



数学135系列

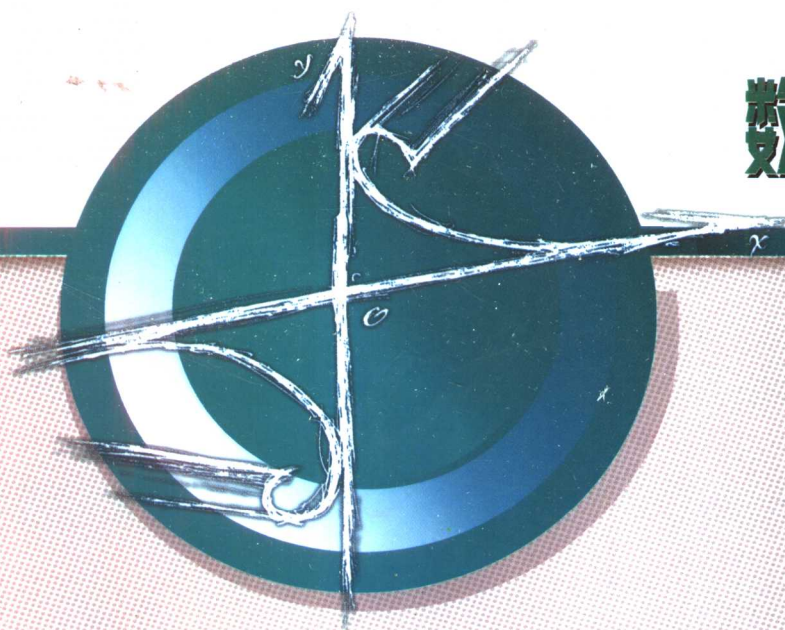
2008版

数学考研

典型题

主 编 龚冬保

数学三和数学四



网上提问 免费答疑

龚冬保教授网上答疑 解除你复习中的困惑



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

(2008 版)

数学考研典型题

(数学三和数学四)

主 编 龚冬保

副主编 魏战线 张永怀 魏立线

西安交通大学出版社

• 西安 •

内 容 简 介

本书自 1999 年问世以来,2008 版是最新修订版,也是本书第 9 版.由于本书的例题和练习题精典,所以在本书问世后的 8 年中,每年均以高分覆盖当年考题,深受考生欢迎.例如 2000 年,书中 36 道题命中考题中非客观题(大题)27 道(次)(数学一,8 题 49 分;数学二,7 题 44 分;数学三,6 题 41 分;数学四,5 题 44 分);2001 年覆盖考题 66 道(次)332 分(数学一 68 分,数学二 90 分,数学三 83 分,数学四 91 分);2002 年覆盖考题 338 分(数学一 87 分,数学二 91 分,数学三 81 分,数学四 79 分);2003 年覆盖考题 561 分(数学一 142 分,数学二 139 分,数学三 142 分,数学四 138 分);2004 年覆盖数学一试卷 136 分;2005 年(数学一分册)覆盖数学一 135 分;2006 年覆盖数学一 146 分.

本书由四部分组成:第一部分是考卷分析:对新“考试大纲”问世后 2005~2007 年的数学考研考卷作了列表分析,将每套考卷的内容覆盖、数学能力、认知水平及难度都量化了;第二部分是应试对策:讲的是复习备考及身临考场的策略;第三部分是典型题选讲与练习:选了 1500 余道题,其中 500 多道例题(包含了往届的考题),讲解采用分析、注释、一题多解等讲法,讲解解题的方法与技巧,所有练习题均给出了详细解答;第四部分是考题分析:龚冬保教授每年都有一篇专文,深入剖析当年的试题,指出命题的动向.

本书可供准备考研的读者使用,也可供大学数学教师参考.

西安交通大学出版社考研图书网:kaoyan.xjtpress.com

图书在版编目(CIP)数据

数学考研典型题—2008 版(数学三、四)/龚冬保等编著.
—9 版. —西安:西安交通大学出版社,2007.5
ISBN 978-7-5605-1969-2

I. 数… II. 龚… III. 高等数学-研究生-入学考试
—解题 IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 025298 号

书 名	数学考研典型题—2008 版(数学三和数学四)
编 著	龚冬保 魏战线 张永怀 魏立线
出版发行	西安交通大学出版社
地 址	西安市兴庆南路 10 号(邮编:710049)
电 话	(029)82668357 82667874(发行部) (029)82668315 82669096(总编办)
印 刷	陕西丰源印务有限公司
字 数	697 千字
开 本	787mm×1092mm 1/16
印 张	22.5
版 次	2007 年 5 月第 9 版 2007 年 5 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5605-1969-2 / O·225
定 价	32.90 元

版权所有 侵权必究

2008 版 前 言

——从 2007 年考题中的一道证明题谈起

仔细分析 2007 年的数学考研题,可以感到具体的题目并不难,但整卷却“难”!主要是那道四套数学试卷共用的“难题”——设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, 证明:存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$ ——影响了整卷. 这道题多数考生知道作辅助函数 $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, 由题设 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, 要证明 $\varphi''(\xi) = 0$, 便需要在 (a, b) 内再找 $\varphi(x) = 0$ 的一个点. 这要用 $f(x), g(x)$ 在 (a, b) 内有相同的最大值及介值定理, 这个“弯”拐得有点大, 缺乏创见的同学很难拐这个弯. 许多同学在考场苦苦思索而不得其解, 严重挫伤了考生的自信心, 耗费了宝贵的时间. 致使此题后面几乎都是中等以下的题也成了“难”题, 并且无暇检查前面已做的题. 因而我们说这一道题使整卷变“难”了!

