科学版

研究生教学丛书

应用泛函分析

姚泽清 苏晓冰 郑 琴 王在华 编著

科学出版社
www.sciencep.com

科学版研究生教学丛书

应用泛函分析

姚泽清　苏晓冰　郑　琴　王在华　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是为工学研究生“应用泛函分析”课程而编写的教材，全书共分六章，分别介绍实分析基础、距离空间、赋范空间与Banach空间、内积空间与Hilbert空间、有界线性算子的基本理论、有界线性算子的谱分析等内容. 全书概念简洁，内容紧凑，在强调泛函分析方法的概括性与应用的普适性的同时，突出数学思维方式的训练和数学素养的培养，恢复数学自然、生动、充满活力的本来面目. 书中每节末都附有难易适中的习题，并在书末附有详尽的习题答案，以供科技工作者自学和教师参考使用.

本书的起点低，只需要读者具备高等数学和线性代数的基础知识，可作为工学研究生和应用数学、信息与计算科学、应用物理等专业的本科生的教学用书，也可供对泛函分析方法有兴趣的科技工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

应用泛函分析/姚泽清等编著. —北京：科学出版社，2007
(科学版研究生教学丛书)
ISBN 978-7-03-019848-8

Ⅰ.应… Ⅱ.姚… Ⅲ.泛函分析-高等学校-教材 Ⅳ.O177

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第135117号

责任编辑：姚莉丽 / 责任校对：张怡君
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年9月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2007年9月第一次印刷 印张：15 1/4
印数：1—3 500 字数：289 000

定价：20.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

泛函分析是从变分法、积分方程以及量子物理等的研究中发展起来的数学分支,形成于20世纪30年代.它综合运用函数论、几何学、代数学的观点和方法来研究无限维向量空间(如函数空间)上的泛函、算子及其极限理论,并不断地以其他众多学科所提供的素材来提取自己的研究对象,它在概率论、函数论、连续介质力学、量子物理、最优化理论、控制论和信号处理等学科中都有重要的应用,强有力地推动着其他关联学科的发展.今天,它的空间理论、算子理论和谱理论等已经渗透到不少工程技术性的学科中,成为近代分析的基础之一.

泛函分析是 Euclid[①] 空间上的微积分学和解析几何学的自然延伸,实际上在高等数学中我们已经接触到泛函的概念,只是没有挑明而已.例如,实连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分

$$J(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

就是一个泛函数,它的取值是实数,但它的变元却由实数变成了实函数.这种函数的函数是泛函分析最早研究的对象,并随着求形如

$$J(y)=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

的泛函的极值(即所谓变分法)而发展起来.

历史上最有名的泛函极值问题是 John Bernoulli[②] 在1696年提出的最速降线问题.1697年 John Bernoulli 的哥哥 James Bernoulli[③] 给出了最速降线问题的解答.它的基本问题是这样的:设 O 和 P 是铅直平面 xOy 内的两个点,一质点在重力作用下从 O 点沿一曲线滑落到 P 点,假定无摩擦和其他阻力,曲线呈何形状时其滑落的时间最短(见图0-1)?

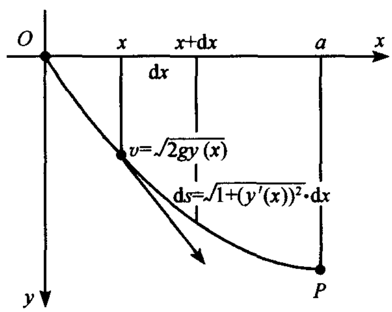

图0-1　最速降线问题

实际上,若设曲线方程为 $y=y(x)$,则总的下降时间为

---

① 欧几里得(约公元前330～前275年),古希腊数学家,欧几里得几何学的创始人.

② 约翰·伯努利(1667～1748年),瑞士数学家,变分法的创始人之一.

