f(-x+1)$　　(B) $f(x+1)=f(-x-1)$

剖析: 上面四个选择题,正确答案都为(A),学生都易误选(B),原因是对奇(偶)函数的概念理解不透所致。

对奇偶性的理解,应从以下几方面着手:①定义域要关于与原点对称;②函数$y=f(x)$中的对应法则"f"是对整体变量x的作用;③对定义域中的任意x,恒有$f(-x)=f(x)$或$f(-x)=-f(x)$成立。

题目五:混淆函数的自对称与互对称关系

例:(1)设函数$y=f(x)$的定义域是R,且$f(x-1)=f(1-x)$,那么$f(x)$的图像关于______对称。

(A)$x=0$　(B)$x=1$　(C)$y=0$　(D)$y=1$

(2)设函数$y=f(x)$的定义域是R,则函数$y=f(x-1)$与$y=f(1-x)$的图像关于______对称。

(A)$x=0$　(B)$x=1$　(C)$y=0$　(D)$y=1$

剖析: 第2容易错选(A),图像的对称分为图像自身的对称和两个不同图像之间的对称。(1)中的图像是轴对称图形(自身对称),(2)题中$y=f(x-1)$与$y=f(1-x)$是两个不同函数图像的对称。

对于第1题，由于$f(x-1)=f(1-x)$，另$t=x-1$，则$-t=1-x$，所以$f(t)=f(-t)$，即$f(x)=f(-x)$，$y=f(x)$关于y轴对称，所以选（A）。

读书笔记

对于第2题，$y=f(x)$向右移1个单位得到$y=f(x-1)$，$y=f(-x)$，向右移1个单位得到$y=f(-x+1)$，因而$y=f(x)$与$y=f(-x)$关于$x=1$对称，所以选（B）。

一般地，函数$f(x)$满足$f(x+a)=f(b-x)$，则对称轴$x=\frac{a+b}{2}$；函数$y=f(x+a)$与$y=f(b-x)$的对称轴为$x=\frac{b-a}{2}$。

题目六：混淆了值域与定义域关系

例：已知函数$f(x)=\lg[3ax^2+(2a+1)x+1]$的值域为R，求$a$的取值范围。

错解：要使$f(x)=\lg[3ax^2+(2a+1)x+1]$的值域为R，则须$3ax^2+(2a+1)x+1>0$恒成立，有$a>0$且$\Delta<0$，解得$\frac{2-\sqrt{3}}{2}<a<\frac{2+\sqrt{3}}{2}$。

剖析：错误原因是把问题与命题"已知函数$f(x)=\lg[3ax^2+(2a+1)x+1]$的定义域为R，求$a$的取值范围"相混淆。一般地，对于这个问题，若定义域为R应转化为不等式$3ax^2+(2a+1)x+1>0$恒成立，值域为R应转化为$g(x)=3ax^2+(2a+1)x+1$的值域包含$(0,+\infty)$。

正确解法：要使$f(x)=\lg[3ax^2+(2a+1)x+1]$的值域为R，$g(x)=3ax^2+(2a+1)x+1$的值域包含$(0,+\infty)$，即函数值取值取遍所有正数。当$a=0$时，$y=x+1$包含$(0,+\infty)$，当$a\neq0$时，须$a>0$且$\Delta\geqslant0$，解得$0<a\leqslant\frac{2-\sqrt{3}}{2}$或$a\geqslant\frac{2+\sqrt{3}}{2}$。

题目七：混淆函数有意义与定义域概念

例：当$x\in(2,6)$时，$f(x)=\lg(-x^2+kx-12)$有意义，确定k的取值范围。

错解：函数$f(x)=\lg(-x^2+kx-12)$定义域为$(2,6)$，所以$-x^2+kx-12>0$解集为$(2,6)$，由韦达定理知$k=x_1+x_2=2+6=8$。