也有考生早早地放弃了这道题, 集中精力做其它题, 考了个高分! 因此, 我们觉得有必要在此向广大读者再一次强调我们提出的“凡是考研的基本题都要会做; 凡是会做的题都不做错”这两个“凡是”. 在考试中, 遇到不会做的难题要敢于放弃, 集中精力把会做的题的分数拿下, 像这次考 135 分也不是不可能; 在平时复习时, 反复练习自己能学会的题, 而不纠缠于几道难题, 可以提高复习效率, 增强复习效果. 这就是两个“凡是”的涵义, 实质是要紧扣“考试大纲”, 练好基本功.

我们编写的“精讲精练”、“典型题”或“模拟试卷”也都是遵循上述原则写的, 着重于讲解考研的基本概念、基本理论和基本的方法, 尤其侧重于解题的思路和方法. 本书更强调解题的方法、技巧与基本功之间的联系, 指明“熟能生巧”的原由.

回到今年那道最难的题, 我们可以给出多种解法, 提示如下:

解 1 设 $f(x_1) = g(x_2) = M$ 是 $f(x), g(x)$ 在 (a, b) 内的相同的最大值. 若 $x_1 = x_2$, 则 $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ 在 a, x_1, b 已有三个零点, 命题可证; 若 $x_1 \neq x_2$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $\varphi(x_1) = f(x_1) - g(x_1) > 0$, $\varphi(x_2) = f(x_2) - g(x_2) < 0$, 由介值定理得, 存在 $\eta \in (x_1, x_2)$, 使 $\varphi(\eta) = 0$, 命题得证.

解 2 同上 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, $\varphi(x_1) > 0$, $\varphi(x_2) < 0$, 因此 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 内有最大值点 η_1 和最小值点 η_2 , 且 $\varphi'(\eta_1) = \varphi'(\eta_2) = 0$, 在 $[\eta_1, \eta_2]$ 上对 $\varphi'(x)$ 用罗尔定理得, 存在 ξ 使 $\varphi''(\xi) = 0$.

解 3 (用泰勒公式) $\varphi(a) = \varphi(\eta_1) + \frac{1}{2} \varphi''(\xi_1)(\eta_1 - a)^2$

$$\varphi(a) = \varphi(\eta_2) + \frac{1}{2} \varphi''(\xi_2)(\eta_2 - a)^2$$

故 $\varphi''(\xi_1) < 0$, $\varphi''(\xi_2) > 0$. 由达布中值定理知, 存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, 使 $\varphi''(\xi) = 0$ (用到 $\varphi'(\eta_1) = \varphi'(\eta_2) = 0$).

解 4 由 $\varphi'(\eta_1) = 0$ 及 $\varphi''(\eta_1) \leq 0$; $\varphi'(\eta_2) = 0$ 及 $\varphi''(\eta_2) \geq 0$. 若 $\varphi''(\eta_1)$ 和 $\varphi''(\eta_2)$ 中有一个等于 0, 问题得证. 若 $\varphi''(\eta_1) < 0$, $\varphi''(\eta_2) > 0$, 由达布中值定理知, 存在 $\xi(\eta_1, \eta_2)$ 使 $\varphi''(\xi) = 0$.

其中解 1、解 2 用到闭区间连续函数的“介值定理”和“最值定理”; 解 3 和解 4 用到的达布中值定理, 在我们的书中均有介绍. 由此启发读者还不难得出本题的其它解法.

本书已出到第 9 版了, 是读者的关爱, 使本书越改越好, 但由于种种原因, 书中的缺点和差错仍在所不免, 恳请读者不吝赐教.

本书自出版以来得到西安交通大学出版社的支持, 我们在此表示诚挚的谢意!

编 者

2007 春, 于西安交大

第1版前言

(2007年修订)

每当我们上了数学考研辅导课后,总有不少同学建议我们写一本考研辅导的书.在考生朋友不断地鼓励和期盼下,我们终于写成了此书,希望它能成为众多考生的一个好朋友,陪伴着他们去数学考场“潇洒走一回”.

通过目录,读者可以了解到本书的特点:第一部分(第1章)是考卷分析.我们对2005至2007三年的考卷作了列表分析.通过这些表格,将每套考卷的内容覆盖、数学能力、认知水平及难度都量化了.只要看看六张表格中的数字,就能知道每套考卷主要考些什么.比如在数学能力方面,计算题基本上要占80分左右;在认知水平上,要求“理解”水平的题在一半左右;在难易程度上,中档题占一半左右,等等.这样,您看了本书第1章应当对数学考试“心中有数”了.进一步,如果您藉助我们设计的表格,按照自己的水平,去独立分析一两套试卷,那么就应当如何去准备这场考试了.因此,第1章是作复习前准备必不可少的.第二部分(第2章)是应试对策,讲的是复习迎考及身临考场的策略.在有一定数学水平的基础上,能不能考出理想成绩,就要看您的发挥了,如何能发挥好,应试策略是关键.而“策略”又是最容易被人们忽视的.“考试又不是打仗,讲什么策略”?岂不闻考场如战场,策略往往是成败的关键.我们写这一章也是个尝试,希望能引起考生对策略问题的重视.其实,对策是人们干什么事都应考虑的,所谓“优化运筹”不就是要寻找最优对策吗?有了好的复习迎考对策,在此基础上,订一个切实可行的计划,就可以帮助你以高效率和好效果较轻松地争取好成绩.第三部分(第3~12章)是典型题的选讲与练习,这是本书的主要部分.我们选了1500多道题,其中500道例题,采用分析、注释、一题多解等讲法,讲解解题的方法与技巧,所有练习题均给出了答案与提示.要想考个好成绩,关键是提高解题能力.我们的书主要围绕基本运算和推理能力、灵活善变的解题技巧、综合运用所学知识及提高应用意识来选题、讲题和布置练习题的.我们不主张单纯“猜题”,认为只要内容覆盖面全,主要方法都练到了,就能考好,比“猜题”更稳妥,而且有利于提高数学素养;第四部分(第13章)是模拟题,数学一和数学三各两套.在复习时,请先不要看模拟题,复习完临考前再用这两套题来进行两次“热身”.用三小时做一套题,看看自己究竟如何,最后找找差距.值得说明的是,本书中模拟题也有特色,它是以“从难、从严、从实战”出发设计的.每套试卷比正式考卷更难些,综合题、应用题多些,读者如能在三小时内将我们提供的每套考卷完成,并能获得90分以上的平均成绩,那么,上了考场,正常发挥也一定能考90分以上.但您如果提前看过了题目,再去效果就不好了.

