

高等学校“十一五”规划教材 / 机械类

基于MATLAB/Simulink 平面连杆机构的动态仿真

曲秀全 著

**Dynamic Simulation of Planar Linkage
Based on MATLAB/Simulink**

哈尔滨工业大学出版社

基于 MATLAB/Simulink 平面连杆机构的动态仿真

曲秀全 著

哈爾濱工業大學出版社

内 容 简 介

MATLAB 是美国 Mathworks 公司推出的数学软件,它具有强大的数值计算能力、数据可视化能力和扩展功能。同时, MATLAB 拥有各种功能工具箱。为了充分利用 MATLAB 所提供的资源,本书以 MATLAB/Simulink 为仿真平台,针对平面连杆机构进行了动态特性的分析。

全书共分 7 章,包括平面连杆机构的运动学分析;平面连杆机构的动力学分析;单自由度平面连杆机构等效力矩和等效转动惯量;单自由度平面连杆机构等效力和等效质量;平面连杆机构的矩阵动力学建模;单自由度平面连杆机构的神经网络动态特性 MATLAB 仿真。

本书可作为已具备 MATLAB/Simulink 基本知识的机械、力学、航空航天等专业的高年级本科生和研究生相关课程的参考书,也可供有关教师、工程技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

基于 MATLAB/Simulink 平面连杆机构的动态仿真/曲秀全著. — 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2007.4

ISBN 978-7-5603-2494-4

I. 基… II. 曲… III. 计算机辅助设计-软件包, MATLAB、Simulink -应用-连杆机构-动态仿真
IV. TH112.1 - 39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 037532 号

策划编辑 贾学斌

责任编辑 康云霞

封面设计 卞秉利

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451 - 86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂

开 本 787mm × 1092mm 1/16 印张 11 字数 260 千字

版 次 2007 年 4 月第 1 版 2007 年 4 月第 1 次印刷

书 号 978-7-5603-2494-4

印 数 1 ~ 3 000 册

定 价 25.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

前 言

从 2001 年接触并了解 MATLAB 和 Simulink 仿真平台开始我就被 MATLAB 强大的功能和提供的丰富资源所吸引,考虑能否将机械原理中的平面连杆机构有关运动学和动力学模型放到 Simulink 进行仿真,并经检索发现,这方面的文献在国内几乎没有。2002 年末,看到了美国博伊西州立大学机械工程系主任——约翰·F·加德纳(John F. Gardner)教授编写的《机构动态仿真——使用 MATLAB 和 Simulink》使我豁然开朗,将所建的模型转化为 Simulink 仿真模型进行仿真有了新的思路。于是根据平面连杆机构的组成特点,运用高等动力学以及神经网络知识,推导出了相应的公式并建立了仿真模型,使我在平面连杆机构系统方面的研究不断得到丰富和完善。同时本书也是我 5 年来不断探索及博士后研究工作中,使用 MATLAB/Simulink 进行平面连杆机构动态仿真方面所发表的论文和即将发表论文的系统概括和总结。主要内容如下:

第 1 章介绍了本书所需的一些知识。

第 2 章建立了基本杆组的 MATLAB 运动学仿真模块,以大量的实例循序渐进地通过基本仿真模块搭建平面连杆机构的 MATLAB/Simulink 运动学仿真模型进行仿真。

第 3 章建立了基本杆组的 MATLAB 动力学仿真模块,以大量的实例循序渐进地通过基本仿真模块搭建平面连杆机构的 MATLAB/Simulink 动力学仿真模型进行仿真。

第 4 章以单自由度平面连杆机构为研究对象,以转动原动件为等效动力学模型,推导出等效量的统一表达式,并建立 MATLAB/Simulink 等效量模型进行仿真。

第 5 章以单自由度平面连杆机构为研究对象,以移动原动件为等效动力学模型,推导出等效量的统一表达式,并建立 MATLAB/Simulink 等效量模型进行仿真。

第 6 章根据平面连杆机构的组成特点,推导出平面连杆机构动力学普遍方程,并以实例说明。

第 7 章以单自由度平面连杆机构为研究对象,以转动原动件为等效动力学模型,并与神经网络结合,建立平面连杆机构无约束动力学 MATLAB/Simulink 仿真求解模型,并以实例说明。

