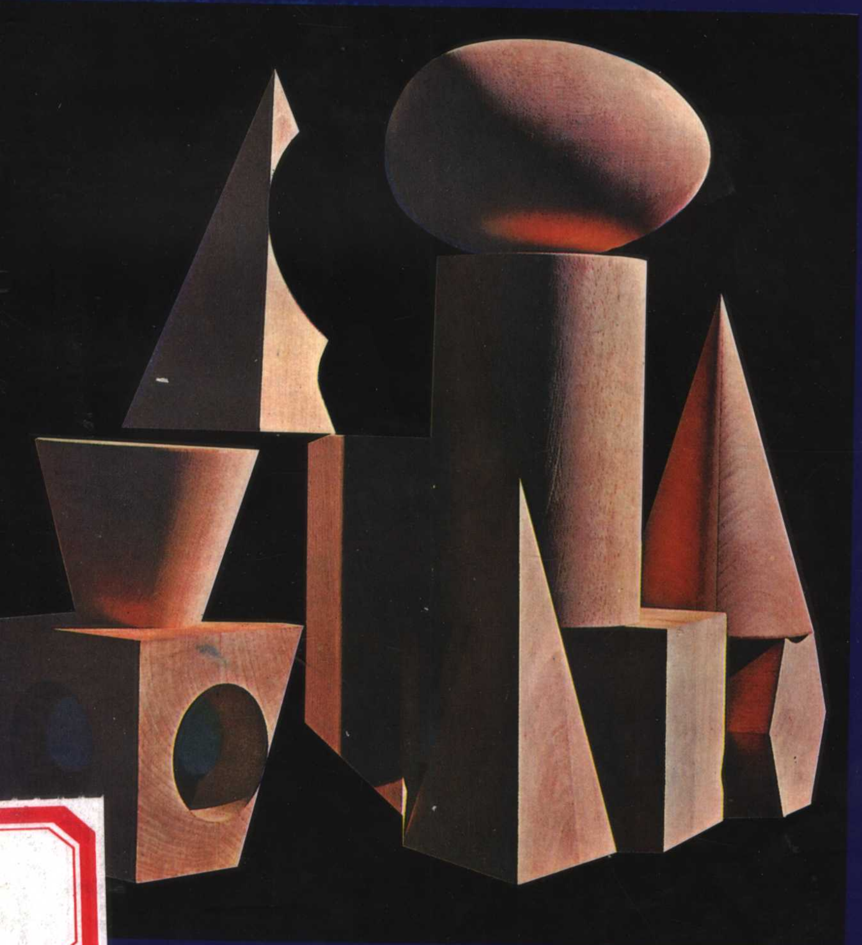
SHUXUE SIWEI FANGFA YINLUN

王健吾 著

数学思维方法引论



安徽教育出版社

SHUXUE SIWEI FANGF

数学思维方法引论

王健吾　著

安徽教育出版社

数学思维方法引论

王健吾　著

安徽教育出版社出版发行

（合肥市金寨路 381 号）

新华书店经销　　合肥远东印刷厂印刷

*

开本 850×1168　1/32　印张 5　字数:120000

1996 年 5 月第 1 版　　1996 年 5 月第 1 次印刷

印数:1—3000

ISBN 7—5336—1920—X/G·2456

定价:4.50 元

发现印装质量问题影响阅读，请与承印厂联系调换。

序

像任何科学发现一样，数学发现一般要经过两大步骤，一是提出假设（或叫猜想），二是给出证明。学习数学时，定理的论断早已由前人写明，学生的任务只是理解内容、学会证明及了解应用；而证明大都是逻辑推理或计算。于是一些人认为数学发现只靠逻辑推理；本书作者则认为这是对数学的一种误解。其实逻辑推理只是发现过程的一部分，远非全过程；更需要的是提出合理假设。然而，假设又是怎样想出来的呢？在一般的教科书中，恰好回避了这个极重要的问题，或者虽略有涉及，但语焉不详。这确是数学教学中一大憾事。

本书正是针对此问题而写的。作者认为，基于实践的直觉思维是数学发现的重要因素，以往一些作者对此也有过阐述，但像本书作者如此深刻和系统的论述尚属凤毛麟角。作者以大量事例为基础，探讨了数学直觉的二象性与历史性；直觉思维的地位、作用、模式以及与抽象思维的关系等等。作者把全部数学推理归纳为四种形式：逻辑演绎、直观推测、随机