以上是我们编写本书的主要想法,但总觉得编写仓促,书中可能会有不少的问题和漏洞,恳切地希望读者多多批评指正.

感谢西安交通大学出版社的支持,使这本书能以面世,感谢关心与鼓励我们的朋友们!

编者

2007.4于西安交大

(因龚冬保教授主编的《数学考研模拟考试试卷》已单独出版,故本书第四部分取消.——出版者注)

目 录

2008 版前言

第 1 版前言(2007 年修订)

第 1 章 考卷分析	(1)
1.1 分析的必要性	(1)
1.2 微观分析举例	(1)
1.3 宏观分析	(5)
1.4 小结与预估	(9)
第 2 章 应试对策	(13)
2.1 全面复习 把书读薄	(13)
2.2 突出重点 精益求精	(14)
2.3 基本训练 反复进行	(17)
2.4 探索思路 归纳方法	(19)
2.5 制定目标 增强信心	(21)
2.6 稳扎稳打 细心应付	(22)
2.7 机动灵活 定能潇洒	(23)
第 3 章 函数 极限 连续	(25)
3.1 函数 极限	(25)
3.2 连续函数	(32)
练习题	(33)
练习题解答	(36)
第 4 章 一元函数微分学	(41)
练习题	(57)
练习题解答	(62)
第 5 章 一元函数积分学	(74)
5.1 不定积分	(74)
5.2 定积分及其计算	(79)
5.3 积分的证明及应用例题	(87)
练习题	(95)
练习题解答	(100)
第 6 章 多元函数微积分学	(109)
6.1 极限、连续、偏导数及微分	(109)
6.2 多元函数微分法	(111)
6.3 多元函数微分应用	(119)
6.4 二重积分	(123)
练习题	(134)

练习题解答	(143)
第 7 章* 无穷级数	(155)
练习题	(162)
练习题解答	(163)
第 8 章 常微分方程与差分方程	(167)
8.1 一阶微分方程及其应用	(167)
8.2* 高阶微分方程及其应用	(173)
8.3* 一阶常系数线性差分方程	(176)
练习题	(177)
练习题解答	(179)
第 9 章 线性代数	(182)
9.1 行列式	(182)
9.2 矩阵	(189)
9.3 向量	(204)
9.4 线性方程组	(212)
9.5 特征值与特征向量	(231)
9.6* 二次型	(247)
练习题	(256)
练习题解答	(265)
第 10 章 概率论与数理统计	(279)
10.1 随机事件与概率	(279)
10.2 随机变量及其概率分布	(283)
10.3 二维随机变量及其概率分布	(289)
10.4 随机变量的数字特征	(295)
10.5 大数定律和中心极限定理	(301)
10.6* 数理统计的基本概念	(303)
10.7* 参数估计	(306)
10.8* 假设检验	(312)
练习题	(314)
练习题解答	(321)
附录 A 对 2001 年工学数学考研试卷的浅析	(331)
附录 B 2003 年数学考研试卷分析	(333)
附录 C 加强基本功训练与综合能力的训练	(338)
附录 D 从 2005 年考研的数学试题谈起	(345)
附录 E 从近几年考研数学试题谈起	(350)

第1章

考卷分析

依据教育测量学理论,本章对以往一些典型试题作了深入剖析,又对最近三年的经济类考卷进行了定量分析,以使考研同学较深入了解考研试卷的主要特征.



1.1 分析的必要性

为什么要分析已考过的试卷?不少考生甚至觉得刚考过的题肯定不会再考了,对分析已考过试卷的必要性持怀疑态度,因此,我们先简单说一下分析的必要性.

考试是一种心理测量,一份考卷好比一杆“秤”.比如您上集市买菜,总要先看看秤一样,您准备考研究生,就得先分析考卷,看看在考试内容、考试难度、考题份量、认知和能力层次等等在每份考卷中是如何体现的,摸一摸近几年考卷的底,然后再制订适合自己的应试策略,从而减少复习迎考的盲目性.

对于考研试卷分析的方法,我们分为“微观分析”和“宏观分析”两种.所谓“微观分析”,就是对试卷中每道试题都要认真作,边作边分析这道题的考点,解这个题的思路及主要方法是什么,这一类题在考研中的地位等等.在“微观分析”的基础上进一步作“宏观分析”,我们的做法是,给每份试卷有一个表格,将这份试卷中的每道题的属性用数量表示在相应的空格之中,一份试卷一张表,只要看到表格中的数据,不必看具体的试卷本身,就可以了解这份试卷的考点分布、题型结构及整卷难度等等.

本章对试题和试卷的分析,不仅仅是将分析结果告诉读者,更重要是希望读者学会本书介绍的分析方法,结合自己的实际,针对性更强地去独立分析自己准备投考的那一类考卷.分析过去是为了预测未来作到对数学考研“心中有数”.



1.2 微观分析举例

例 1.1 我们试比较 2004 年工学和经济学的两道相似的试题:

(1) (2004,一、二) 设 $f(x)$ 连续,且 $f'(0) > 0$,则存在 $\delta > 0$,使().

(A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 单调增.

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 单调减.

(C) 对 $\forall x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$.

(D) $\forall x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$.

(2) (2004,三、四) 设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 连续,且 $f'(a) > 0, f'(b) < 0$,则下列结论中错误的是().

(A) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f(x_0) > f(a)$. (B) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f(x_0) > f(b)$.

(C) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f'(x_0) = 0$. (D) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f(x_0) = 0$.