剖析：错误原因是函数在$(2,6)$上有意义，只需要求$(2,6)$时函数$f(x)$定义域子集即可。一般像题给出的函数有意义的范围，不一定是函数的定义域，而是函数有意义的范围的子集，要注意区分两类问题。定义域是$(2,6)$问题等价于不等式$-x^2+kx-12>0$的解集为$(2,6)$，在$(2,6)$有意义则等价于$-x^2+kx-12>0$在$(2,6)$上恒成立，进一步用图像性质、根的分布或$x\in(2,6)$时，$u(x)>0$恒成立解决问题。

正确解法：令$u(x)=-x^2+kx-12$，当$x\in(2,6)$时，$u(x)>0$恒成立，等价于$\Delta>0$，$u(2)\geqslant0$，且$u(6)\geqslant0$。解得$k\geqslant8$。

题目八：误以为函数与反函数的交点一定在直线$y=x$上

例：函数$y=\sqrt{x+1}\ (x\geqslant-1)$的图像与其反函数的图像的交点为____。

错解：把$y=x$代入$y=-\sqrt{x+1}\ (x\geqslant-1)$，解得$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$。

读书笔记

剖析：误以为函数与反函数的交点一定在直线$y=x$上。

事实上，一般函数与其反函数的图像的交点具有如下规律：

(1)原函数图像与其反函数的图像的公共点不一定都在直线$y=x$上；

(2)原函数图像与直线$y=x$的公共点一定都在反函数的图像上；反函数的图像与直线$y=x$的公共点一定都在原函数图像上；

(3)如果点（a,b）为原函数图像与其反函数的图像的公共点，那么点（b,a）为原函数的图像的公共点；

(4)若函数为单调增函数，且其图像与它的反函数的图像有公共点，则此公共点一定在直线$y=x$上。

正确解法：反函数$f^{-1}(x)=x^2-1(x\leqslant 0)$，由$\begin{cases}y=x^2-1\\y=-\sqrt{x+1}\end{cases}$

解得交点为（$0,-1$）$(-1,0)$和$(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2})$ 。

题目九：导数在函数单调性中的应用

（1）$f'(x)$在某区间D上恒大（小）于0是函数在区间D上为增（减）函数的充分不必要条件。

例：设函数$f(x)=ax^3-x^2+x-5$在区间（$-\infty,+\infty$）上单调递增，求实数a的取值范围。

错解： 因$f'(x)=3ax^2-2x+1$，由题意$y'>0$在R上恒成立，所以$\begin{cases}a>0\\\Delta=4-12a<0\end{cases}$ 解得$a>\frac{1}{3}$，即实数a的取值范围为（$\frac{1}{3},+\infty$）。

剖析：$f'(x)$在某区间D上恒大（小）于0是函数在区间D上为增（减）函数的充分不必要条件。最简单的例子如：$f(x)=x^3$在R上单调递增，$f'(x)=x^2\geqslant 0$在R上恒成立，而不是$f'(x)=3ax^2-2x+1$在R上恒成立。

正确解法：因$f'(x)=3ax^2-2x+1$，由题意$y'\geqslant 0$在R上恒成立，所以$\begin{cases}a>0\\\Delta=4-12a\end{cases}\leqslant 0$ 解得$a\geqslant\frac{1}{3}$，即实数a的取值范围为$[\frac{1}{3},+\infty$）。（即注意端点值）

（2）一个函数在某点处的导数等于0是这个函数在该点取得极值的必要不充分条件。

例：已知函数$f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$在$x=1$处的极值10，求$f(x)$。

错解：由题意得$\begin{cases}f'(1)=0\\f(1)=10\end{cases}$ 即 $\begin{cases}3+2a+b=0\\1+a+b+a^2=10\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-3\\b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=4\\b=-11\end{cases}$

于是$f(x)=x^3-3x^2+9$或$f(x)=x^3+4x^2-11x+16$

剖析："一个可导函数在某点处的导数等于0" 只是这个函数在该点取得极值的必要条件。最简单的例子如：函数$f(x)=x^3$在$x=0$处的导数$f'(0)=0$，但$f(0)=0$并不是函数$f(x)=-x^3$的极值，一个可导函数在某点处的导

