2007 第4版

全国各类成人高考复习指导丛书

专升本入学考试指导

高等数学（二）

全国各类成人高考复习指导丛书编委会 编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

全国各类成人高考复习指导丛书

专升本入学考试指导

高等数学(二)

第4版

全国各类成人高考复习指导丛书编委会 编

机械工业出版社

本书严格按照最新《考试大纲》规定的考试内容和要求，并针对成人考生的特点，精心设计了"考试知识要点"、"典型例题分析"和"历年考试题型及分析"等几个模块. 各章的"基本要求"和"考试知识要点"凸显了考试的重点和难点；概念和公式的"结构式"使这些知识的学习和理解变得简单；典型例题的分析有助于提高考生分析问题的能力和解题的能力；"历年考试题型及分析"总结了试卷中可能出现的各种题型，使考生能有效地掌握考试的主要内容和试题的类型，从而使复习更具针对性.

图书在版编目（CIP）数据

专升本入学考试指导. 高等数学（二）/全国各类成人高考复习指导丛书编委会编 .—4 版. —北京：机械工业出版社，2007.4
（全国各类成人高考复习指导丛书）
ISBN 978-7-111-14117-4

Ⅰ. 专… Ⅱ. 全… Ⅲ. 高等数学 - 成人教育：高等教育 - 升学参考资料. Ⅳ. G724.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 058531 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：于　宁　边　萌　　责任编辑：李秀玲
封面设计：鞠　杨　　责任印制：洪汉军
北京振兴源印务有限公司印刷厂印刷
2007 年 5 月第 4 版 · 第 1 次印刷
184mm × 260mm · 14.25 印张 · 349 千字
0001—5000 册
标准书号：ISBN 978-7-111-14117-4
定价：21.00 元

前　言

由于成人高校招生全国统一考试改为每年的10月中旬进行，随着考生人数的增加和考生群体水平的提高，成招竞争的激烈程度比全国普通高校招生考试有过之而无不及！因此为广大专升本考生提供一本既有实用性更具针对性的考试辅导书是非常必要的！我们认真研究了2006年新版《考试大纲》(2007年《考试大纲》未变)以及1994～2006年的全部专升本试题，严格按照《考试大纲》规定的考试内容和考试要求，并针对成人考生的特点编写了这本通俗易懂、容易理解和掌握的考试辅导书. 它与其他辅导书的不同之处在于：

1. 各章的"基本要求"和"考试知识要点"凸显了考试的重点和难点

根据考试大纲的要求并结合13年的试卷分析，总结了各章的"基本要求"和"考试知识要点". 它们充分凸显了考试所要求的主要内容、考试的重点和难点. 抓住这些进行有针对性的复习，定能事半功倍！

2. 概念和公式的"结构式"使这些知识的学习变得简单，既容易理解又更容易掌握

基本概念和基本运算公式是正确理解和掌握高等数学(二)的关键！本书以更具普遍意义的"结构式"简化了对概念的理解和运算公式的掌握，是快速掌握知识的有效方法. 很受成人考生的青睐！

3. 典型例题的分析有助于提高考生分析问题的能力和解题的能力

书中对典型例题的详尽分析，使考生能较好地掌握如何利用已知条件，怎样进行分析，又如何解题，解题过程中容易出现的错误是什么等等. 通过这些使考生学会分析问题的方法，提高解题能力，使整体水平更上一层楼！

4. "历年考试题型及分析"总结了试卷中可能出现的各种题型，使考生能有效地掌握考试的主要内容和试题的类型，从而使复习更具针对性

我们将13年试卷中的所有试题分类、归纳成各种不同类型的题型，它们基本上包含了专升本高等数学(二)中可能出现的题型. 读者只需将每一类题目考查的知识点和解题方法熟练掌握，必能在考试中应付自如，而无需花费大量的时间去做很多考试中根本不可能出现的题目！书中还指出了**每年必考**的许多题型，从而使读者的复习更加重点突出和更具针对性.