解 (1) 选(C) 由 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} > 0$,知存在 $\delta > 0$,当 $0 < x < \delta$ 有 $f(x) - f(0) > 0$.故(C) 正

确.

(2) 选(D), (A)(B) 的正确性即是(1) 之选项(C). 至于(C) 的正确性可用连续函数的介值定理; 故只有(D) 的结论是不对的, 故选(D).

比较这两道题(1) 中仅有一点的导数 $f'(0) > 0$ 的假设; (2) 中设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 而(2) 中的选项(A), (B) 均可用到(1) 的概念, 即只要对导数概念清楚就行了. 在(1) 中若假设 $f'(x)$ 在 0 点连续, 那么选项(A) 也是对的. 证明是这样. 由 $f'(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$ 故存在 $\delta > 0$, 在 $(0, \delta)$ 上 $f'(x) > 0$. 因此 $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 上单调增. 因此(2) 的假设太强: 用 $f'(x)$ 的连续性由 $f'(a) > 0$ 知存在 $\delta_1 > 0$, 在 $(a, a + \delta_1)$ 上 $f(x)$ 单增. 当然有 $f(x_0) > f(a)$; 由 $f'(b) < 0$ 知存在 $\delta_2 > 0$, 在 $(b - \delta_2, b)$ 上 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减, 有 $f(x_0) > f(b)$ 十分简单. 因此(1) 题要难些, 且选项(A) 有迷惑性, 作这样的题要求概念清楚, 并直接证明(C) 的正确性; 而(2) 较简单, 用排除法较好因为(A)、(B)、(C) 正确的结论容易证明.

顺便指出如将(2) 题的假设改成 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在. 其它不变那么选项(A)、(B)、(C) 中结论的正确性正是本书例 4.34(达布中值定理) 的证(1). 读者不妨查读一下, 是完全一样的.

至于(2) 的选项(D) 的结论未必正确可以看一个很简单的例子: 设 $f(x) = 2 - x^2$. 在 $[-1, 1]$ 上, $f'(-1) = 2 > 0$, $f'(1) = -2 < 0$, 但在 $[-1, 1]$ 上 $f(x) \geq 1 > 0$, 不存在 0 点.

在考场上作这两个题用不了几行, 但剖析起来, 尤其是对照剖析, 使我们对照极限、导数及连续性、单调性都有更深刻的领会, 甚至变化一下(2) 题, 还可引领到“达布中值定理”这就是举一反三, 触类旁通的意思, 只线于会不会做这两道题去做题, 就不会有多大的收获. 这是我们说的微观分析的方法.

例 1.2 (2001, 一) 设 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 可导的充要条件是

(A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cosh h)$ 存在. (B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在.

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sinh h)$ 存在. (D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)]$ 存在.

解 选(B). 本题是概念性较强的题. 只要对导数的定义有透彻理解, 就能容易用排除法排除不正确选项. 如, 由定义知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$. 而选项(A)、(C) 中, 相当于 x 的因式是 h^2 , 只能取正数趋于 0, 不能作导数存在充要条件; 而选项(D) 中的极限存在与 $f(0)$ 的取值无关. 也不能作可导充要条件. 因而只有(B) 是正确的选项. 不必举反例, 也不要会证明选项(B) 的正确性.

作为平时的练习, 深入分析本题, 则可以有许多启发. 首先, 我们来举反例否定三个不正确选项. 对(A)、(C), 可用同一反例: $f(x) = |x|$, 满足 $f(0) = 0$, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cosh h)}{h^2} = \frac{1}{2}$ 存在及 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sinh h)}{h^2} = 0$ 存在, 但 $f(x)$ 在 0 点不可导, 说明(A)、(C) 选项均不对; 对于(D), 令 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 也有 $f(0) = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(h)}{h} = 0$ 存在, 而 $f(x)$ 在 0 点间断, 故不可导. 因此(D) 也被排除. 仿此, 读者还可自己举出与上面不同的反例. 顺便提及, 本书的第 4 章之例 4.3、4.4、4.5 及其注释, 与本题的考点及分析问题方法以及在那里我们列举的反例, 均与本题是一致的. 由于导数概念的重要性, 此书的每一版都保留了这几个题. 读者可对比着看, 以加深对导数概念及其存在的充分条件、必要条件及充要条件的理解.

其次, 我们来证明选项(B) 的正确性.

必要性. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h)}{1 - e^h} \cdot \frac{1 - e^h}{h} = -f'(0)$ 存在.

充分性. 对任意 $x \rightarrow 0$, 取 $|x| < 1$, 令 $1 - e^h = x$. 或 $h = \ln(1 - x)$. 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{x}{\ln(1 - x)}$

于是 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h)}{h}$ 存在即 $f'(0)$ 存在.

细心的读者会问 由 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cosh h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cosh h)}{1 - \cosh h} \cdot \frac{1 - \cosh h}{h^2}$ 令 $1 - \cosh h = x$, 则 $x \rightarrow 0$. 不是也有

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cosh h)}{h^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{2}$ 存在吗. 不是同样证明了选项(A) 也是正确的吗?! 问题在哪里?! 原来, 令 $1 - \cosh h = x$, 由 $h \rightarrow 0$, 只能有 $x \rightarrow 0^+$. 因此, 我们知道, 选项(A) 是 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处右导数存在的充要条件, 因此, 我们举反

例只要举 $f(x)$ 在 $x=0$ 点右导数存在而导数不存在的例子;进一步看选项(C), 我们知道当 $h \rightarrow 0$ 时, $h - \sinh$ 是与 h^3 同阶的无穷小, 因而 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sinh)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sinh)}{h - \sinh} \cdot \frac{h - \sinh}{h^2}$. 只要当 $h \rightarrow 0$ 时, $h \frac{f(h - \sinh)}{h - \sinh}$ 的极限存在.