本书的特点是实例丰富,所编制的 M 函数及所建立的 MATLAB/Simulink 仿真模型都经过调试通过,所得到的结果是可信的。

由于作者水平有限,书中有遗漏和不妥之处,敬请读者批评指正。

曲秀全

2007 年 2 月

于哈尔滨工业大学

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 引言	1
1.2 矩阵、向量表示法定义	1
1.3 平面连杆机构的组成原理	2
1.3.1 杆组	2
1.3.2 机构的组成原理	3
1.4 动力学主要分析方法	3
1.4.1 基本概念	3
1.4.2 动力学微分方程的建立方法	4
1.5 神经网络	10
1.5.1 神经网络概述	10
1.5.2 Matlab 神经网络工具箱	12
1.6 本书研究的主要内容	13
第 2 章 平面连杆机构的运动学分析	15
2.1 引言	15
2.2 MATLAB 位移与速度分析	15
2.2.1 非线性超越方程组牛顿-辛普森求解方法原理	15
2.2.2 用 MATLAB 实现牛顿-辛普森求解方法举例	17
2.2.3 用 MATLAB 进行速度分析	18
2.3 曲柄、基本杆组的 MATLAB 运动学分析	19
2.3.1 曲柄 MATLAB 运动学仿真模块	19
2.3.2 RRR II 级杆组 MATLAB 运动学仿真模块	20
2.3.3 RRP II 级杆组 MATLAB 运动学仿真模块	22
2.3.4 RPR II 级杆组 MATLAB 运动学仿真模块	23
2.3.5 PRP II 级杆组 MATLAB 运动学仿真模块	25
2.3.6 RPP II 级杆组 MATLAB 运动学仿真模块	27
2.3.7 6R III 级杆组 MATLAB 运动学仿真模块	28
2.4 四杆机构的 MATLAB 运动学仿真	33
2.4.1 铰链四杆机构 MATLAB 运动学仿真	33

2.4.2	曲柄滑块机构 MATLAB 运动学仿真	35
2.4.3	摆动导杆机构 MATLAB 运动学仿真	36
2.4.4	RPP 四杆机构 MATLAB 运动学仿真	38
2.5	六杆机构的 MATLAB 运动学仿真	40
2.5.1	RRR - RRR 六杆机构 MATLAB 运动学仿真	40
2.5.2	RRR - RRP 六杆机构 MATLAB 运动学仿真	43
2.5.3	RPR - RPP 六杆机构 MATLAB 运动学仿真	45
2.5.4	RRR - PRP 六杆机构 MATLAB 运动学仿真	49
2.5.5	7R 六杆Ⅲ级机构 MATLAB 运动学仿真	51
2.6	本章小结	55
第 3 章	平面连杆机构的动力学分析	56
3.1	引言	56
3.2	曲柄、基本杆组的 MATLAB 动力学分析	56
3.2.1	曲柄 MATLAB 动力学仿真模块	56
3.2.2	RRR Ⅱ级杆组的动力学仿真模块	58
3.2.3	RRP Ⅱ级杆组的动力学仿真模块	60
3.2.4	RPR Ⅱ级杆组的动力学仿真模块	62
3.2.5	PRP Ⅱ级杆组的动力学仿真模块	64
3.2.6	RPP Ⅱ级杆组的动力学仿真模块	67
3.2.7	6R Ⅲ级杆组的动力学仿真模块	69
3.3	四杆机构的 MATLAB 动力学仿真	73
3.3.1	铰链四杆机构 MATLAB 动力学仿真	73
3.3.2	曲柄滑块机构 MATLAB 动力学仿真	76
3.3.3	摆动导杆机构 MATLAB 动力学仿真	80
3.4	六杆机构的 MATLAB 动力学仿真	83
3.4.1	RRR - RRR 六杆机构 MATLAB 动力学仿真	83
3.4.2	RRR - RRP 六杆机构 MATLAB 动力学仿真	86
3.4.3	RPR - RPP 六杆机构 MATLAB 动力学仿真	90
3.4.4	RRR - PRP 六杆机构 MATLAB 动力学仿真	94
3.4.5	7R 六杆Ⅲ级机构 MATLAB 动力学仿真	98
3.5	本章小结	102
第 4 章	单自由度平面连杆机构等效力矩和等效转动惯量	103
4.1	引言	103
4.2	单自由度平面连杆机构等效力矩矩阵数学模型的建立	104