③ 詹姆士·伯努利(1654～1705年),瑞士数学家,变分法和概率论的创始人之一.

$$T(y)=\int_L \frac{\mathrm{d}s}{v}=\int_0^a \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v}\mathrm{d}x,$$

再由能量守恒定律

$$\frac{1}{2}mv^2=mgy,$$

$$v=\sqrt{2gy},$$

就有

$$T(y)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^a \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}\mathrm{d}x,$$

此即为 y 的一个泛函. 可以证明,当 y 为摆线(旋轮线)

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$$

时,$T(y)$取得极小值.

随着时间的推移,泛函分析的研究对象由泛函推广到一般的算子,研究范围也遍及分析学的方方面面,并随着线性算子的谱理论与量子力学中的谱分析惊人的一致而确定了自己的地位. 泛函分析成为独立的数学分支的两大标志是:1932 年出版的 Banach① 的《线性算子理论》和 von Neumann② 的《量子力学的数学基础》两部划时代著作.

尽管泛函分析有着浓厚的应用背景,但很多学生在学习过程中却感到其艰涩难懂,这是由于其高度的抽象性造成的. 实际上,以解方程为例,无论是线性方程还是非线性方程,显函数方程还是隐函数方程,常微分方程还是偏微分方程,在泛函分析中都被抽象为算子方程,而算子方程最终又被统一为方程

$$x=Tx,$$

从而使方程的求解问题转化为求算子 T 的不动点问题. 它在抽象过程中丧失了直观,而又在更高层次上恢复了直观,这正是泛函分析的奇妙之处.

泛函分析是一门既能充分体现现代数学思想和方法、体现数学的思维方式和思维过程,又具备较好应用价值的数学基础课程,它为解决物理和工程问题提供必要的数学框架. 为了全面提高工学研究生的数学素养,培养研究生的创新精神、创新思维和创新能力,使学生具备科学的认知能力、严谨的表达能力、熟练的建模能力,我们将泛函分析作为全体工学硕士研究生的公共基础课程,以保持高等教育中科学思维训练的连续性. 为了清晰地描述泛函分析的基本概念、基本理论和基本方法,同时又不增加学生的学习负担,我们按照预备知识、空间理论、算子理论、谱理

① 巴拿赫(1892～1945 年),波兰数学家,Banach 空间理论的创立者.

② 冯·诺伊曼(1903～1957 年),匈牙利数学家,算子代数、博弈论的创始人.

论的基本脉络，删繁就简，化难为易，编写了这部面向工学硕士研究生的《应用泛函分析》教材，也可供具备高等数学和线性代数基本知识的理科专业的本科学生使用. 本书的标准教学时数为 60 学时.

本书在成书过程中得到解放军理工大学训练部和理学院领导与专家的大力支持和帮助，并提出了许多中肯的意见，在此谨向他们表示诚挚的谢意！

由于时间和水平所限，书中错漏之处在所难免，恳请各位专家学者和读者批评指正. 信寄：yzqnj@yahoo. com. cn.

编　者

2007 年 3 月

于解放军理工大学应用数学与物理系

记　　号

A^c	集 A 的补
A°	集 A 的内部
A'	集 A 的导集
$\overline{A}$	集 A 的闭包
$A^\perp$	集 A 的正交补
$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\mathbf{A}$ 的转置
$\|A\|$	集 A 的基数
$A\cup B$	集 A 与 B 的并
$A\cap B$	集 A 与 B 的交
$A\backslash B$	集 A 与 B 的差
$A\times B$	集 A 与 B 的直积
$A\oplus B$	集 A 与 B 的直和
$B(X)$	从 X 到 X 的有界线性算子空间
$B(X,Y)$	从 X 到 Y 的有界线性算子空间
$B(\Omega)$	Ω 上的有界函数全体
$B_r(x_0)$	以 x_0 为中心以 r 为半径的开球
$\overline{B}_r(x_0)$	以 x_0 为中心以 r 为半径的闭球
c	连续统基数 $\|\mathbf{R}\|$；收敛数列空间
$\mathbf{C}$	复数域
$\mathbf{C}^n$	复 n 维 Euclid 空间
$C([a,b])$	$[a,b]$上的连续函数全体
$C^k([a,b])$	$[a,b]$上的 k 次连续可导的函数全体
$C(X)$	从 X 到 X 的紧算子的全体
$C(X,Y)$	从 X 到 Y 的紧算子的全体
c_0	收敛于 0 的数列空间
$d(A,B)$	集 A 与 B 之间的距离
$d(x,A)$	点 x 到集 A 的距离
$d(x,y)$	点 x 与 y 之间的距离
$\mathrm{diam}(A)$	集 A 的直径
$\dim X$	空间 X 的维数