由于编写时间仓促，不当之处还望专家及广大读者提出宝贵的意见！

编　者

目　录

第一章　函数、极限和连续

第一节　函　　数

专升本的考试大纲中已删去函数这一节的全部内容，这意味着在专升本的试卷中将不会单独考有关函数概念及性质的试题. 但是，由于后面的内容经常涉及到这部分知识，为此，我们仍将函数的相关内容编写在第一节，以便读者学习.

(一) 函数概念

1. 函数的定义

定义　设在某个变化过程中有两个变量 x 和 y，变量 y 随变量 x 的变化而变化. 如果变量 x 在实数集合 D 中取每一数值时，变量 y 依照某一规律 f 都有一个确定的数值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记为

$$y=f(x)$$

其中 x 叫自变量，y 叫因变量或函数.

有时为了表示几个不同的函数，还可以用 $\varphi(x)$，$g(x)$，$F(x)$等来表示函数. 函数关系也可记作 $y=y(x)$，此时等号左边的 y 表示函数，右边的 y 表示对应规则.

在上述函数的定义中，很重要的一点是：自变量 x 在 D 上取每一数值时，函数 y 都有确定的数值与之对应，此时我们称函数是有定义的.

定义域　在数轴上使函数 f 有定义的自变量的取值范围 D，称为函数的定义域，记为 $D(f)$.

值域　函数 y 的取值范围，称为函数的值域，记为 $Z(f)$.

当自变量 x 取某一个定值 a 时，函数 $y=f(x)$的对应值记为 $f(a)$，有时也记为$y|_{x=a}$.

2. 函数的表示法

常用的函数表示法有三种：解析法、表格法和图示法.

(1) 解析法　对自变量和常数施加四则运算、乘幂、指数运算、取对数、取三角函数等数学运算所得到的式子称为解析表达式. 用解析表达式表示一个函数就称为函数的解析法，也叫公式法. 高等数学中讨论的函数，大多由解析法表示，这是因为对解析式子可以进行各种运算，便于研究函数的性质.

(2) 表格法　在实际应用中，常把自变量所取的值和对应的函数值列成表，用以表示函数关系，函数的这种表示法称为表格法. 例如，我们所用的各种数学用表——平方表、立方表、对数表、三角函数表等，都是用表格法表示的函数关系. 在研究社会经济现象时，常采用表格法.

(3) 图示法　设 $y=f(x)$是一个给定的函数，定义域是 $D(f)$. 由于自变量和函数都取实数值，因而我们可以在平面上取定一个直角坐标系 Oxy，用 x 轴上的点表示自变量的值，用 y 轴上的点表示函数值. 于是，在 $D(f)$内的每一个自变量的值 x 及相应的函数值 $f(x)$就确定了该平面直角坐标系中的一个点 $P(x,y)$，当 x 在 $D(f)$内变动时，点 P 便在坐标平面上移动，一般会得到平面上的一条曲线，这就是用图示法表示函数.

函数的三种表示法各有优缺点，在具体应用时，通常是三种方法配合使用.

3. 函数的图像

用图示法表示函数所得到的曲线，就称为函数的图像.用图像表示函数，使我们有可能借助于几何图形，形象直观地研究事物的运动变化过程，它对于理解高等数学中的概念、方法和结论是十分重要的.

(二) 显函数、分段函数、隐函数

(1) 显函数　函数关系用解析式 $y=f(x)$表示的称为显函数，如 $y=x^2\sin x$，$y=\sqrt{\ln x}$等等.

(2) 分段函数　有时还要考察这样的函数，对于其定义域内自变量 x 的不同值，函数不能用一个统一的公式表示，而要用两个或两个以上的公式来表示.这类函数称为“分段函数”.

例如，$y=|x|$就是一个分段函数，因为它可以写成：

$$y=|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\geqslant 0\end{cases}$$

当 $x<0$ 时，用公式 $y=-x$ 来表示；当 $x\geqslant0$ 时，用公式 $y=x$ 来表示.这个函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

关于分段函数，要注意以下几点：

1) 分段函数是用几个公式合起来表示一个函数，而不是表示几个函数.

2) 因为函数式子是分段表示的，所以各段的定义域必须明确标出.