4.2.1	平面连杆机构等效多体混合模型	104
4.2.2	单自由度平面连杆机构等效力矩矩阵数学模型的推导	104
4.2.3	等效力矩计算步骤	106
4.2.4	等效力矩举例分析	107
4.3	单自由度平面连杆机构等效转动惯量矩阵数学模型的建立	114
4.3.1	单自由度平面连杆机构等效转动惯量矩阵数学模型的推导	114
4.3.2	等效转动惯量计算步骤	115
4.3.3	等效转动惯量举例分析	116
4.4	本章小结	121
第 5 章	单自由度平面连杆机构等效力和等效质量	122
5.1	引言	122
5.2	单自由度平面连杆机构等效力矩矩阵数学模型的建立	123
5.2.1	单自由度平面连杆机构等效力矩矩阵数学模型的推导	123
5.2.2	等效力计算步骤	125
5.2.3	等效力举例分析	126
5.3	单自由度平面连杆机构等效质量矩阵数学模型的建立	130
5.3.1	单自由度平面连杆机构等效质量矩阵数学模型的推导	130
5.3.2	等效质量计算步骤	132
5.3.3	等效质量举例分析	133
5.4	本章小结	135
第 6 章	平面连杆机构的矩阵动力学建模	137
6.1	引言	137
6.2	平面连杆机构动力学矩阵数学模型的建立	137
6.2.1	平面连杆机构动力学普遍方程	137
6.2.2	平面连杆机构完整系统矩阵统一数学模型的建立	138
6.2.3	平面连杆机构动力学矩阵数学模型的建立步骤	140
6.3	平面连杆机构完整系统举例分析	141
6.3.1	RRR - RRP 单自由度六杆机构动力学模型的建立	141
6.3.2	二自由度五杆并联机构动力学模型的建立	144
6.4	非完整质点系统动力学矩阵数学模型的建立	147
6.4.1	非完整质点系统动力学矩阵数学模型	147
6.4.2	非完整质点系统动力学系统举例分析	148
6.5	本章小结	151

第 7 章 单自由度平面连杆机构的神经网络动态特性 MATLAB 仿真	152
7.1 引言	152
7.2 单自由度平面连杆机构等效动力学 MATLAB 仿真数学模型	152
7.3 用 MATLAB 进行等效动力学模型仿真步骤	153
7.4 平面连杆机构等效动力学模型神经网络 MATLAB 求解仿真举例	153
7.4.1 铰链四杆机构等效动力学模型神经网络 MATLAB 求解仿真	153
7.4.2 曲柄滑块机构等效动力学模型神经网络 MATLAB 求解仿真	155
7.4.3 RRR - RRP 六杆机构等效动力学模型神经网络 MATLAB 求解仿真 ...	157
7.5 基于神经网络动态特性 MATLAB 仿真举例	160
7.5.1 基于神经网络铰链四杆机构动态特性 MATLAB 仿真	160
7.5.2 基于神经网络曲柄滑块机构动态特性 MATLAB 仿真	162
7.5.3 基于神经网络 RRR - RRP 六杆机构动态特性 MATLAB 仿真	163
7.6 本章小结	167
参考文献	168

第 1 章 绪 论

1.1 引 言

本章作为后续章节的预备知识,主要有:在推导等效量和动力学方程过程中对向量和矩阵进行了约定表示;简单地介绍了平面连杆机构的组成原理和杆组;介绍了目前高等动力学中建立动力学微分方程的一般方法;对用到的 BP 神经网络及其在 MATLAB 中的实现也作了介绍。

1.2 矩阵、向量表示法定义

【定义 1】 列向量、行向量分别定义为

$$A_n = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]^T, \quad B^m = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_m] \quad (1.1)$$

式中 n ——下指标,表示列向量的行数;

m ——上指标,表示行向量的列数。

【定义 2】 矩阵表示法定义为

$$A_n^m = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

式中 n ——下指标,表示矩阵的行数;

m ——上指标,表示矩阵的列数。

同时,为了与上述所定义的矩阵相一致,定义 $n \times n$ 阶单位阵表示为 I_n^n (或 E_n^n)。

【定义 3】 列向量、行向量和矩阵的转置表示法定义为

$$[A_n]^T = A^n, \quad [B^m]^T = B_m, \quad [A_n^m]^T = A_m^n \quad (1.3)$$

由此可见,向量和矩阵的转置为上、下指标对调。

【定义 4】 矩阵相乘遵循如下规则:

设有矩阵 A_i^j, B_j^k , 则有 $C_i^k = A_i^j B_j^k$, 即左乘矩阵上指标与右乘矩阵下指标相消。

同时对 $C_i^k = A_i^j B_j^k$ 的转置运算符合一般矩阵相乘转置运算,有

$$[C_i^k]^T = C_k^i = [A_i^j B_j^k]^T = [B_j^k]^T [A_i^j]^T = B_k^j A_j^i \quad (1.4)$$