$f(A)$	集 A 在映射 f 下的像集
f^{-1}	映射 f 的逆映射
$f^{-1}(B)$	集 B 在映射 f 下的原像集
f^{+}	f 的正部
f^{-}	f 的负部
$f_n \rightrightarrows f$	函数列$\{f_n\}$一致收敛于 f
$f_n \xrightarrow{w^*} f$	泛函列$\{f_n\}$弱*收敛于 x
$G(T)$	算子 T 的像
$g \circ f$	映射 f 与 g 的复合映射
I	指标集;恒等映射;单位算子
$\inf A$	实数集 A 的下确界
$\mathbf{K}$	数域($\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$)
$\mathbf{K}^n$	n 维 Euclid 空间
$\mathbf{K}^{m\times n}$	$m\times n$ 矩阵的全体
$\ker(T)$	算子 T 的核(零空间)
l^p	p 次幂可和数列空间($1\leqslant p<\infty$)
$L^p([a,b])$	$[a,b]$上的 p 次幂可积函数空间($1\leqslant p<\infty$)
l^∞	有界数列空间
$L^\infty(E)$	E 上几乎处处有界可测函数空间
$m(E)$	集 E 的测度
$m^*(E)$	集 E 的外测度
$\max A$	实数集 A 的最大值
$\min A$	实数集 A 的最小值
$\mathbf{N}$	自然数集(不包括数 0)
$N(T)$	算子 T 的零空间(核)
$P_M x$	点 x 在空间 M 上的投影
$\mathbf{Q}$	有理数集
$\mathbf{R}$	实数域
$\mathbf{R}^n$	实 n 维 Euclid 空间
$\mathbf{R}^\infty$	数列空间
$R(T)$	算子 T 的值域
R_λ	算子 T 的预解式$(T-\lambda I)^{-1}$
$r_\sigma(T)$	算子 T 的谱半径
S	单位球面

span$A$	集 A 张成的子空间
sup$A$	实数集 A 的上确界
T_λ	$T-\lambda I$
T^*	算子 T 的对偶算子
$T_n \xrightarrow{s} T$	算子列$\{T_n\}$强收敛于 T
$T_n \xrightarrow{w} T$	算子列$\{T_n\}$弱收敛于 T
X	基本集;空间
X^*	空间 X 的对偶空间
X^{**}	空间 X 的二次对偶空间
$x_n \xrightarrow{w} x$	点列$\{x_n\}$弱收敛于 x
$\bar{z}$	数 z 的共轭复数
$\rho(T)$	算子 T 的正则集
$\sigma(T)$	算子 T 的谱
$\sigma_c(T)$	算子 T 的连续谱
$\sigma_p(A)$	算子 T 的点谱
$\sigma_r(T)$	算子 T 的剩余谱
∂A	集 A 的边界
$\aleph_0$	可数基数$\lvert \mathbf{N} \rvert$
$\forall$	任给
$\exists$	存在
s. t.	使得
$\Leftrightarrow$	当且仅当
$\perp$	正交
$\\|\cdot\\|$	范数
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	内积

目　　录

第 1 章　实分析基础

作为实变量的分析学，实分析是微积分学的进一步发展，是泛函分析的基础. 本章作为全书的预备知识，主要介绍一些集合论、实数理论、测度论和积分论方面的基本知识，以方便读者把握泛函分析的发展脉络，为下面进一步研究抽象空间及其之间的映射提供必要的数学语言和工具.