$f'(0)$ 可以是无穷大量. 于是令 $f(x) = x^{2/3}$. 显然 $f(0) = 0$, $f'(0) = \infty$ 不存在. 但 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sinh)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h - \sinh)^{2/3}}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h - \sinh}{h^3} \right)^{2/3} = \left(\frac{1}{6} \right)^{2/3}$ 存在.

至于选项(D), 如果我们令 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 是有理数} \\ 1, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$, 那么, 总有 $f(0) = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(h)}{h} = 0$ 存在, 但 $f(x)$ 处处间断!

像这样去分析一道题, 必定能作到举一反三、触类旁通, 做一个题胜似做一类题.

例 1.3^① (2002, 一) 设 $u_n \neq 0 (n = 1, 2, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$,

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$ ()

(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 收敛性由所给条件不能判定.

解 选(C). 本题值得分析之处在于不少考生以为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$ 是交错级数, 且 $\frac{1}{u_n}$ 与 $\frac{1}{n}$ 是等价无穷小, 由莱布尼茨判别法它收敛, 如加绝对值则发散. 故选(C). 这是不对的, 理由是设 $a_n = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}$, 由已知条件, 无法证明 a_n 单调减. 而用莱布尼茨法则这一条是不可少的. 沿这个思路去想这个题, 反倒是学习好的学生会选(D), 因为他无法证明 a_n 的单调性.

其实要证明此级数收敛, 应当用部分和:

$$S_n = \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right) - \left(\frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} \right) + \left(\frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} \right) \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{u_n} + \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_1} + \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{u_1}$ 存在, 从而级数收敛, 且其和为 $\frac{1}{u_1}$.

因此, 此题如改成下面两种题更好.

其一, 仍是选择题, 只要改为“设 $u_n \neq 0 (n = 1, 2, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{u_n}$ ()”仍为原题的 4 个选项. 那么正确答案是(D), 而不是(C).

为了排除选项(C), 我们可令 $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln(n+3)}$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$, 但

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{u_n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+3)},$$

前一个和式收敛, 后一个和式发散, 故发散. 这样一改对学习好的学生有利. 而且选项(C)有迷惑性.

其二, “设 $u_n \neq 0 (n = 1, 2, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$ 条件收敛, 并求其和.

改为这样的非客观题, 应当是较有水平的一道好题.

分析以往的试题, 主要应从其考点, 解题的思路与方法方面作深入的探讨, 这样会发现, 以往考题有许多是相同的.

例 1.4 (1) (2000, 二) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}$, $B = (E + A)^{-1}(E - A)$, 则 $(E + B)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) (2001, 一) 设 $A^2 + A - 4E = 0$, 则 $(A - E)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

^① 注: 带“*”号的题或章、节, 表示数学四不考的内容.

(3) (2002, 二) 已知 A, B 为 3 阶矩阵, 且 $2A^{-1}B = B - 4E$.

(i) 证明 $A - 2E$ 可逆;

(ii) 若 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求 A .

解 我们只要做第(3)题, 读者可妨此做(1)(2)两题.

(3) (i) 证. 用 A 左乘所给等式两边得 $2B = AB - 4E$. $(A - 2E)B - 4A = 0$, 要证 $A - 2E$ 可逆, 故设法分出 $(A - 2E)$ 的因式即得 $(A - 2E)B - 4(A - 2E) = 8E$. 或 $(A - 2E)(B - 4E) = 8E$.

故 $A - 2E$ 可逆, 且 $(A - 2E)^{-1} = \frac{1}{8}(B - 4E)$.

(ii) $A - 2E = 8(B - 4E)^{-1}$, 用分块矩阵的方法易得

$$8(B - 4E)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

而 2003 年数学四和数学二、2004 年数学一、二又考了三道类似题.

例 1.5 (1) 设 $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 及 $AB = 2A + B$, 则 $(A - E)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(2) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 及 $A^2B - A - B = E$, 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 且 $ABA^* = 2BA^* + E$, 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 (3) 由 $|A| = 3$, 将已知等式两边右乘以 A 得 $3AB = 6B + A$. $3(A - 2E)B = A$.

取行列式得 $3^3 |A - 2E| |B| = |A|$, $|B| = \frac{1}{9}$.

(2) 题请读者自行完成.

像这样从考点、思路、方法去分析, 可将许多看似不一样的题归之为同一类的题.

再看几道考点、思路、方法相同的高数题.

例 1.6 (2001, 三、四与 1991, 一、二)

(1) (2001, 三) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(1) = k \int_0^{1/k} xe^{1-x} f(x) dx$ ($k > 1$), 证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$.

(2) (2001, 四) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(1) = 3 \int_0^{1/3} e^{1-x^2} f(x) dx$, 证明存在 $\xi \in (0, 1)$ 使 $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$.

(3) (1991, 一、二) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $(0, 1)$ 内可导, 且 $3 \int_{2/3}^1 f(x) dx = f(0)$. 证明存在 $c \in (0, 1)$ 使 $f'(c) = 0$.

解 这三道题从考点、思路、解法上也是一样的题. 我们只要解其中一题, 其余两题读者一定能做.