【定义 5】 矩阵或向量的元素为向量时,称为向量矩阵或向量,用黑体表示;若矩阵或向量的元素为标量,则称为标量矩阵或标量向量,用常规体表示。

上面所定义向量和矩阵的上、下指标分别表示向量和矩阵的维数。当上、下标不是表

示向量和矩阵的维数时,为了明确起见这时应加上中括号,如 $[A_c]_m$ 、 $[A_c]_m^n$,其中下标 c 不表示维数, m 和 n 表示向量和矩阵的维数。

1.3 平面连杆机构的组成原理

任何机构都是由原动件、机架和从动件构成的系统。由于机架的自由度为零,一般每个原动件的自由度为 1,且根据运动链为机构的条件可知,机构的自由度与原动件数应相等,所以,从动件系统的自由度必然为零。

1.3.1 杆组

机构的从动件系统一般还可以进一步分解成若干个不可再分的自由度为零的构件组合,这种组合称为基本杆组,简称为杆组。

对于只含低副的平面连杆机构,若杆组中有 n 个活动构件、 p_L 个低副,因杆组自由度为零,故有

$$3n - 2p_L = 0 \quad \text{或} \quad p_L = \frac{3}{2}n \quad (1.5)$$

为保证 n 和 p_L 均为整数, n 只能取偶数。根据 n 的取值不同,杆组可分为以下情况。

(1) $n = 2, p_L = 3$ 的 II 级杆组

II 级杆组为最简单,也是应用最多的基本杆组。根据 3 个运动副(转动副用 R 表示、移动副用 P 表示)的不同组合,II 级杆组分为 5 种:RRR II 级杆组、RRP II 级杆组、RPR II 级杆组、PRP II 级杆组和 RPP II 级杆组,如图 1.1 所示。

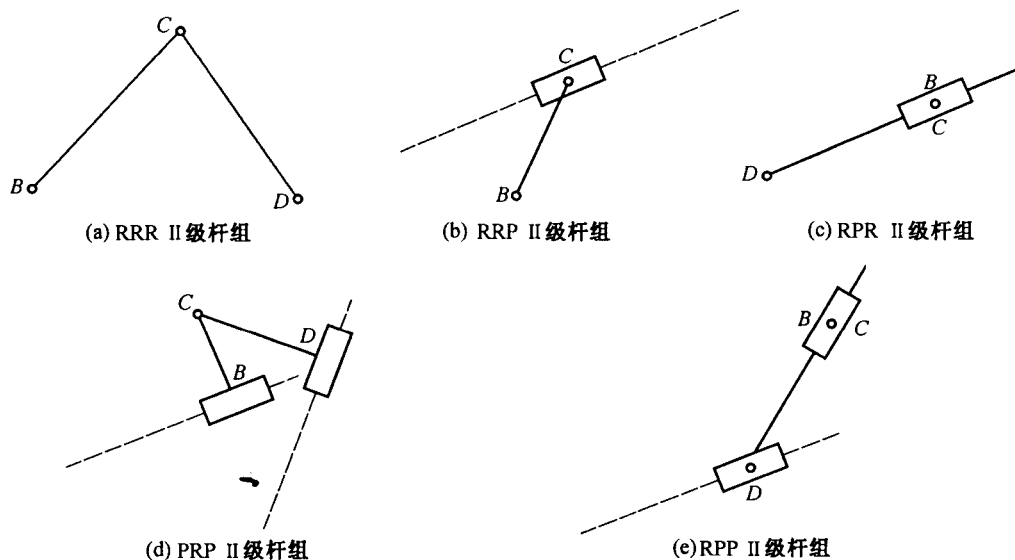


图 1.1 II 级杆组

(2) $n = 4, p_L = 6$ 的 III 级杆组

III 级杆组特别是 III 级以上杆组在实际应用中较少,故这里不再介绍。

1.3.2 机构的组成原理

任何机构都可以看做是由若干个基本杆组依次联接于原动件和机架而构成的,这就是所谓机构的组成原理。把由最高级别为 II 级杆组的基本杆组构成的机构称为 II 级机构;把最高级别为 III 级杆组的基本杆组构成的机构称为 III 级机构,其余类推。