3) 对分段函数求函数值时，不同点的函数值应代入相应范围的公式中去求.

4) 分段函数的定义域是各项定义域的并集.

(3) 隐函数　前面所讲的形如 $y=f(x)$的函数，一般称为显函数.其特点是因变量 y 单独地在等号的一边(左边)，而另一边(右边)则仅仅是自变量 x 的表达式 $f(x)$.此外，还有一类函数，称为隐函数.

定义　凡能够由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数关系，称为隐函数.

例如

$$x^2+y^2-1=0$$

就是一个隐函数.因为在这个方程中，函数 y 没有用仅含自变量 x 的公式 $f(x)$表示出来.不过若由它解出

$$y=\sqrt{1-x^2}\qquad -1\leqslant x\leqslant 1$$

或

$$y=-\sqrt{1-x^2}\qquad -1\leqslant x\leqslant 1$$

它就变成了两个显函数(称每一个显函数为一个单值分支，前一支表示上半圆，后一支表示下半圆)，并称该隐函数为二值函数(多值函数的一种).

要注意的是：并非所有隐函数都可以解成显函数.例如方程 $e^{xy}-x^2-xy-1=0$ 就不能解成显函数.

(三) 函数的简单性质

1. 函数的单调性

定义　设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义，如果对于(a,b)内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在(a,b)内是单调增加的；如果当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$在(a,b)内是严格单调增加的.

如果对于(a,b)内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在(a,b)内是单调减少的；如果当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$在(a,b)内是严格单调减少的.

注意：单调性是对一个区间而不是对一个点来讲的.单调函数必须指出它的单调区间.例如，函数 $y=x^2$ 在区间$(0,+\infty)$内是单调增加的，在区间$(-\infty,0)$内是单调减少的，而在区间$(-\infty,+\infty)$内不是单调的.

2. 函数的奇偶性

定义　如果对于函数 $y=f(x)$定义域中的任一点 x，恒有

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $f(x)$为偶函数.

如果对于定义域中的任一点 x，恒有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称 $f(x)$为奇函数.

注意：很多函数是没有奇偶性的，切不可认为任何函数都具有奇偶性.例如 $y=x^2+\sin x$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

3. 函数的有界性

定义　设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义，如果存在一个正数 M，使得对于(a,b)内的任意一点 x，总有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$在(a,b)内是有界的，否则，称 $f(x)$在(a,b)内是无界的.

4. 函数的周期性

定义　对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个不为零的常数 T，使得关系式 $f(x+T)=f(x)$对于$(-\infty,+\infty)$内的任何 x 都成立，则称 $f(x)$为周期函数，称满足这个等式的最小正数 T 为函数的周期.

例如 $y=\sin x$ 就是一个周期函数，周期 $T=2\pi$.

(四) 反函数

定义　设已知函数为

$$y=f(x) \tag{1}$$

如果由此解出的

$$x=\varphi(y) \tag{2}$$

是一个函数，则称它为 $f(x)$的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，并称 $f(x)$为直接函数.

由于习惯上往往用字母 x 表示自变量，而用字母 y 表示函数，为了与习惯一致，通常将(2)式中的自变量 y 改写成 x，而将函数 x 改写成 y，于是(1)式的反函数就变为

$$y=\varphi(x) \tag{3}$$

记为 $y=f^{-1}(x)$.

当然我们也可以说 $y=f(x)$是 $y=f^{-1}(x)$的反函数，也就是说它们互为反函数.

注意：函数 $x=\varphi(y)$与 $y=\varphi(x)$是同一个函数，所以当 $x=\varphi(y)$是 $y=f(x)$的反函数时，$y=\varphi(x)$也是 $y=f(x)$的反函数.

明确了反函数的定义之后，还应知道：在什么条件下直接函数 $y=f(x)$有反函数存在？

以下的反函数存在定理可以回答这个问题.

定理　如果函数

$$y=f(x),D(f)=X,Z(f)=Y$$

是严格单调增加(或减少)的，则它必定存在反函数

$$x=\varphi(y),D(\varphi)=Y,Z(\varphi)=X$$

并且也是严格单调增加(或减少)的.