推测与幻觉演绎；认为前二者分别属于抽象思维与形象思维，而后二者也许是本书作者最早提出的新概念。他认为随机思维属于灵感思维，有顿悟的色采；而幻觉演绎则属于特异思维。关于特异思维作者引用帕斯卡的话说："我们不仅通过理性认识真理，而且通过心灵认识真理"(本书第43页)。印度的传奇式数学家拉玛努扬可以作为通过幻觉演绎获得许多重大成果的卓越代表。关于随机推测与幻觉演绎是本书精彩部分之一，虽未必能获得共识，但至少开了一个好头，因为这是前人没有或很少论述过的。

这本书是作者经过深思熟虑的、严肃认真的科学著作，绝不同于某些因袭成文的急就篇。本书富于创见和新意，还有不少关于数学发现的著名的例，不仅有启发性，而且读来饶有兴趣，易为广大读者所接受。我深信，本书的出版对数学的研究和教学会有较大的帮助。

王梓坤

1995年4月5日

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　　录

绪论

人们对数学的一个误解

数学的抽象性和重要性，特别是它的严谨推理，使得人们对它始终怀着敬畏之情。由这种敬畏心理，产生出许多关于数学的不正确的理解。这些误解，致使一些人害怕它，对它敬而远之，避之唯恐不及；实在逃避不掉的，也是极尽敷衍了草之能事，对数学根本提不起兴趣。这样，虽然每个人都不同程度地学习过数学，但是对于数学的精神却始终把握不住，不会利用数学方法和思想来认识世界、妨碍了人们的创造才能的发挥。在对数学的误解中，危害性最大的误解，就是认为数学的结果仅仅是靠逻辑严谨推理得到的。这种误解多数是由于传统数学教学上的缺陷造成的。

在"今日数学及其应用"一文里，作者指出的数学的特点是：内容的抽象性、应用的广泛性、推理的严谨性和结论的明确性。对于推理的严谨性，该文深刻地分析道：

……数学中严谨的推理和一丝不苟的计算，使

得每一数学结论不可动摇。这种思想方法不仅培养了数学家，也有助于提高全体人民的科学文化素质，它是人类巨大的精神财富。爱因斯坦关于欧氏几何曾说："世界第一次目睹了一个逻辑体系的奇迹，这个逻辑体系如此精密地一步一步推进，以致它每一个命题都是绝对不容置疑的——我这里说的是欧几里德几何。推理的这种可赞叹的胜利，使人类的理智获得了为取得以后成就所必需的信心。"①

确实如此，在数学发展史上，最早出现于希腊数学的向演绎证明的变革，也许是人类历史中最伟大的一次思想革命。从此，数学稳步发展，其逻辑结构不仅保证了数学的明确性，而且还是推动数学深化的强大力量。因为，在数学的进程中，每当理智遇到有悖于常理的情况时，人们反思的是自己的认识，而不是数学答案。例如，当欧氏第五公设长期得不到证明时，人们反思自己对数学公理化的认识，从而出现了非欧几何和近现代数学由实质性公理化向形式公理化推进的运动。由罗素悖论的讨论而引出的哥德尔不完备性定理，是数学对自己体系的反思：即相当于一部算术的每套推论的命题都必定是不完整的或者说在任何一个相当的形式系统中总存在不能由公理和步骤法则去证明或证伪的命题。哥德尔定理指出一个固有的理论体系不会把一切问题解决殆尽，这种有关体系变革的最一般的规律，也许是人类迄今为止对自己的思维能力的最重大反思。该反思对数学的发展已经产生并将继续产生极大的影响。由此观之，数学采用的逻辑体系，其严谨的推理具有非凡的力量，它不但造成了数学在应用上的极大普遍性，更重要的是推动数学发展和突破人类固有局限甚至是自己局限性的强大力量。

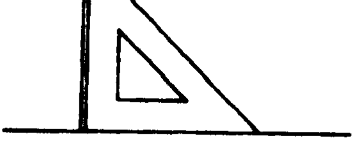
正因为如此，采用演绎化证明，是目前数学存在的范式（虽然现代数学中，也出现了概率证明和计算机辅助证明，但它们在思想

① 中国科学院数学物理学部，今日数学及其应用．见：中国人民大学书报资料中心主编《自然辩证法》（复印报刊资料），1994年第2期，P123—137.