数等于0而且在该点两侧导数异号，进一步检验可发现：当$f(x)=x^3-3x^2+3x+9$时，$f'(x)=3(x-1)^2$这时尽管$f'(1)=0$，但在$x=1$的左右两侧的导数符号相同（都为正），因此$x=1$就不是函数$f(x)=x^3-3x^2+3x+9$的极值点。

读书笔记

相反可以验证$f(x)=x^3+4x^2-11x+16$符合题意。

题目十：利用函数图像解题时忽视“临界线”

例：判断函数$f(x)=x+\frac{1}{x}$图像与直线$y=\frac{x}{2}$交点的个数。

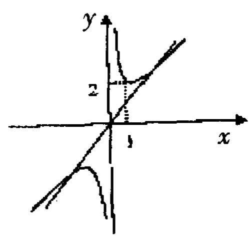


图1

剖析：拿到此题，许多同学立刻在同一坐标系中做出函数$f(x)=x+\frac{1}{x}$与直线$y=\frac{x}{2}$的图像，如图1所示，易知两图像交点个数为2。

事实上，$x>0$时，$f(x)=x+\frac{1}{x}>x$，函数$f(x)=x+\frac{1}{x}$的图像恒在直线$y=x$上方，且$x\to+\infty$时，$f(x)\to x$，即$y=x$为函数$y=f(x)$的一条渐近线。

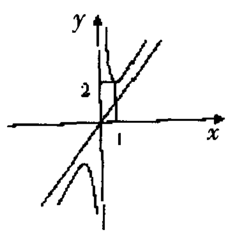


图2

正确作图应如图2所示，两图像的交点个数为0。

图2中“临界线”直线$x=0$及直线$y=x$起到定性、定形、定量的作用。常见函数图像中有临界线的函数有：$y=\log_a x$的临界线为y轴；$y=a^x$的临界线为x轴；$f(x)=\frac{1}{x}$的临界线为坐标轴；双曲线的临界线为其渐近线；

椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的临界线为$x=\pm a$，$y=\pm b$。

读书笔记

三角函数及平面向量部分常见错误

名师简介

李少锋

大连第十二中学数学教研组长，高级教师，学校首席教师，大连市骨干教师，大连市教育学院兼职教研员，辽宁省数学竞赛优秀指导教师。

三角函数部分常见错误

三角函数部分在高考中占有一定地位，虽然难度不会太大，但是在解题过程中稍有不慎就会出现疏漏，且不易察觉，下面就同学们易犯错误的问题剖析如下：

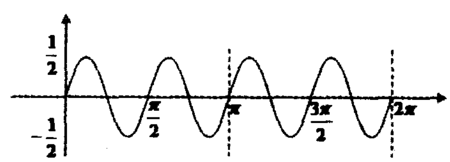
问题一：忽视定义域例

例1：求函数$y=\dfrac{2\cos 2x\tan x}{1+\tan^2 x}$的最小正周期。

错解：原式可化为$y=\sin 2x\cos 2x=\dfrac{1}{2}\sin 4x$　所以 $T=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$。

剖析：求三角函数的周期时应注意定义域是否改变，原函数定义域为$\{x\,|\,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，化简后的函数定义域为**R**，两函数的定义域不同导致出错。

正解：原式可化为$y=\dfrac{1}{2}\sin 4x$，定义域为$\{x\,|\,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，故可得函数图像（右图）：由图像可知，此函数的最小正周期为π。



当两个函数定义域不同时，它们不是同一函数，要确定函数的最小正周期，可结合图像进行考查。

问题二：忽视隐含条件

例2：已知$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{5}$，$\theta\in(0,\pi)$，则$\tan\theta=$________

错解一：由题设的$\sin\theta=\dfrac{1}{5}-\cos\theta$，两边平方，整理得

$\cos^2\theta-\dfrac{1}{5}\cos\theta-\dfrac{12}{25}=0$，解得$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$或$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$，再利用已知等式求得$\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$ 或$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，从而得$\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$ 或$\tan\theta=-\dfrac{4}{3}$ 。

错解二：将已知等式平方得$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{25}$，即$\sin 2\theta=-\dfrac{24}{25}$。

又$\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$，则$12\tan^2\theta+25\tan\theta+12=0$，解得$\tan\theta=-\frac{3}{4}$或$\tan\theta=-\frac{4}{3}$。