求反函数的步骤：

第一步：从直接函数 $y=f(x)$ 中解出

$$x=\varphi(y)$$

看它是否能成为函数；

第二步：如果 $x=\varphi(y)$ 是函数，将字母 x 换成 y，将字母 y 换成 x，得　$y=\varphi(x)$

这就是 $y=f(x)$ 的反函数.

结论：

(1) 直接函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形，必定对称于直线 $y=x$(一般地，二者是不同的函数，其图形是不同的曲线)；

(2) 直接函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 是同一条曲线(二者是不同的函数，但是，它们的图形是同一条曲线).

根据这个结论，当我们知道了直接函数 $y=f(x)$ 的图形之后，就可以利用对称于直线 $y=x$ 的性质画出其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形；但若要画反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形，则就是直接函数 $y=f(x)$ 的图形.

(五) 基本初等函数

1. 常数

$$y=c$$

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，图形是一条平行于 x 轴的直线，显然这是个偶函数.

2. 幂函数

$$y=x^{\mu}\quad(\mu \text{ 为实数})$$

它的定义域随 μ 值的不同而不同，但不管 μ 的值是多少，它在$(0,+\infty)$内总是有定义的.

当 $\mu>0$ 时，它的图形如图 1-1 所示，不论 μ 为何值，它的图形都通过原点$(0,0)$和点$(1,1)$，在$(0,+\infty)$内严格单调增加且无界.

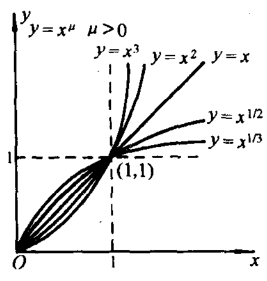

图　1-1

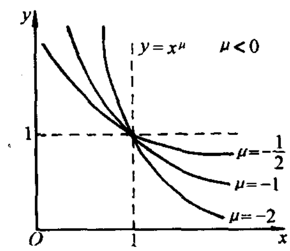

图　1-2

当 $\mu<0$ 时，它的图形如图 1-2 所示，在$(0,+\infty)$内严格单调减少且无界，曲线以 x 轴和 y 轴为渐近线，都通过点$(1,1)$.

3. 指数函数

$$y=a^{x}\quad(a>0,a\neq1)$$

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，由于不论 x 为何值，总有 $a^{x}>0$，且 $a^{0}=1$，所以它的图形总是在 x 轴的上方，且通过点$(0,1)$.

当 $a>1$ 时，函数严格单调增加且无界，曲线以 x 轴的负半轴为渐近线；

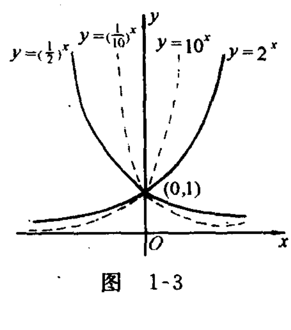

图　1-3

当 $0<a<1$ 时，函数严格单调减少且无界，曲线以 x 轴的正半轴为渐近线，如图 1-3 所示.

以无理数 $e=2.718\ 281\ 8\cdots$ 为底的指数函数 $y=e^x$ 是微积分中常用的指数函数.

4. 对数函数

$$y=\log_a x \quad (a>0, a\neq 1)$$

它的定义域为 $(0,+\infty)$，不论 a 为何值，对数曲线都通过点 $(1,0)$.

当 $a>1$ 时，函数严格单调增加且无界，曲线以 y 轴的负半轴为渐近线；

当 $0<a<1$ 时，函数严格单调减少且无界，曲线以 y 轴的正半轴为渐近线，如图 1-4 所示.

以无理数 e 为底的对数函数　$y=\log_e x$

叫自然对数，简记作　　$y=\ln x$

自然对数在微积分中是常用的.