本质上还是属于演绎性的确定性证明），而且根据前面引文的思想，我们还有充分的理由相信，该范式将会延存下去，至少在今后一个漫长的历史时期里是如此。这里，演绎化证明是数学存在的范式，指的是人们对数学的一种总体认识观念，该观念规范了现今一切有关数学的活动。所以不但数学研究是要靠演绎逻辑来证实和表述，而且一切教科书和学术专著都要采用逻辑体系严格的形式，甚至数学教学也是“逻辑的”，即靠演示定理的逻辑步骤来传授数学知识并对学生进行逻辑推理训练。当然，为了严谨性，也为了包涵数学博大的思想，数学及其教科书采用逻辑体系是必然的，然而对于教学来说，就不应该仅限于此，否则它的负面效应就是导致了上述的误解，人们感到数学的结果是一步一步推出来的，没有过人的聪慧是不行的，换言之，数学里只有推理，没有猜测；只有逻辑，没有艺术；只有抽象，没有直观；只有理性，没有想象。然而幸亏事实并非如此，否则我们的数学就不会兴旺如它目前所是，它早就不会吸引任何一个有智慧的人。正因为如此，所以上面引文的作者又明确指出数学能培养人们的直观思维等能力，还建议“中小学数学教学，既要有科学性，又要有趣味性，以提高青少年学数学的兴趣”，这里的趣味性就是指要阐述数学的非逻辑推理方面，因为这些非逻辑推理正是数学大师们为了获得严谨推理而普遍采用的手段和方法。

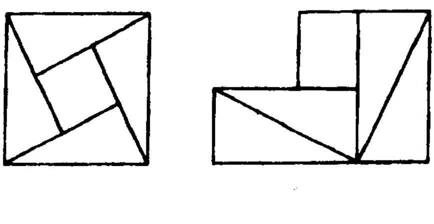
有一个幽默故事，说在一张考卷上，对于“证明过直线外一点可以作且只能作一条与该直线垂直的直线”这个试题，解答为下面的一个图。

看呀！



其实，这种“看呀！”证明，只是说明了该生不懂得数学结论必须靠演绎逻辑来证实，这种直观观看不能算数，它并没有说明，该生没有数学才能，他在数学上真的是“不可救药”。翻开数学史，数学发展的早期，无论是中国或是印度，就是发明演绎证明的希腊人，其数学推理也是这种“看呀！”式的。萧文强在《数学证明》一书中写道：

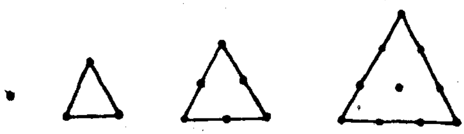
在中国古代数学常见的直观解释的手法，在古代印度数学文化里也常见得到，也许那是东方数学的一个特色。例如，12世纪印度数学家婆什迦罗(Bhaskara)在著述里画了一幅图去解释勾股定理，那幅图与魏晋人赵爽注《周髀算经》作的弦图一样[见下图]，但婆什迦罗除了写下一句“看呀！”便没再说什么了。这种证明，与古代希腊数学家用形象观察去证明关于图形数的性质，不是极类似吗?古代希腊数学家后来发展了演绎推理这种证明手法，的确是极重要的贡献，但那不等于说，别的思考方式或解释手段，便不算是证明。从理解的角度看，东方古代数学文化中的证明，有时更有意思呢。①



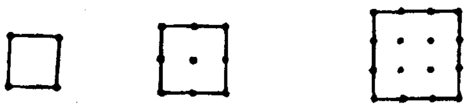
① 萧文强．数学证明．南京：江苏教育出版社，1990年版，P12—13.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

这里所说的图形数，就是自然数，由于公元前 6 世纪毕达哥拉斯学派，他们常把数描绘成小石子，并按小石子能排列成的形状把数分类，从而得其名的。例如，把 1，4，9，16，……叫做正方形数；把 1，3，6，10，……叫做三角形数。当他们把这些小石子排列时，他们便形象地看出图形数的一些性质。例如，从下图



中容易看出相继的两个三角形数之和是个正方形数，即



1＋3　　　　3＋6　　　　6＋10

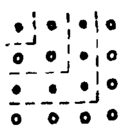
把它写成现代形式，就是

$$\frac{n}{2}(n+1)+\frac{(n+1)}{2}(n+2)=(n+1)^2$$

又我们今天知道的

$$1+3+5+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2$$

形式，在文献上的记载是描述成形如



从 1 开始连续若干个奇数之和是正方形数的形式。[1]

① 萧文强. 数学证明. 南京：江苏教育出版社，1990 年版，P6.