(1) 由 $f(1) = k \int_0^{1/k} xe^{1-x} f(x) dx$, 便知其第一步用积分中值定理. 由积分中值定理得, 存在 $\eta \in [0, \frac{1}{k}]$. 使 $f(1) = \eta e^{1-\eta} f(\eta)$. 再从要证明的结果知, 将用罗尔定理, 区间是 $[\eta, 1] \subseteq [0, 1]$, 辅助函数便是 $F(x) = xe^{1-x} f(x)$. $F(x)$ 显然在 $[\eta, 1]$ 上连续, 在 $(\eta, 1)$ 可导, 且 $F(1) = f(1) = F(\eta) = \eta e^{1-\eta} f(\eta)$. 故由罗尔定理知, 存在 $\xi \in (\eta, 1) \subset (0, 1)$, 使 $F'(\xi) = 0$. 而

$$F'(x) = e^{1-x} f(x) - xe^{1-x} f(x) + xe^{1-x} f'(x)$$

于是 $F'(\xi) = 0$ 即 $\xi f'(\xi) - (\xi - 1)f(\xi) = 0$, 也就是

$$f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi).$$

例 1.7 (2003, 三) 设 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 连续, $(0, 3)$ 内可导, 且 $f(0) + f(1) + f(2) = 3, f(3) = 1$. 证明存在 $\xi \in (0, 3)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

证 由已知 $\frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} = 1$, 及 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 故 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上有最大值和最小值 M 和 m , 从而有 $m \leq \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} = 1 \leq M$, 同介值定理知, 存在 $\eta \in [0, 2]$, 使 $f(\eta) = f(3) = 1$. 于是 $f(x)$ 在 $[\eta, 3]$ 上满足罗尔定理条件, 由罗尔定理知, 存在 $\xi \in (\eta, 3) \subset (0, 3)$ 使 $f'(\xi) = 0$.

与例 1.6 比较之(1) 设 $f(1) = \int_0^{1/k} x e^{1-x} f(x) dx / \frac{1}{k}$, 本题是 $f(3) = \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3}$, 它们都是一个端点的值等于函数在某区间的平均值. 积分中值定理本质上就是平均值定理, 因此, 理解透了, 这两题也是相同的. 这就是我们作微观分析的一种主要方法.

例 1.8 (2007, 一、二、三、四) 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内二阶可导且存在相等最大值, $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

(本题证明见前言)

本题的考点: 介值定理与罗尔定理. 与例 1.6、1.7 一样, 方法也是一样的. 但本题难在要证明 $[f(x) - g(x)]'' = 0$, 主要是证 1, 要用介值定理先找出 $f(x) - g(x)$ 在 (a, b) 内的一个零点. 证 2、证 3、证 4 都用到最值定理, 证 3、证 4 则用到达布定理与泰勒公式. 这些“弯”不是训练有素的同学是拐不过来的. 因此, 我们认为解此题学生要有一定的“创见”(见表 1.3).



1.3 宏观分析

我们用下面的表格, 将考卷的一些特征数量化, 通过一些简单的统计, 就可以了解每套考卷的特点和各套考卷的共性. 值得说明的是, 我们这种分析不是考后的统计分析, 考后的统计分析能评价试卷的“好与差”, 主要提供考试管理人员、命题教师参考, 当然, 也可以提供考生参考. 但那种分析要有足够的样本, 才可以作到分析的客观性. 我们的这种分析是根据自己的教学经验, 对考生水平的估计而作出的. 虽说主观, 却能结合考生实际, 来解释试卷的特征.

先对数据各项目作个简单说明.

各课程的章目是按考研大纲所列内容的次序排列的, 我们将章名限制在四个字以内, 有的章不能用四个字概括则略写. 现在把略写的章名用括号说明如下:

函数极限(连续); 随机事件(和概率); 随机变量(概率分布); 多维(随机变量及其概率)分布; 其余的章目估计不会引起误会, 就不作说明了. 如大数定律一章自然也包含中心极限定理等等. 读者如有不清楚的可参看“考研大纲”.

认知层次一栏中的“简用”是指简单应用, 表示能将有关知识在另一个新环境中进行应用; “应用”是指复杂应用, 表示能将有关知识在两个以上新环境中进行应用.

“期望”是指整卷的难度期望分, 其计算方法见表 1.1 后面的难度分析. 表格中的“分值”填写的是试卷中各章内容在各个类别中所占的分数.

(1) 2005 年数学三、四试卷从表 1.1 看出:

1. 内容分布 一元函数积分题太少, 多元函数积分题多.

2. 数学能力 还是突出了计算能力, 综合题不算多.

3. 认知层次 分布尚好.

4. 难度 期望分由易到难分别为 90%, 75%, 60%, 35% 和 20%, 于是此卷期望分为 $14 \times 90\% + 16 \times 75\% + 65 \times 60\% + 47 \times 35\% + 8 \times 20\%$ 为 84.9, 计算量大. 估计平均分在 64 分左右.

表 1.1 2005 年数学三试卷宏观分析表

课 程	分 值 章 目	类 别	数学能力					认知层次					难 度					合 计
			概念	计算	推理	综合	应用	识记	理解	简用	应用	创见	易	较易	中	较难	难	
微 积 分	函数极限			12					12				4	8				12
	一元微分			8	4	6			4	14					4	8	6	18
	一元积分					2				2							2	2
	多元微积		4	21					21	4				4	12	9		25
	无穷级数		4	9					13						13			13
	微分方程			4					4				4					4
线 性 代 数	行列式																	
	矩 阵		4			8			4	8					4	8		12
	向 量		4						4					4				4
	方程组			13					13							13		13
	特征向量			4					4							4		4
	二次型					5				5						5		5
概 率 统 计	随机事件		2	4				2			4		2		4			6
	随机变量				4				4						4			4
	二维分布			11						11					11			11
	数字特征			11						11					11			11
	大数定律																	
	统计概念																	
	参数估计		4	2				4		2			4		2			6
	假设检验																	
	合 计		22	99	8	21		6	83	57	4		14	16	65	47	8	期望84.9

表 1.2 2005 年数学四试卷宏观分析表

课 程	分 值 章 目	类 别	数学能力					认知层次					难 度					合 计
			概念	计算	推理	综合	应用	识记	理解	简用	应用	创见	易	较易	中	较难	难	
微 积 分	函数极限			12					12				4		8			12
	一元微分			4	4	5	4		8	9					4	8	5	17
	一元积分		4			3				7				4			3	7
	多元微积		4	21			9		34					4	17	13		34
	微分方程			4					4				4					4
线 性 代 数	行列式					2				2						2		2
	矩 阵			4		6			4	6					8	2		10
	向 量			4					4					4				4
	方程组			13					13							13		13
	特征向量					9				9						9		9
概 率 论	随机事件		2	4				2			4		2		4			6
	随机变量					4			4						4			4
	二维分布			11						11					11			11
	数字特征			13						13					13			13
	大数定律		4						4						4			4
	合 计		14	90	4	29	13	2	87	57	4		10	12	73	47	8	期望83.5

从表 1.2 看出:

1. 内容分布 一元函数积分题少,但多元函数积分题多.
2. 数学能力 计算题多,综合题也不少.
3. 认知层次 以理解的题为主.
4. 难度 期望分 83.5,较前两年难些.估计平均分是 63 分左右.