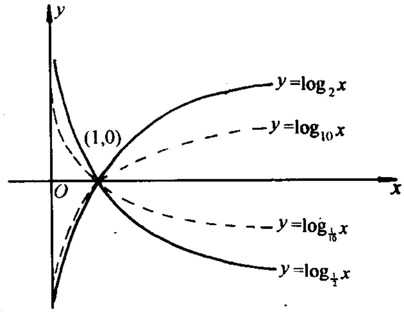

图　1-4

5. 三角函数

常用的三角函数有以下四个：

$$y=\sin x \quad y=\cos x \quad y=\tan x$$
$$y=\cot x$$

在微积分中，三角函数的自变量 x 一律以"弧度"为单位. 例如 $x=1$，就表示 x 等于 1 个弧度($57°17'44.8''$).

函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，是奇函数，且是周期等于 2π 的周期函数，其图形如图 1-5 所示.

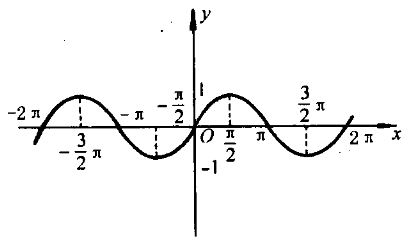

图　1-5

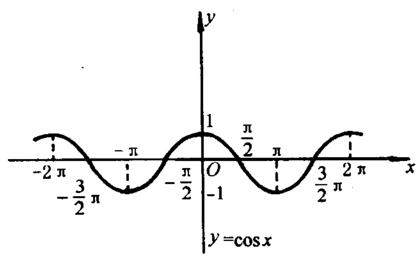

图　1-6

函数 $y=\cos x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，是偶函数，且是周期等于 2π 的周期函数，其图形如图 1-6 所示.

因为 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，所以它们都是有界函数.

函数 $y=\tan x$ 的定义域是除去点 $x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 后的其他实数. 它是奇函数，且是周期为 π 的周期函数，其图形如图 1-7 所示.

函数 $y=\cot x$ 的定义域是除去点 $x=k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 后的其他实数. 它也是奇函数，且是周期为 π 的周期函数，其图形如图 1-8 所示.

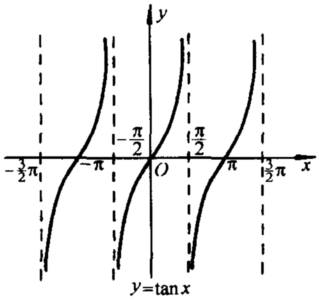

图 1-7

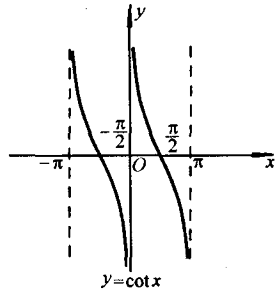

图 1-8

6. 反三角函数

常见的反三角函数有以下四个：

$$y=\arcsin x \qquad y=\arccos x$$
$$y=\arctan x \qquad y=\operatorname{arccot} x$$

它们是作为相应三角函数的反函数定义出来的. 由于 $y=\sin x, y=\cos x$ 在定义域内不单调，它们的反函数不唯一，所以对于 $y=\sin x$，只考虑 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，对于 $y=\cos x$，只考虑 $x\in[0,\pi]$，以使它们单调，并使其反函数存在. 此时我们称反正弦和反余弦取主值，即 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$，它们的图形分别为图 1-9 和图 1-10 中的实线部分.

$y=\arcsin x$ 和 $y=\arccos x$ 的定义域都是$[-1,1]$.

同理，对于反正切函数 $y=\arctan x$，也取主值$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，即 $-\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2}$，对于反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 取主值$(0,\pi)$，即 $0<\operatorname{arccot} x<\pi$，它们的定义域均为$(-\infty,+\infty)$，它们的图形分别为图 1-11 和图 1-12 中的实线部分.