1.4 动力学主要分析方法

1.4.1 基本概念

1. 约束

非自由质点系或刚体系在空间的位置以及在运动中受到的限制称为约束。用数学方程表述各个质点或刚体所受的限制条件称为约束方程。

从约束方程的形式上看,约束可分为几何约束和运动约束两大类,它们又都可分为定常约束和非定常约束、双面约束和单面约束、可积分的约束和不可积分的约束。

从约束方程的实质来看,约束可分为完整约束和非完整约束。

(1) 几何约束

在质点系、刚体系或混合系中,所加的约束只能限制各质点或刚体在空间的位置或质点系、刚体系或混合系的位形,这种约束称为几何约束或位置约束,其一般形式是

$$f_j(q_i, t), \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m \quad (1.6)$$

式中 q_i ——确定位形的坐标。

如果约束方程式(1.6)不显含时间参数 t ,则称为定常几何约束或稳定几何约束;如果约束方程式(1.6)显含时间参数 t ,则称为非定常几何约束或非稳定几何约束。

在几何约束中,约束方程为等式的几何约束称为双面几何约束或固执几何约束;约束方程为不等式的几何约束称为单面几何约束或非固执几何约束。

(2) 运动约束

在质点系、刚体系或混合系中,所加的约束不仅限制各质点或刚体在空间的位置或质点系、刚体系或混合系的位形,而且限制它们运动的速度,这种约束称为运动约束,也称速度约束或微分约束,其一般形式是

$$f_j(q_i, \dot{q}_i, t), \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m \quad (1.7)$$

在运动约束方程中,如果约束方程能够变换为某个函数的全微分,或满足可积分条件,这种约束称为可积分的运动约束;如果约束方程不能够变换为某个函数的全微分,或不满足可积分条件,这种约束称为不可积分的运动约束。

(3) 完整约束与非完整约束

几何约束和可积分的运动约束实质上属于同一范畴的约束,称为完整约束;不可积分的运动约束,称为非完整约束。

(4) 理想约束

约束力在质点系、刚体系或混合系中的任何虚位移中所作的元功之和等于零,具有这种性质的约束称为理想约束。

2. 完整系统与非完整系统

(1) 完整系统

如果质点系、刚体系或混合系中所受的约束都是完整约束,这个系统称为完整系统,简称完整系。

(2) 非完整系统

如果质点系、刚体系或混合系中所受的约束都是非完整约束,这个系统称为非完整系统,简称非完整系。

3. 广义坐标、位形、自由度

(1) 广义坐标、多余坐标

能够完全确定质点系、刚体系或混合系位形的独立参变量称为广义坐标,用符号 q_1, q_2, \dots 表示。如果一个系统的广义坐标的数量为 n ,则质点系、刚体系或混合系的位形完全由 n 个广义坐标完全确定。在一个系统中,由于推导或计算上的方便往往采用多于 n 个的坐标数来表示该系统的位形,则称多于 n 个的坐标为多余坐标。广义坐标的时间变化率称为广义速率。

(2) 位形

真实位形:针对某一瞬时,既满足质点系、刚体系或混合系的运动微分方程和运动初始条件,又满足各个约束方程,所解得质点、刚体的坐标值。

可能位形:满足约束方程,而与质点系、刚体系或混合系的受力状况和运动初始条件无关的运动,在某瞬时质点、刚体的可能坐标值。

坐标变分:比较同一瞬时同一质点或刚体的真实位形和与它相邻的可能位形的无限小量差值。变分的运算规则与微分的运算规则相似,重要的差别在于“等时”性,即 $\delta t = 0$ 。

(3) 自由度

在质点系、刚体系或混合系中,独立坐标变分的数值称为自由度。在完整系统中自由度数等于广义坐标数;在非完整系统中自由度数等于广义坐标数减去非完整约束数。

4. 虚位移、虚速度、虚加速度

(1) 虚位移

在给定的瞬时和位形上,在约束允许的条件下,质点系、刚体系或混合系的无限小位移称为该质点系、刚体系或混合系的虚位移。某质点或刚体的虚位移用 δr_i 表示。

(2) 虚速度

所给出的虚位移 δr_i 经历了无限小的时间间隔 dt ,定义虚速度为

$$\Delta \dot{r}_i = \Delta v_i = \frac{\delta r_i}{dt} \quad (1.8)$$

(3) 虚加速度

在同一瞬时,质点系中的各质点从同一状态出发,在满足质点系的加速度约束方程的可能加速度的变更,称为该质点系的虚加速度,也称为高斯变更。

1.4.2 动力学微分方程的建立方法

下面以质点系为例给出动力学微分方程的建立方法,对于平面刚体系或质点系与平面刚体系组成的混合系同样也适用。

1. 虚位移原理

虚位移原理是分析静力学的基本原理,可以表述为具有完整、定常、理想约束的质点系,其平衡的充分必要条件是,在给定的位形上,作用于该质点系上的所有主动力在任何虚位移上所作的元功之和等于零。用广义力表示的虚功方程为

$$\sum_{i=1}^n \delta A_F = \sum_{\alpha=1}^k Q_{\alpha} \delta q_{\alpha} = 0 \quad (1.9)$$