1.1 集　　合

1. 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念. 把现实世界和抽象思维中我们感兴趣的一些对象作为一个整体来研究，这个整体就称为一个**集合**，简称**集**；构成集合的每个对象就称为该集合的**元素**，简称**元**.

例如，所有实数构成一个集合 $\mathbf{R}$，它的元素是实数；区间 $[a,b]$ 上的所有连续函数的全体构成一个集合 $C([a,b])$，它的元素是 $[a,b]$ 上的连续函数.

通常，集合用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示，集合的元素用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 来表示. 若集合 A 是由一切具有性质 P 的元素构成时，可表示为

$$A=\{x: x\ \text{具有性质}\ P\}.$$

当 a 是集合 A 的元素时，称 a 属于 A，记作 $a\in A$；当 a 不属于 A 时，记作 $a\notin A$.

若集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $A\subset B$（读作 A 包含于 B）或 $B\supset A$（读作 B 包含 A）；若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

含有有限个元素的集合称为**有限集**；含有无限个元素的集合称为**无限集**. 不含任何元素的集合称为**空集**，通常用符号 $\varnothing$ 来表示.

集合 A 称为集合 B 的一个**真子集**，若 $A\subset B, A\neq B, A\neq\varnothing$；集合 A 与集合 B 称为**不相交**，若 $A\cap B=\varnothing$.

注　在集合概念中，需要注意以下几点：

1° 集合中的元素是明确的，一个元素要么属于这个集合，要么不属于这个集合；

2° 集合中的元素是不重复的；

3° 集合中的元素排列不分先后，例如

$$\{2,3,1\}=\{1,2,3\};$$

4° $A\subset B$ 并不意味着 A 为 B 的真子集，它包含着 $A=B$ 的情形；

5° 空集 $\varnothing$ 被看作是任一集合的子集，故一个含有 n 个元素的有限集的子集个数为

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n.$$

2. 集合的运算

(1) 并交运算

定义 1.1.1　设 A 与 B 是两个集合，由 A 与 B 的全部元素构成的集合称为 A 与 B 的**并集**，简称 A 与 B 的**并**，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x:x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$

由 A 与 B 的公共元素构成的集合称为 A 与 B 的**交集**，简称 A 与 B 的**交**，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x:x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

集合的并、交运算可以推广到任意多个集合（有限或无限）的情形. 设 $\{A_\alpha:\alpha\in I\}$ 是一个集族，其中 I 是某个指标集，则这族集合的并定义为

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x:\exists\alpha\in I,x\in A_\alpha\},$$

交定义为

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x:\forall\alpha\in I,x\in A_\alpha\},$$

式中，“$\exists$”表示“存在”；“$\forall$”表示“任给”.

集合的并交运算具有下列性质：

1° 交换律

$$A\cup B=B\cup A,$$
$$A\cap B=B\cap A;$$

2° 结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$$

3° 分配律

$$A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha),$$
$$A\cup(\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha);$$

4° 吸收律

$$A\cup(A\cap B)=A,$$
$$A\cap(A\cup B)=A.$$

(2) 差补运算

定义 1.1.2 设 A 与 B 是两个集合,由属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的**差集**,简称 A 与 B 的**差**,记作 $A\backslash B$,即

$$A\backslash B=\{x:x\in A \text{ 且 } x\notin B\};$$

当 X 为基本集时(即问题中所涉及的一切集合 $A,B,\cdots$ 都是 X 的子集),称 $X\backslash A$ 为 A 的**补集**(或**余集**),记作 A^c,即

$$A^c=\{x:x\in X \text{ 且 } x\notin A\}.$$

集合的差补运算具有下列性质:

1° $A\backslash B=A\cap B^c$; (1.1.1)

2° $A\cup A^c=X, A\cap A^c=\varnothing$; (1.1.2)

3° $X^c=\varnothing, \varnothing^c=X, (A^c)^c=A$; (1.1.3)

4° 对偶原理(De Morgan[①] 律):

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c,\qquad \left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c. \tag{1.1.4}$$

注 要证明集合等式 $A=B$,其标准程式是:分别证

$$A\subset B,\qquad B\subset A,$$

最后得结论.下面以式(1.1.1)的证明为例来加以说明.