读书笔记

剖析：以上解法都忽视了$\sin\theta>0$的隐含条件，在错解一中，求出$\sin\theta=-\frac{3}{5}$，可直接舍去。在错解二中，平方后$2\sin\theta\cos\theta=-\frac{24}{25}<0$，注意到$\sin\theta>0$，所以$\cos\theta<0$，从而$\sin\theta-\cos\theta>0$（隐含条件）。再由$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{49}{25}$，求得$\sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5}$，再与已知条件联立，可求得$\sin\theta=\frac{4}{5}$，$\cos\theta=-\frac{3}{5}$，从而$\tan\theta=-\frac{4}{3}$。

本题也可以构造等差数列求解：由已知$\sin\theta$，$\frac{1}{10}$，$\cos\theta$成等差数列，设公差为d，则$\sin\theta=\frac{1}{10}-d$，$\cos\theta=\frac{1}{10}+d$，由$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，求得$d^2=\frac{49}{100}$，所以$d=\pm\frac{7}{10}$，注意到$\sin\theta>0$的隐含条件，可知$d=-\frac{7}{10}$，从而$\sin\theta=\frac{4}{5}$，$\cos\theta=-\frac{3}{5}$，故$\tan\theta=-\frac{4}{3}$。

问题三：忽视三角函数问题相关性

例3：已知$\sin x+\cos y=\frac{1}{3}$，求$\sin y-\cos^2x$的最大值。

错解：由$\sin x+\sin y=\frac{1}{3}$，得$\sin y=\frac{1}{3}-\sin x$，所以$\sin y-\cos^2x=\frac{1}{3}-\sin x-\cos^2x=\frac{1}{3}-\sin x+\sin^2x-1=(\sin x-\frac{1}{2})^2-\frac{11}{12}$，因为$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，所以当$\sin x=-1$时，$\sin y-\cos^2x$取最大值$\frac{4}{3}$。

剖析：考虑了$\sin x$的有界性，但没有考虑到$\sin x$与$\sin y$的相关性。

正解：因为$\sin x+\sin y=\frac{1}{3}$，所以$\sin y=\frac{1}{3}-\sin x$，又因为$-1\leqslant\sin y\leqslant 1$，故$-\frac{2}{3}\leqslant\sin y\leqslant 1$，所以$\sin y-\cos^2x=(\sin x-\frac{1}{2})^2-\frac{11}{12}$，则当$\sin x=-\frac{2}{3}$时，$\sin y-\cos^2x$取得最大值$\frac{4}{9}$。

问题四：忽视多值问题的取舍

例4：若$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，且$\alpha$，$\beta$为锐角，求$\alpha+\beta$的值。

错解：由α，β为锐角，得$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，则$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，由$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，

得$0<\alpha+\beta<\pi$　所以$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$　或$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$

读书笔记

剖析:题设中的具体数值及角的范围使角的值唯一确定,最后的答案应唯一,由$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}<\frac{1}{2}$,$\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}<\frac{1}{2}$,得$0<\alpha<\frac{\pi}{6}$,$0<\beta<\frac{\pi}{6}$,则$0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{3}$,故$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

平面向量部分常见错误

平面向量因具有一套优良的运算体系而得以广泛应用，成为解决许多数学问题的有力工具。但是不少同学受实数体系影响,在解答向量问题时易陷入误区。下面对平面向量易错点进行分类剖析。

问题一:混淆向量运算与实数运算

例1:设$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$是任意的非零平面向量,且相互不共线,则下列命题:①$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}=0$,②$\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|<\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$;③$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}\Rightarrow\vec{b}=\vec{c}$中,真命题的序号是______

错解:真命题的序号是①②③

剖析:错因是套用实数运算法则,对于①,$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$是实数$\vec{a}\cdot\vec{b}$与向量$\vec{c}$的积,它是一个与$\vec{c}$共线的向量,而$(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$是一个与$\vec{b}$共线的向量,在一般情况下它们是不相等的,即向量数量积对乘法结合律不成立,故①假;对于③,套用实数乘法运算律致错;由$\vec{a}$,$\vec{b}$非零不共线知②真,应填②。