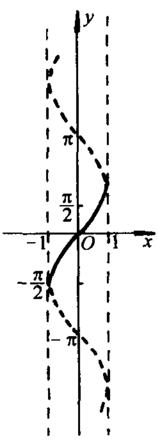

图 1-9

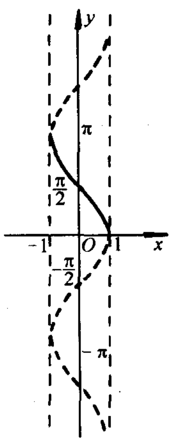

图 1-10

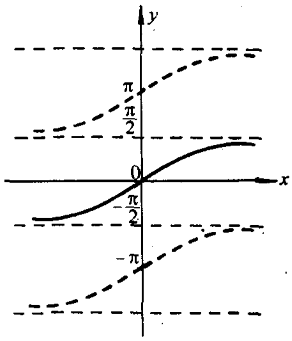

图 1-11

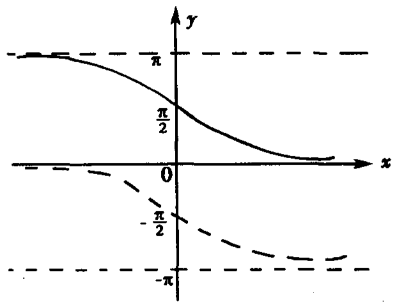

图 1-12

(六) 复合函数与初等函数

1. 复合函数

定义：设 y 是 u 的函数 $\qquad y=f(u)$

而 u 又是 x 的函数
$$u=\varphi(x)$$
又设 X 表示函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域的一个子集，如果对于 X 上的每一个取值 x 所对应的 u 值，函数 $y=f(u)$ 有定义，则 y 通过 $u=\varphi(x)$ 而成为 x 的函数，记为
$$y=f[\varphi(x)]$$
这个函数叫做由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，它的定义域为 X，u 叫做中间变量.

所以复合函数实际就是将中间变量代入后所构成的函数.

注意：不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的，例如 $y=\arcsin u$ 及 $u=x^2+3$ 就不能复合成一个复合函数. 因为对于 $u=x^2+3$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内的任何值 x 所对应的 u 值（都大于或等于 3），$y=\arcsin u$ 都没有定义.

复合函数不仅可以有一个中间变量，还可以有更多的中间变量，如 u,v,w,t 等等.

在求函数的导数时，我们往往要反过来考虑问题. 即一个函数是由哪几个基本初等函数（或简单函数）复合而成的.

2. 初等函数

所谓初等函数是指由基本初等函数经过有限次的四则运算（加、减、乘、除）和复合所构成、且能用一个分析式表示的函数. 例如：$y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$，$y=\sqrt{\cos\dfrac{x}{2}}$，$y=\sin(3x-1)$，$y=\cos^2(\ln x)$ 等都是初等函数.

第二节　极　　限

一、主要内容

（一）数列的极限

1. 数列

按一定顺序排列的无穷多个数　$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$

称为数列，记作 $\{x_n\}$，其中每一个数称为数列的项，第 n 项 x_n 为数列的一般项或通项. 例如：

(1) $1,3,5,\cdots,(2n-1),\cdots$

(2) $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$

(3) $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots$

(4) $1,0,1,0,\cdots,\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{2},\cdots$

都是数列.

在几何上，数列 $\{x_n\}$ 可看作数轴上的一个动点，它依次取数轴上的点 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$.

2. 数列的极限

定义　对于数列 $\{y_n\}$，如果当 $n\to\infty$ 时，y_n 无限地趋于一个常数 A，则称当 n 趋于无穷大时，数列 $\{y_n\}$ 以常数 A 为极限，或称数列收敛于 A，记作

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \text{ 或 } y_n \to A (\text{当 } n\to\infty \text{ 时})$$

否则，称数列$\{y_n\}$没有极限，如果数列没有极限，就称数列是发散的.

数列极限的几何意义：将常数 A 及数列的项 $y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$ 依次用数轴上的点表示，若数列$\{y_n\}$以 A 为极限，就表示当 n 趋于无穷大时，点 y_n 可以无限靠近点 A.

(二) 数列极限的性质

定理 1.1 (唯一性) 若数列$\{y_n\}$收敛，则其极限值必定唯一.

定理 1.2 (有界性) 若数列$\{y_n\}$收敛，则它必定有界.