(2) 2006 年数学三、四试卷

表 1.3 2006 年数学三试卷宏观分析表

课程	分 值 类 别 章 目	数学能力					认知层次					难 度					合 计	
		概念	计算	推理	综合	应用	识记	理解	简用	应用	创见	易	较易	中	较难	难		
高等数学	函数极限	4	7				4	7				4		7			11	
	一元微分	8	4	10				8	4	10			4		8	10	22	
	一元积分				4									4			4	
	多元微积		11	4				15					4	7	4		15	
	无穷级数	4	10					14						4	10		14	
	微分方程	4			4			8					4	4			8	
线性代数	行列式																	
	矩 阵	4	4					8				4	4				8	
	向 量			4	13			4	13				4	13			17	
	方程组																	
	特征向量	4	9					4	9					13			13	
概率统计	二次型																	
	随机事件		4						4				4				4	
	随机变量		9							9				9			9	
	多维分布		4						4					4			4	
	数字特征		4					4					4				4	
	大数定律																	
	统计概念																	
	参数估计		13		4			17					4	13			17	
	假设检验																	
	合 计	28	79	18	25		4	97	40	9		8	32	78	22	10	期望 86	

从表 1.3 看出:

1. 内容分布 除一元函数积分学的题少之外,分布较好.
2. 数学能力 应用题少了点.
3. 认知层次 一般.
4. 难度 期望分 86,估计平均分在 85 分左右.

从表 1.4 看出:

1. 内容分布 除一元函数积分学的题少之外,分布较均匀.
2. 数学能力 应用题少了点.
3. 认知层次 一般.
4. 难度 期望分 80,估计平均分要在 82 分左右.

(3) 2007 年数学三、四试卷

表 1.4 2006 年数学四试卷宏观分析表

课 程	分 值 类 别 章 目	数学能力					认知层次					难 度					合 计	
		概念	计算	推理	综合	应用	识记	理解	简用	应用	创见	易	较易	中	较难	难		
高 等 数 学	函数极限	4	10				4	10				4			10		14	
	一元微分	8	11	10				15	14				4	7	8	10	29	
	一元积分	4			4			8					4	4			8	
	多元微积	4	11					11	4			4		7	4		15	
	微分方程	4			4			8						4	4		8	
线 性 代 数	行列式																	
	矩 阵	4	8				4	8				4	8				12	
	向 量			13					13					13			13	
	方程组																	
	特征向量	4	9					4	9						13		13	
概 率 论	随机事件		4					4					4				4	
	随机变量		9	4				4	9				9				13	
	多维分布		4		13			4	13					17			17	
	数字特征		4					4					4				4	
	大数定律																	
	合 计	32	70	27	21		8	8	62			12	37	52	35	10	期望 84	

表 1.5 2007 年数学三试卷宏观分析表

课 程	分 值 类 别 章 目	数学能力					认知层次					难 度					合 计	
		概念	计算	推理	综合	应用	识记	理解	简用	应用	创见	易	较易	中	较难	难		
高 等 数 学	函数极限		8		2		8	2					4	4		2	10	
	一元微分		18	11	2	4	4	16	10		5	4	8	10	2	11	35	
	一元积分	4						4						4			4	
	多元微积		19					19				4		11	4		19	
	无穷级数		10					10					10				10	
	微分方程		4				4					4					4	
线 性 代 数	行列式																	
	矩 阵		4				4						4				4	
	向 量	4					4					4					4	
	方程组		11					11						11			11	
	特征向量		11					4		7				4	7		11	
	二次型	4						4						4			4	
概 率 统 计	随机事件	4						4							4		4	
	随机变量																	
	多维分布	4	15					19					4	11	4		19	
	数字特征																	
	大数定律																	
	统计概念																	
	参数估计		11					11						11			11	
	假设检验																	
	合 计	20	101	11	4	4	30	104	10	7	5	16	24	76	23	11	期望 86.5	

表 1.6 2007 年数学四试卷宏观分析表

课程	分 值 类 别 章 目	数学能力					认知层次					难 度					合计
		概念	计算	推理	综合	应用	识记	理解	简单	应用	创见	易	较易	中	较难	难	
高等数学	函数极限		8		2		8	2				4	4		2		10
	一元微分		18	11	2	4	4	16	10		5	4	8	10	2	11	35
	一元积分	4			5		4	5						9			9
	多元微积			19				19				4		11	4		19
	微分方程		4		5		4	5					4		5		9
线性代数	行列式																
	矩 阵		4				4						4				4
	向 量	4					4					4					4
	方程组		11					11						11			11
	特征向量		11					4		7				4	7		11
	二次型	4						4						4			4
概率论	随机事件	4						4							4		4
	随机变量																
	多维分布	4	15		5			19	5				8	16			24
	数字特征				6			6						6			6
	大数定律																
	合 计	20	71	30	25	4	28	95	15	7	5	16	28	71	24	11	期望 85.4