为了强调上面的论点，萧文强还引用了美国数学家怀特(Wilder)说的话："我们不要忘记，所谓证明，不只在不同的文化有不同的含意，就连在不同的时代也有不同的含意。"①因此，数学的要旨是其推理严谨性，并不在于它采取什么推理方式。在一切推理方式里，因为数学"看中"了演绎证明具有这样的严谨性，即它不但能够保证采用此方式的数学会使其推理更加严密，从而使其结论明确，增强人们的信念，而且它保证了数学能够向更抽象的方向发展，深化人们对数学的认识和理解，所以数学最后才采取了演绎化证明范式的。然而即使如此，数学只是在以后的发展中把逻辑推理看作是检验自己的发现和整理自己的手段，并没有把它当作在自己创造性活动中运用的唯一手段。无论数学怎样抽象发展，数学工作者，特别是优秀数学家们，他们使用着包括"看呀!"在内的一切推理手段，有时把直观推测、随机推测(关于它们的意义，以后要专门论述)，当作主要推理方式，借以发现新的数学事实，创造新的数学发明，甚至还借助于非理性的力量，在冥想中接受某些启示。也就是说，数学在推理严谨性的要求下，发展着人类一切推理能力，仅仅为着结论的明确性，最后才采用逻辑演绎作为理性的一种保证和批准作用。由于数学成品最终形态是逻辑推理，导致人们看不到它被发现、被创造的艰难的推理历程，也看不到为了获得它，人们使用的非逻辑甚至是非理性的手段，再加上我们的传统数学教学，恰好忽略了有关直观推理、形象思维方面的训练，更造成了人们的错觉。正如房屋建造好了以后，拆去了一切脚手架，使得人们错认为这个建筑物是"逻辑"地一个房间一个房间建造出来的一样。

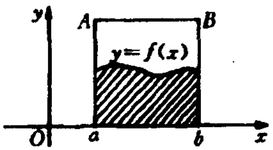
为了说明问题，我们举一些实例说明在人类优秀的数学活动里具有的非逻辑特性。

---

① 萧文强. 数学证明. 南京：江苏教育出版社，1990 年版，P5.

1. 数学推理的直观性

设 $f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 是连续函数，计算由 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$，$y=0$ 四条曲线所围成的阴影图形的面积。



直观上可以这样考虑，作一个包括该图形在内的矩形，比如矩形 $AabB$，现在向 $AabB$ 内部大量随机投点，可以统计落进阴影内部随机点的频率，即落进阴影部分的点数和落进矩形总点数之比例。该频率可以作为阴影部分面积和矩形 $AabB$ 面积之比的近似值，由于 $AabB$ 的面积容易算出，所以阴影部分的面积，即积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的值便可近似求出。这个直观想法，运用电子计算机可以变成现实，它的理论基础便是概率论中有关的大数定律。现在通过概率论的想法构造模型从而实现数值计算的方法，随着电子计算机的发展，已形成一种新的计算方法——概率计算方法，亦称蒙特卡洛方法。该方法在许多方面都发挥了很大作用。

2. 数学推理的艺术性

微积分的创立，说明数学创造活动有时类似于人类的艺术活动，根本置逻辑于不顾而用形象进行思辨，完全凭借想象寻找数学的正确结果。

例如，牛顿考虑函数 $y=x^n$，他为了求出 y 或者 x^n 的流数（即导数），设 x“由流动”成为 $x+0$，这时，x^n 就成为

$$(x+0)^n=x^n+n\cdot 0\cdot x^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}\cdot 0^2x^{n-2}+\cdots$$

而 x 与 y 的增量的比，即0和 $n\cdot 0\cdot x^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}\cdot 0^2x^{n-2}+\cdots$ 的比，等于(都用0来除)：

$$1 \text{ 和 } nx^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}\cdot 0x^{n-2}+\cdots \text{的比}$$

“现在设增量消失，它们的最后比就是”

$$1 \text{ 比 } nx^{n-1}$$

因此，x 的流数和 x^n 的流数的比就等于 1 比 nx^{n-1}，用今天的术语就是说 y 对于 x 的变化率是 nx^{n-1}。这是最初增量的最初比。牛顿利用最初和最后比的方法，来创造他的微积分理论。同样，莱布尼茨也借助形象思维，利用无穷小的非零量来建立微积分理论，因而与牛顿一样也是概念含糊的。例如他有时候把无穷小量 dx 和 dy 描述成正在消失的或者刚出现的量，与已经形成的量相对应。这些无穷小量不是 0，但小于任意有限的量。有时他求助于几何，说，高阶微分和低阶微分相比，如同点和直线相比一样，又说 dx 比 x 如同点比地球，或地球的半径比宇宙的半径一样。诸如此类，不一而足。这些类似艺术的说法，虽然缺乏逻辑严密性，但是它并没有影响牛顿、莱布尼茨等人对新思想的信念，他们宣告新科学诞生了，而且他们直观想法还启发后人创立了严密的极限理论，从而为微积分找到了坚实的逻辑基础。①