$\forall x\in A\backslash B$,有 $x\in A$ 且 $x\notin B$,即 $x\in A$ 且 $x\in B^c$,从而有 $x\in A\cap B^c$,故

$$A\backslash B\subset A\cap B^c;$$

$\forall x\in A\cap B^c$,有 $x\in A$ 且 $x\in B^c$,即 $x\in A$ 且 $x\notin B$,从而有 $x\in A\backslash B$,故

$$A\cap B^c\subset A\backslash B.$$

合之,得

$$A\backslash B=A\cap B^c.$$

若启用命题的等价符号"$\Leftrightarrow$",则上述证明过程可以简化为:

$$\begin{aligned} x\in A\backslash B &\Leftrightarrow x\in A, x\notin B\\ &\Leftrightarrow x\in A, x\in B^c\\ &\Leftrightarrow x\in A\cap B^c. \end{aligned}$$

(3) 直积运算

定义 1.1.3 设 A 与 B 是两个非空集合,则称集合

$$\{(x,y):x\in A, y\in B\}$$

为 A 与 B 的**直积集**,记作 $A\times B$.

注 $A\times B$ 中的元素是一个有序对,即

---

① 德·摩根(1806~1871 年),英国数学家,逻辑代数的创始人之一.

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2, y_1 = y_2,$$

故直积无交换律，即在一般情况下，有

$$A \times B \neq B \times A.$$

实际上，我们所熟知的二维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^2$ 就是实数集 $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{R}$ 的直积.

直积的概念可推广到任意多个集合上去. 对有限个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \\ &= \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_k \in A_k, k = 1, 2, \cdots, n\},\end{aligned}$$

对集列 $\{A_n\}$，有

$$\prod_{k=1}^{\infty} A_k = \{(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots) : x_k \in A_k, k = 1, 2, \cdots\}.$$

习　题　1.1

1. 证明分配律：

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

2. 证明 De Morgan 律：

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c, \qquad \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

3. 证明等式

$$(A_1 \times B_2) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

4. 证明等价关系

$$A \times B = B \times A \quad \Leftrightarrow \quad A = B.$$

1.2　映　　射

1. 集合间的映射

在高等数学中我们已熟悉了函数的概念，若将其定义域和值域的范围由实数集换成一般的集合，就得到映射的概念.

定义 1.2.1　设 X, Y 是两个非空集合，若 $\forall x \in X$，按照某一法则 f，在 Y 中有唯一的 y 与之对应，则称 f 是 X 到 Y 的**映射**，记作 $f: X \to Y$；y 称为 x 在映射 f 下的**像**，记作 $f(x)$；X 称为 f 的**定义域**，并称

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$$

为 f 的**值域**.

映射又称为**算子**，并根据集合 X 与 Y 的不同情形，在不同的数学分支中有不同的惯用名称. 例如，当 $Y = X$ 时，f 可称为 X 上的**变换**；当 Y 是数集（实数集 $\mathbf{R}$ 或复数集 $\mathbf{C}$）时，f 可称为定义在 X 上的**泛函**.

例 1.2.1 若 $f:X\to X$ 满足

$$f(x)=x,$$

则 f 是 X 到自身的一个映射，称为 X 上的**恒等映射**，记为 I_X.

注 在不引起混淆时，也可以简记为 I.

例 1.2.2 设 $C([a,b])$ 为区间 $[a,b]$ 上的连续函数的全体所构成的集合，则 $\forall x\in C([a,b])$，$x=x(t)$ 在 $[a,b]$ 上的积分

$$f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}t$$

就是 $C([a,b])$ 上的一个泛函. 尽管它的取值仍是实数，但与以往的函数概念不同的是，它的变元是函数而不是数，这是我们在学习泛函分析时要逐步加以适应的.