从表 1.5 与表 1.6 看出:2007 年数学三、四几乎一样,只是数学四较数学三容易些。

1. 内容分布 尚好,一元积分题少了点;概率论中多维分布题偏多些。

2. 数学能力 综合题少了些。

3. 认知层次 应用少了,但增加了有创见的题。不过此题分两问,前一问有提示之意,难度相应降低。

4. 难度 数学三期望分 86.5,试卷较长,估计平均分也在 73 分左右;数学四期望分 85.4,估计平均分在 75 分左右。



1.4 小结与预估

上面 6 张统计表,把 6 套试卷的考试内容、考核的能力、认知层次及难度等,都数量化了。这些数据不但清楚地告诉我们近年来数学考研试卷的结构,而且,如果我们进一步分析这些数据,并将宏观与微观分析相结合,还可以获得更多的有益信息,预测数学考研题的走向,对准备未来的考试心中有数。下面是我们的简单小结与预估。

1. 考试内容

各考卷最大共同点是内容覆盖面大。当然,总有些内容是年年都能考到的,也有些是偶尔考到的,比如线性代数中的行列式、概率论中大数定律与中心极限定理,2001 年曾考过,近三年均未考到。1999 年数学一、三、四均没有线性方程组的考题,而 2000 年均考到了!2000 年数学三、四没考矩阵,2001 年考了。……

2. 数学能力

计算题最多,综合题的比例明显要高。大多数综合题和应用题都要通过计算来完成,因此,强化综合运用数学知识能力及计算基本功的训练是最重要的。下面我们来举 2000 年及 2001 年的两道试题为例。

例 1.9 (2001, 三) 已知抛物线 $y = px^2 + qx$ (其中 $p < 0, q > 0$) 在第一象限内与直线 $x + y = 5$ 相切,且此抛物线与 x 所围成的平面图形的面积为 S 。(1) 问 p 和 q 为何值时, S 达到最大值?(2) 求出此最大值。

解 设抛物线与直线的切点为 (x_0, y_0) (如图)。

$$\text{则} \begin{cases} x_0 + y_0 = 5 \\ y_0 = px_0^2 + qx_0 \end{cases} \quad \text{及} \quad y'|_{x=x_0} = 2px_0 + q = -1.$$

于是 $10 - 2x_0 = 2px_0^2 + 2qx_0 = -qx_0 - x_0 + 2qx_0$

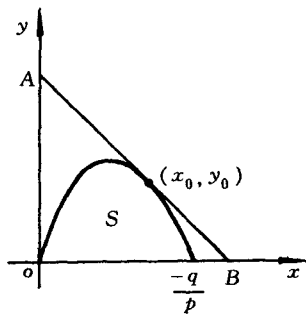
得 $x_0 = \frac{10}{1+q}$. 从而有 $p = -\frac{1}{20}(1+q)^2$.

$$\text{而} \quad S = \int_0^{-q/p} (px^2 + qx) dx = -\frac{q^3}{3p^2} + \frac{q^3}{2p^2} = \frac{q^3}{6p^2} = \frac{200q^3}{3(1+q)^4}$$

只要求 $\frac{q^3}{(1+q)^4}$ 的最大值; 或由 $q > 0$, 求 $\ln \frac{q^3}{(1+q)^4} = 3\ln q - 4\ln(1+q)$ 的最大值.

令其导数为 0 得 $\frac{3}{q} - \frac{4}{1+q} = 0$ 故 $q = 3$. 是唯一的正驻点. 由几何

意义知, $q = 3, p = -\frac{4}{5}$ 时, S 取得最大值. 其最大值 $S_{\max} = \frac{200 \times 27}{3 \times 4^4} = \frac{225}{32}$.



例 1.9 解图

可以看出, 考查基本功的作用体现在用导数求二曲线切点, 从而得到 p, q 关系; 在求 $f(q) = \frac{q^3}{(1+q)^4}$ 的最大点时, 更显出基本功加灵活性的作用; 而当求得 $q = 3$ 时易知, $x_0 = y_0 = \frac{5}{2}$ 是切点的坐标. 即当抛物线切于线段 AB 的中点时, S 达到最大值. 这是符合问题的几何意义的. 这样做, 心中应当很踏实, 2002 年数学三的定积分应用题也与此题类似.

例 1.10 (2000, 三、四) 设向量组 $\alpha_1 = (a, 2, 10)^T, \alpha_2 = (-2, 1, 5)^T, \alpha_3 = (-1, 1, 4)^T, \beta = (1, b, c)^T$. 问 a, b, c 满足什么条件时,

- (1) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一地线性表出?
- (2) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示?
- (3) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 但表示不唯一? 并求出一般表达式.

解 基本功熟练者, 一眼便看出本题实质是问方程组

$$\begin{pmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

何时有一解, 何时无解, 何时有一解但不唯一. 于是最简单的办法是用初等变换:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & -4-a & -2-a & 2-ab \\ 0 & 0 & -1 & c-5b \end{array} \right]$$

因此, (1) 当 $a \neq -4$ 时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一地线性表出.

令 $a = -4$, 得增广矩阵化为

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1+2b \\ 0 & 0 & -1 & c-5b \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1+2b \\ 0 & 0 & 0 & 1-3b+c \end{array} \right]$$

这时, (2) 当 $a = -4$ 而 $3b - c \neq 1$ 时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出. 最后, 令 $3b - c = 1$, 求方程组的通解: 由最后的增广矩阵知 $x_3 = 1 + 2b, 2x_1 + x_2 = -1 - b, x_2 = -2x_1 - 1 - b$, 其中 $x_1 = k$ 是任意实数. 故

(3) 当 $a = -4$, 且 $3b - c = 1$ 时 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示不唯一, 其一般表达式为:

$$\beta = k\alpha_1 - (2k - 1 - b)\alpha_2 + (1 + 2b)\alpha_3 \quad (k \text{ 是任意数})$$

本题只要对增广矩阵的初等行变换的基本功熟练, 可一气呵成.

另外, 2000 年的试题, 在基本概念和灵活性上也有所加强, 是一种值得注意的趋势.

例 1.11 (2004, 四) 设 $y = \arctan e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}}$, 则 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} =$ _____.

解 先变形 $y = \arctan e^x - x + \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x})$.