它适用于任何质点系,由它可推出刚体的平衡条件。

2. 达朗伯原理(动静分析法)

达朗伯原理指出,如果在质点系上除了作用有真实的主动力和约束反力外,再假想地加上惯性力,则这些力在形式上组成一平衡力系,即

$$\sum_{i=1}^n F_i + \sum_{i=1}^n N_i + \sum_{i=1}^n F_{gi} = 0 \quad (1.10)$$

式中 $\sum_{i=1}^n F_i$ ——主动力;

$\sum_{i=1}^n N_i$ ——约束反力;

$\sum_{i=1}^n F_{gi}$ ——惯性力。

若将达朗伯原理和虚位移原理综合运用,将导致动力学普遍方程。

3. 动力学普遍方程

(1) 虚功形式的动力学普遍方程

质点系在约束是理想约束下,将达朗伯原理和虚位移原理相结合,则有

$$\sum_{i=1}^n \delta A_F = \sum_{i=1}^n (F_i + F_{gi}) \cdot \delta r_i = 0 \quad (1.11)$$

式中 F_i ——主动力;

F_{gi} ——惯性力, $F_{gi} = -m_i a_i$;

δr_i ——虚位移。

这是虚功形式的动力学方程,简称动力学普遍方程,是拉格朗日于 1760 年导出的,也称达朗伯 - 拉格朗日方程。此方程含义是,在具有理想约束的质点系中,在任意瞬时和位形上,作用于各质点上的主动力和虚加的惯性力在任一虚位移上所作的元功之和等于零。

一般说来,系统内 δr_i 之间并不是独立的,需与约束方程联立求解。动力学普遍方程是分析力学的普遍原理,由此可以推出非自由质点系的全部动力学方程。

(2) 虚功率形式的动力学普遍方程

虚功率形式的动力学普遍方程为

$$\sum_{i=1}^n \Delta P_i = \sum_{i=1}^n (F_i + F_{gi}) \cdot \Delta \dot{r}_i = 0 \quad (1.12)$$

式中 $\Delta \dot{r}_i$ ——虚速度。

虚功率形式的动力学普遍方程是若丹于 1908 年导出的,也称若丹原理,可表述为在具有理想约束的质点系中,在任意瞬时和位形上,作用于各质点上的主动力和虚加的惯性力在任一虚速度上作的元功率之和等于零。

(3) 高斯形式的动力学方程

高斯形式的动力学方程为

$$\sum_{i=1}^n (F_i + F_{gi}) \cdot \Delta \ddot{r}_i = 0 \quad (1.13)$$

式中 $\Delta \ddot{r}_i$ ——虚加速度。

高斯形式的动力学方程是高斯于 1829 年导出的。从上面可以看出,动力学方程的 3 种基本形式除了元素符号的区别以外,是完全一致的。高斯形式的动力学方程的明显优点是,可以导出高斯原理和阿沛尔方程。

4. 拉格朗日第一类方程

用第一类拉格朗日方程不仅可以求出系统的运动,而且还可以求约束反力。但是,由于待定乘子的引入,使得未知的理想约束的约束反力在运动方程中出现,从而使未知量和方程式的数目都增加了,要解这么庞大的微分方程组是十分困难的,因此,第一类拉格朗日方程应用不广。第一类拉格朗日方程同牛顿第二定律运动微分方程一样,是描述单个质点的运动微分方程,所以,一般说来它不能直接用来求解刚体或刚体系统的运动,但可以用来求解离散系统的动力学问题。其方程形式省略。

5. 拉格朗日第二类方程

由于系统约束的存在,用动力学普遍方程方法列写运动微分方程时可能要寻找约束关系,有时很不方便。将动力学方程用独立的广义坐标来表示这便是拉格朗日方程方法,其一般形式为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (1.14)$$

式中 $T(q, \dot{q})$ ——系统动能函数;

Q_j ——广义力;

q_j ——广义坐标;