问题二:向量平移概念不清

1. 混淆向量平移与点平移。

向量平移后向量的起点与终点的位置改变，因而向量起点和终点坐标改变,但向量的坐标不随平移而改变。

例2:向量$\vec{a}=(3,4)$,按向量$\vec{b}=(-2,1)$平移后的坐标是______。

答案应该是$(3,4)$,而不是$(1,5)$。

2. 混淆函数图像平移与向量平移

在函数中,函数$y=f(x+a)(a>0)$的图像是把函数$y=f(x)$的图像向左平移a个单位,函数$y=f(x)+b\,(b>0)$的图像是把函数$y=f(x)$的图像向上平移b个单位,而向量$\vec{a}=(x+a,y+b)$是把向量$\vec{b}=(x,y)$按向量$\vec{m}=(a,b)$平移。

问题三:忽视特殊性致错

例3:已知$\vec{a}=(\lambda,2)$,$\vec{b}=(2,-4)$,且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为钝角,求实数λ的取值范围。

读书笔记

错解:设$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ,则θ为钝角,$\cos\theta=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}<0$,

又$|\vec{a}|$,$|\vec{b}|>0$,所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\lambda-8<0$解得$\lambda<4$。

剖析:由$\cos\theta<0$,不能推出$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为钝角,错因是不等价变形所致。

正解:由题设,得$\cos\theta<0$且$\cos\theta\neq-1$,即$\theta\neq\pi$,$\vec{a}$与$\vec{b}$反向时不满足条件。当$\vec{a}$与$\vec{b}$反向时,令$\vec{a}=k\vec{b}$,得$(\lambda,2)=(2k,-4k)$,解得$\lambda=-1$,结合错解得λ的取值范围是$(-\infty,-1)\cup(-1,4)$。

问题四:混淆夹角概念致错

例4:已知等边$\triangle ABC$的边长为4,求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$的值。

错解:$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos B=4\times4\times\cos\frac{\pi}{3}=8$。

剖析:两个向量的夹角是平面上同一起点表示向量的两个有向线段的夹角,其范围为$[0,\pi)$。此题混淆了两条直线夹角与两个向量夹角的概念,误把角B视为向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角。

正解:$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos B=-4\times4\times\cos\frac{\pi}{3}=-8$。

问题五:忽视零向量方向的任意性

例5:判断下列命题的真假:

①若$\vec{a}/\!/\vec{b}$,$\vec{b}/\!/\vec{c}$,则$\vec{a}/\!/\vec{c}$;②若$\vec{a}\perp\vec{b}$,$\vec{b}\perp\vec{c}$,则$\vec{a}\perp\vec{c}$;③若$\vec{a}$与$\vec{b}$共线,则存在一个实数λ,使$\vec{b}=\lambda\vec{a}$成立;④与向量$\vec{a}$平行的单位向量有2个。

剖析:由于零向量的方向是任意的,因此它与任何向量共线,也与任何向量垂直,判断上述命题真假时易忽视造成错误的判断。

当$\vec{b}=\vec{0}$时,显然①、②都是假命题;对于③,当$\vec{a}=\vec{0}$,$\vec{b}\neq0$时,λ不存在;对于④,当$\vec{a}=\vec{0}$时,有无数个与其平行的单位向量,故④也是假命题。

读书笔记

解析几何几个易错问题剖析

名师简介

李洪岩

高中数学特级教师，现任大连市第八中学数学教研组组长，辽宁省教材编审委员会委员，辽宁省数学会理事，辽宁省首批骨干教师，大连市高中数学学科带头人，全国高中数学联赛优秀教练员，大连市劳动模范，大连市高中数学兼职教研员，大连市数学名师工作室理事。

问题一：审题不仔细，忽略已知条件

例：设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(0<a<b)$的半焦距为$c$，直线l过$(a,0),(0,b)$，已知原点到l的距离为$\frac{\sqrt{3}}{4}c$，则双曲线的离心率为______。