3. 数学推理的猜测性

例如形式为 $\frac{1}{\pi}\int_a^b \varphi(z)\frac{\sin mz}{z}dz$ 的积分称作狄义赫利积分，其中 $\varphi(z)$ 在区间 (a,b) 内满足狄义赫利条件。因为当 m 很大时，函数 $\frac{\sin mz}{z}$ 的符号改变的很快，而当 z 接近于零时，这函数取很大的

① M·克莱因. 古今数学思想(第二册). 北京大学数学系数学史翻译组译. 上海：上海科学技术出版社，1979，P74，P100.

值。如果回忆$\int_0^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\frac{\pi}{2}$，我们应该猜测到有如下结果：

1. 若 $a=0$，而 $b>0$，则当 m 以任何方式无限增加时，狄义赫利积分有极限$\frac{1}{2}\varphi(+0)$；

2. 若 $a=0$，而 $b<0$，则这个极限等于$\frac{1}{2}\varphi(-0)$；

3. 若 $a<0$，而 $b>0$，则极限等于$\frac{\varphi(-0)+\varphi(+0)}{2}$；

4. 若 a 与 $b>0$ 或 a 与 $b<0$，则所述极限等于零。

还不仅如此，该结果的证明方法，也与这个猜测有关，即把猜测结果时所用的简单推理想法精确化即得到本结果的逻辑证明。这个引论在富里叶级数研究中起着重要作用。

数学推理中充满了大量类似的猜测活动，可以这样说，没有猜测，数学研究将要失去目标，数学研究就会陷入盲目状态，不要说出成果，就是连要思考什么，也是不得而知了。

4. 数学推理中的实验性

许多优秀数学家，他们运用实验方法曾经获得过许多重大发现。例如高斯对素数表进行实验研究，发现比值$\frac{A_n}{n}$渐近于$\frac{1}{\log n}$（这里和本书以后符号“log”皆指自然对数），这里 A_n 表示从 0 到 n 之间素数的个数：

n	$\frac{A_n}{n}$	$\frac{1}{\log n}$	$\frac{A_n}{n}/\frac{1}{\log n}$
10^3	0.168	0.145	1.159
10^6	0.078498	0.072382	1.084
10^9	0.050847478	0.048254942	1.053
…	……	……	…

素数个数的平均分布特性可以用对数函数来描述，表面上看

来毫无联系的两个数学概念，通过实验竟然如此密切地沟通起来，这说明数学推理中也可以采用自然科学的方法，即用理性加实验方法，寻找数学的结果。当代英国数学家D·A·约翰逊指出："数学家用以发现新思想的方法之一是进行实验。"①特别是随着电子计算机等现代科学技术的出现和发展，实验方法的地位不断提高，还出现了以实验方法为主的称为实验数学的新学科，该学科的发展对数学今后的影响现在还很难预料。

5. 数学推理的非理性

数学活动中，还存在这样的状态，许多结果的获得，不但别人难明究竟，甚至连作者本人也无法说出所以然来。这时，数学推理中充满了许多非理性因素，好像冥冥之中，有什么东西在闪现、在启示，使得作者获得灵感和顿悟。最显著的例子是印度的数学奇才拉玛努扬的众多发现。拉玛努扬知识的局限和知识的深刻都同样地令人惊奇。例如，一方面，他可独立地发现ζ函数的性质，研究解析函数的尖端问题；另一方面他对复变量函数却只有一个模糊的认识。他似乎不知道严格推理是什么，只是凭借感觉得心应手地交替使用论证、直观和归纳。他的论文仅仅是些没有证明或只作直观推断的式子。例如他写的算式：

$$\frac{\sqrt{3}-1}{1}-\frac{(\sqrt{3}-1)^4}{4}+\frac{(\sqrt{3}-1)^7}{7}-\text{etc}$$
$$=\frac{\pi}{4\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\log\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$$

和举$e^{\pi\sqrt{163}}$这个数，作为接近整数的无理数的例子（实际上，算到30位，答案是262537412640768743.999999999999；小数点后接连出现了12个9，下一个数字是2，才不是9）。这种出神入化的对数

① D·A·约翰逊等. 大家学数学. 周焕山等译. 北京：科学出版社，1980，P9.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com