\dot{q}_j ——广义速度。

式(1.14)中变量 q_j, \dot{q}_j 称为拉格朗日变量。

以下分两种情况给出不同的表达式:

(1) 保守系统的情形

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (1.15)$$

$$L = T - V \quad (1.16)$$

式中 $L = L(q_j, \dot{q}_j, t)$ ——拉格朗日函数;

$V = V(q_1, q_2, \dots, q_k, t)$ ——势函数;

其他参数同上。

(2) 非保守系统的情形

如果作用于质点系上的主动力中,只有一部分是有势力时,则可将广义力分为两部分,一部分是有势力的广义力 $\left(-\frac{\partial V}{\partial q_j} \right)$, 另一部分是非有势力的广义力 Q'_j , 则拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q'_j, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (1.17)$$

在应用拉格朗日第二类方程时应注意以下几点:①拉格朗日方程是以广义坐标表达的任意完整系统的运动方程,方程的数目等于系统的自由度,因而可以获得数目最少的运动方程。②在建立运动方程时只需分析已知的主动力而不必分析未知的约束力,因而,对于复杂系统拉格朗日方程更能体现其优越性。③拉格朗日方程具有很好的对称性,即对于同一位形空间中的每个坐标而言各方程都有相同的形式。④拉格朗日方程是以能量观点建立起来的运动方程。在建立系统的运动方程时,只需分析系统的动能和广义力,而广义力是分析主动力的虚功的结果。对于主动力为有势的系统,特别是保守系统,主动力的作用则完全归结为主动力的势能。

6. 哈密顿正则方程

(1) 保守系统的情形

拉格朗日方程是用一组关于 k 个广义坐标 q_j 的二阶常微分方程组来描述系统的运动。变量 q_j, \dot{q}_j, t 为拉格朗日变量。哈密顿以广义动量 p_j 取代广义速度 \dot{q}_j , 以 q_j, p_j, t 为变量, 称为哈密顿变量或正则变量。以哈密顿函数 H 代替拉格朗日函数 L , 用 $2k$ 个关于广义坐标 q_j 和广义动量 p_j 为变量建立对称整齐的一阶常微分方程组, 即称为哈密顿正则方程或简称正则方程, 以此来描述系统的运动。

利用勒让德变换把以 q_j, \dot{q}_j, t 为变量的拉格朗日函数 L 变换成以 q_j, p_j, t 为新变量的哈密顿函数 H , 即

$$H = \sum_{j=1}^k p_j \dot{q}_j - L \quad (1.18)$$

通过推导可以得到关于变量 q_j, p_j, t 的哈密顿正则方程

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (1.19)$$

拉格朗日函数 $L = L(q_j, \dot{q}_j, t)$ 和哈密顿函数 $H = H(q_j, p_j, t)$, 都可看做是系统的描述函数。拉格朗日函数 $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ 包含了位形空间中描述系统运动的全部特征, 而哈密顿函数 $H(q_j, p_j, t)$ 则包含了相空间中描述系统运动的全部特征。因此, 可以说哈密顿原理、哈密顿正则方程和拉格朗日方程是互为等价的。

(2) 非保守系统的情形

通过推导可得到存在非有势力作用时的哈密顿正则方程为

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} + Q'_j \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (1.20)$$

式中 Q'_j —— 系统的非有势力对应于 q_j 的广义力。

7. 阿沛尔(Appell)方程

对于非完整系统, 阿沛尔提出, 在建立系统运动方程时, 不采用 m 个独立的广义速度

而利用关于 n 个广义速度 $\dot{q}_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 的某 m 个独立的线性组合作为独立变量, 并表示为

$$\dot{\pi}_k = \sum_{j=1}^n u_{kj} \dot{q}_j, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (1.21)$$

u_{kj} 一般为 n 个 q 和 t 的函数, m 个彼此独立的 $\dot{\pi}_k$ 则称为伪速度, 这是因为 $\dot{\pi}_k$ 不一定是某个函数 $\pi_k(q, t)$ 对 t 的全导数, 与 $\dot{\pi}_k$ 对应的 $\pi_k(q, t) (k = 1, 2, \dots, m)$ 称为伪坐标或准坐标或非完整坐标, $\ddot{\pi}_k (k = 1, 2, \dots, m)$ 称为伪加速度。

由上式和非完整约束方程, 可以解出由伪速度表达的广义速度为

$$\dot{q}_j = \sum_{k=1}^m h_{kj} \dot{\pi}_k + h_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1.22)$$