错解（简略）：由题意写出直线l 的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，由点到直线距离公式可知$\frac{\sqrt{3}}{4}c=ab$，$\therefore 3c^4-14a^2c^2+16a^4=0$，$\therefore 3e^4-14e^2+16=0$，

$\therefore e^2=4$或$e^2=\frac{4}{3}$，　$\therefore e=2$ 或 $e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$。

剖析：错解在于没有认真仔细的审题，忽略已知$0<a<b$这一条件。

正解：由题意写出直线l的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，由点到直线距离公式可知，$\frac{\sqrt{3}}{4}c=ab$，$\therefore 3c^4-14a^2c^2+16a^4=0$，$\therefore 3e^4-14e^2+16=0$，　$\therefore e^2=4$或$e^2=\frac{4}{3}$，$\therefore e=2$或$e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$\because a<b$　$\therefore a<\sqrt{c^2-a^2}$ $\therefore c^2>2a^2 \rightarrow e>\sqrt{2}$ $\therefore e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$舍去，$\therefore e=2$。

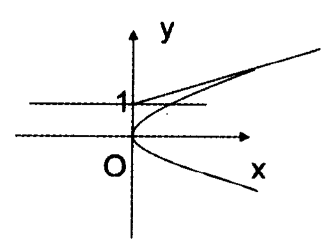
问题二：考虑不周，造成错误

例：求过$(0,1)$ 点的直线使它与抛物线$y^2=2x$仅有一个交点。

错解：设过$(0,1)$点直线方程为$y=kx+1$，代入$y^2=2x$中得

$k^2x^2+(2k-2)x+1=0$，$\because \Delta=0$，$\therefore k=\frac{1}{2}$

$\therefore$所求直线方程为：$y=\frac{1}{2}x+1$



剖析：错解在于①未考虑k不存在的情况；②“一个交点”包括相切、相交两种情况，上述解未考虑相交情况；③当$k\neq0$时才可以用判别式Δ。

读书笔记

正解（简略）：画草图一目了然，所以做解析几何题要养成画草图的习惯。

$\therefore$所求直线方程为：$y=1$或$x=0$或$y=\frac{1}{2}x+1$。

问题三：忽略用“点差法”的注意事项

例：已知双曲线$x^2-\frac{y^2}{2}=1$，过点$B(1,1)$是否存在直线l，使l与双曲线交于P、Q两点且点B是弦PQ的中点。若存在，求出 l 的方程；若不存在，说明理由。

错解：假设存在满足题意的直线。

设$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$，　则$\begin{cases}x_1^2-\frac{y_1^2}{2}=1\\x_2^2-\frac{y_2^2}{2}=1\end{cases}$

两式相减得$(x_1-x_2)(x_1+x_2)-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{2}=0$，

$\because\frac{x_1+x_2}{2}=1,\frac{y_1+y_2}{2}=1$，　$\therefore\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$，

$\therefore l$的方程为$y-1=2(x-1)$，即$2x-y-1=0$。

剖析：忽略了用“点差法”最后要用“Δ”来检验。

正解（简略）：$\because\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{2}=1\\2x-y-1=0\end{cases}\rightarrow 2x^2-4x+3=0$，$\therefore\Delta=16-24<0$，

$\therefore$不存在这样的直线。

问题四：忽略直线倾斜角取值范围

例：若直线l_1,l_2的倾斜角分别为α,β，斜率分别为k_1,k_2，且$k_1k_2=1$，则$\alpha+\beta=$______。

错解：$\because k_1=\tan\alpha,k_2=\tan\beta$，$\therefore\tan\alpha\cdot\tan\beta=1$，

即$\tan\alpha=\cot\beta=\tan(\frac{\pi}{2}-\beta)$，　$\therefore\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$。

剖析：错解原因在于忽略了α,β的取值范围$[0,\pi]$，

且当$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$时，$k\geqslant0$；当$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$时，$k<0$。

正解（简略）：①当$k_1>0,k_2>0$时，同上得$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$。

②当$k_1<0,k_2<0$时，$\alpha,\beta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$\tan\alpha=\cot\beta=\tan(\frac{3\pi}{2}-\beta)$，

$\therefore\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$。