注意：这个定理反过来不成立，也就是说，有界数列不一定收敛.

定理 1.3 (两面夹定理) 若数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$满足不等式 $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

定理 1.4 若数列$\{y_n\}$单调有界，则它必有极限.

下面我们给出数列极限的四则运算定理.

定理 1.5 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}[x_n \pm y_n] = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A \pm B$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[x_n \cdot y_n] = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n) \cdot (\lim\limits_{n\to\infty} y_n) = A \cdot B$

(3) 当 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{A}{B}$

(三) 函数极限的概念

1. 当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

(1) 当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限

定义 对于函数 $y = f(x)$，如果当 x 无限地趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限地趋于一个常数 A，则称当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是 A，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \quad (\text{当 } x \to x_0 \text{ 时})$$

(2) 当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的左极限

定义 对于函数 $y = f(x)$，如果当 x 从 x_0 的左边无限地趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限地趋于一个常数 A，则称当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的左极限是 A，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0 - 0) = A$$

例如函数

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x-1 & x>0 \end{cases}$$

当 x 从 0 的左边无限地趋于 0 时，$f(x)$ 无限地趋于常数 1. 我们称：当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 的左极限是 1，即有

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+1) = 1$$

(3) 当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的右极限

定义 对于函数 $y = f(x)$，如果当 x 从 x_0 的右边无限地趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限地趋于一个常数 A，则称当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的右极限是 A，记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$$

或

$$f(x_0+0) = A$$

又如函数

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x-1 & x>0 \end{cases}$$

当 x 从 0 的右边无限地趋于 0 时，$f(x)$ 无限地趋于常数 -1. 我们称：当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的右极限是 -1，即有

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x-1) = -1$$

这就是说，对于函数

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x-1 & x>0 \end{cases}$$

当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的左极限是 1，而右极限是 -1（参看图 1-13），即

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

但是对于函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，当 $x\to 1$ 时，$f(x)$ 的左极限是 2，右极限也是 2（参看图 1-14）.

显然，函数的左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$、右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 与函数的极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 之间有以下关系：

定理 1.6　当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限等于 A 的必要充分条件是

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$$

这就是说：如果当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限等于 A，则必定有左、右极限都等于 A.

反之，如果左、右极限都等于 A，则必有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

这个结论很容易直接由它们的定义得到.

以上讲的是当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限存在的情况. 对于某些函数的某些点 x_0 处，当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限也可能不存在.

2. 当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

(1) 当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的极限

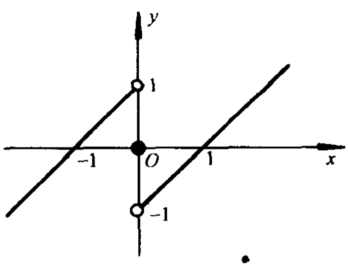

图　1-13

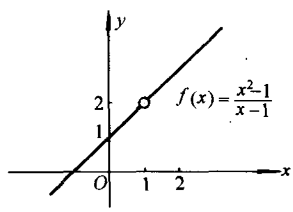

图　1-14

定义　对于函数 $y=f(x)$，如果当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 无限地趋于一个常数 A，则称当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限是 A，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \qquad 或 \qquad f(x)\to A \quad (当\ x\to\infty 时)$$

(2) 当 $x\to+\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义　对于函数 $y=f(x)$，如果当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 无限地趋于一个常数 A，则称当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是 A，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$

这个定义与数列极限的定义基本上一样，只不过在数列极限的定义中，$n\to\infty$ 一定表示 $n\to+\infty$，且 n 是正整数；而在这个定义中，则要明确写出 $x\to+\infty$，且其中的 x 不一定是整数.