通过推导可得虚功为

$$\delta w = \sum_{k=1}^m \pi_k \delta \pi_k \quad (1.23)$$

式中 $\delta \pi_k(q, t)$ —— 对应于伪坐标 $\pi_k(q, t)$ 的广义力, 且

$$\pi_k = \sum_{j=1}^n h_{kj} Q_j, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

加速度能定义为

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i^2 \quad (1.24)$$

经推导可得到阿沛尔方程为

$$\frac{\partial U}{\partial \pi_k} = \pi_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (1.25)$$

由式(1.25)、伪速度方程、非完整约束方程和给定初始条件, 即可解出唯一确定系统。

8. 凯恩(Kane)方程

(1) 偏速度与偏角速度

对于完整系统, 有 n 个独立的广义坐标 q_1, q_2, \dots, q_n , 则第 i 个质点对于某惯性参考系的矢径为

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

对其求导数有

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.26)$$

n 个 \dot{q}_j 是彼此独立的, 用 u_{ij} 表示上式中 \dot{q}_j 的矢量系数, 即

$$u_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1.27)$$

矢量系数 u_{ij} 称为第 i 个质点对于第 j 个独立广义速度 \dot{q}_j 的偏速度, 它们一般是诸 q 和 t 的矢量函数, 令 $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \mathbf{u}_{i0}(q, t)$, 则有

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n u_{ij} \dot{q}_j + \mathbf{u}_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.28)$$

若所考察的系统包含有若干个刚体, 类似地可以把第 l 个刚体的瞬时角速度 ω_l 表示

为

$$w_l = \sum_{j=1}^n w_{lj} \dot{q}_j + w_{l0} \quad (1.29)$$

式中 w_{lj} ——第 l 个刚体对于第 j 个独立广义速度 \dot{q}_j 的偏角速度。

如果系统还受有 r 个独立的非完整约束,则有

$$\sum_{j=1}^n a_{\rho j} \dot{q}_j + a_{\rho 0} = 0, \quad \rho = 1, 2, \dots, r \quad (1.30)$$

则 n 个 \dot{q}_j 中只有 $n - r = m$ 个是彼此独立的。可以利用 r 个约束方程将 r 个非独立的 \dot{q}_j 解出,用 m 个独立的 \dot{q}_j 的线性型来表示,然后代入上式得

$$v_i = \dot{r}_i = \sum_{j=1}^n u'_{ij} \dot{q}_j + u'_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.31)$$

式中系数 u'_{is} 就是第 i 个质点对于独立广义速度 \dot{q}_s 的偏速度。类似地,可以得到在非完整系统情形刚体角速度 w_l 的表示式

$$w_l = \sum_{s=1}^m w'_{ls} \dot{q}_s + w'_{l0} \quad (1.32)$$

$w'_{ls}(q, t)$ 即第 l 个刚体对于独立广义速度 \dot{q}_s 的偏角速度。也可以采用阿沛尔的做法,不直接采用独立广义速度,而采用 n 个 \dot{q} 的独立线性组合(即伪速度)

$$u_k = \sum_{j=1}^n h_{kj} \dot{q}_j + h_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (1.33)$$

作为独立速度,解出 \dot{q}_j 用 u_k 来表示,即

$$\dot{q}_j = \sum_{k=1}^m f_{jk} u_k + f_{j0}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1.34)$$

代入速度方程可得

$$v_i = \dot{r}_i = \sum_{j=1}^m u''_{ik} u_k + u''_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.35)$$

矢量系数 $u''_{ik}(q, t)$ 就是第 i 个质点对于独立速度 u_k 的偏速度。类似地,可写出一个刚体的瞬时角速度

$$w_l = \sum_{k=1}^m w''_{lk} u_k + w''_{l0} \quad (1.36)$$

式中 $w''_{lk}(q, t)$ ——第 l 个刚体对于独立速度 u_k 的偏角速度。

(2) 凯恩方程

由动力学的普遍方程出发,利用阿沛尔的伪速度的彼此独立的变分 $\delta\pi_k$,可推导出

$$F_k + F_k^* = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (1.37)$$

式中 F_k^* ——广义惯性力,且

$$F_k^* = \sum_{i=1}^N K_i u''_{ik}, \quad K_i = -m_i \ddot{r}_i \quad (1.38)$$

F_k ——广义主动力,且

$$F_k = \sum_{i=1}^N F_i u''_{ik} \quad (1.39)$$

式中 u''_{ik} ——相应的偏速度。