如函数 $f(x)=2+e^{-x}$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 无限地趋于常数 2，因此有

$$\lim_{x\to+\infty}(2+e^{-x}) = 2$$

(3) 当 $x\to-\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义　对于函数 $y=f(x)$，如果当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)$ 无限地趋于一个常数 A，则称当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)$ 的极限是 A，记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$$

又如函数 $f(x)=2+\dfrac{1}{\sqrt{-x}}(x<0)$，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)$ 无限地趋于常数 2，因此我们说，当 $x\to-\infty$，函数 $f(x)=2+\dfrac{1}{\sqrt{-x}}$ 的极限是 2，即有

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)=2$$

由上述 $x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 极限的定义，不难看出：$x\to\infty$ 时，$f(x)$ 的极限是 A，这表示当 $x\to+\infty$ 以及 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 有相同的极限 A.

例如函数 $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$，当 $x\to-\infty$ 时 $f(x)$ 无限地趋于常数 1；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 也无限地趋于同一个常数 1，因此称当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=1+\dfrac{1}{x}$ 的极限是 1，记作

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$$

其几何意义如图 1-15 所示.

但是对函数 $y=\arctan x$ 来讲，因为有

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$$

即虽然当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)$ 的极限存在，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 的极限也存在，但这两个极限不相同，我们只能说，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=\arctan x$ 的极限不存在.

(四) 函数极限的定理

定理 1.7　(唯一性定理)　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则极限值必唯一.

定理 1.8　(两面夹定理)　设函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内(x_0 可除外)满足条件

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$$

且有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

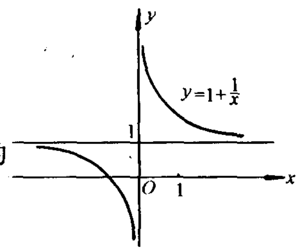

图　1-15

注意：上述定理 1.7 及定理 1.8 对 $x\to\infty$ 也成立.

下面我们给出函数极限的四则运算定理.

定理 1.9　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=(\lim\limits_{x\to x_0}f(x))\cdot(\lim\limits_{x\to x_0}g(x))=AB$

(3) 当 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B\neq 0$ 时　　$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}$

上述运算法则，不难推广到有限多个函数的代数和及乘积的情形，并有以下推论：

推论　设 $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)$，…，$\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，c 为常数，n 为正整数，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)\pm\cdots\pm\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[c\cdot f(x)]=c\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^n$

用极限的运算法则求极限时，必须注意：这些法则要求每个参与运算的函数的极限存在，且求商的极限时，还要求分母的极限不能为零. 另外，上述极限的运算法则对于 $x\to\infty$ 的情形也都成立.

(五) 无穷小量和无穷大量

1. 无穷小量(简称无穷小)

定义　对于函数 $y=f(x)$，如果自变量 x 在某个变化过程中，函数 $f(x)$ 的极限为零，则称在该变化过程中，$f(x)$ 为无穷小量. 一般记作

$$\lim f(x)=0$$

在微积分中，常用希腊字母 α,β,γ 来表示无穷小量.

这里说的“自变量 x 在某个变化过程中”是指当 $x\to x_0^-$，或 $x\to x_0^+$，或 $x\to x_0$，或 $x\to-\infty$，或 $x\to+\infty$，或 $x\to\infty$ 中的一个. 为了简单起见，我们并没有专门再提出数列，而把它归入函数之中，并且有时将数列与函数统称为变量.

定理 1.10　函数 $f(x)$ 以 A 为极限的必要充分条件是：$f(x)$ 可表示为 A 与一个无穷小量之和.

注意：

(1) 无穷小量是变量，它不是表示量的大小，而是表示变量的变化趋势为零.

(2) 一个变量是否为无穷小量是与自变量的变化趋势紧密相关的. 在不同的变化过程中，同一个变量可以有不同的变化趋势. 例如

$$\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0,\qquad \lim_{x\to 0}(x^2-1)=-1.$$

所以，当 $x\to 1$ 时，(x^2-1) 是无穷小量；而当 $x\to 0$ 时，(x^2-1) 就不是无穷小量. 因此称 $f(x)$ 为无穷小量时，必须指出自变量的变化趋势，否则是毫无意义的.

(3) 很小很小的数不是无穷小量，越变越小的变量也不一定是无穷小量. 例如，当 $x\to+\infty$ 时，$1+\dfrac{1}{x}$ 就越变越小，但它不是无穷小量.