(1) 满射与单射

定义 1.2.2 对映射 $f:X\to Y$，若 f 的值域

$$f(X)=Y,$$

则称 f 为 X 到 Y 上的**满射**；若 $\forall x_1,x_2\in X$，$x_1\neq x_2$，有

$$f(x_1)\neq f(x_2),$$

则称 f 为 X 到 Y 的**单射**. 若 f 既是单射又是满射，则称 f 为 X 到 Y 上的**双射**（或**一一对应**、**一一映射**）.

例 1.2.3 设 $C^1([a,b])$ 为区间 $[a,b]$ 上具有一阶连续导数的函数所构成的集合，定义映射 $f:C([a,b])\to C^1([a,b])$ 为

$$f(x)=[f(x)](t)=\int_a^t x(s)\mathrm{d}s,\quad \forall x\in C([a,b]),$$

则 f 是单射而不是满射.

证 $\forall x_1,x_2\in C([a,b])$，若有 $f(x_1)=f(x_2)$，则有

$$f(x_1)-f(x_2)=\int_a^t [x_1(s)-x_2(s)]\mathrm{d}s=0,$$

等式两边同时对 t 求导，得

$$x_1(t)-x_2(t)=0,$$

从而有 $x_1=x_2$，故 f 是单射.

对于 $1\in C^1([a,b])$，若 f 是满射，则 $\exists x\in C([a,b])$，使得

$$\int_a^t x(s)\mathrm{d}s=1,$$

等式两边同时对 t 求导，得 $x(t)=0$，但这是不可能的，否则上述积分应为 0，故 f 不是满射.

注 f 是否为单射与满射，与 X 与 Y 的选取有很大关系. 例如，函数 $y=x^2$ 是 $(-\infty,\infty)$ 到 $(0,\infty)$ 的满射，是 $(0,\infty)$ 到 $(-\infty,\infty)$ 的单射，是 $(0,\infty)$ 到 $(0,\infty)$ 的双

射，而当把它看作为$(-\infty,\infty)$到$(-\infty,\infty)$的映射时则什么都不是.

(2) 像集与原像集

定义 1.2.3　对映射 $f:X\to Y$，若 $A\subset X$，$B\subset Y$，则集合

$$f(A)=\{f(x):x\in A\}$$

称为 A 在 f 下的**像集**，集合

$$f^{-1}(B)=\{x\in X:f(x)\in B\}$$

称为 B 在 f 下的**原像集**.

原像集具有下列性质.

定理 1.2.1　原像集 $f^{-1}(B)$保留集合的所有运算性质：

1° $f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$；　(1.2.1)

2° $f^{-1}(\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$；　(1.2.2)

3° $f^{-1}(B_1\backslash B_2)=f^{-1}(B_1)\backslash f^{-1}(B_2)$；　(1.2.3)

4° $f^{-1}(B^c)=[f^{-1}(B)]^c$.　(1.2.4)

证　仅证式(1.2.3)、式(1.2.4). $\forall B_1,B_2\subset Y$，由于

$$\begin{aligned}x\in f^{-1}(B_1\backslash B_2)\quad&\Leftrightarrow\quad f(x)\in B_1\backslash B_2\\&\Leftrightarrow\quad f(x)\in B_1,f(x)\notin B_2\\&\Leftrightarrow\quad x\in f^{-1}(B_1),x\notin f^{-1}(B_2)\\&\Leftrightarrow\quad x\in f^{-1}(B_1)\backslash f^{-1}(B_2),\end{aligned}$$

故式(1.2.3)成立；至于式(1.2.4)，在式(1.2.3)中令

$$B_1=Y,\qquad B_2=B,$$

并注意到

$$f^{-1}(Y)=X$$

即得. 证毕.

像集具有下列性质.

定理 1.2.2　像集 $f(A)$仅保留集合的并运算性质，而交、差、余运算性质仅当 f 是单射时才成立：

1° $f(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$；　(1.2.5)

2° $f(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)\subset\bigcap_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$；　(1.2.6)

3° $f(A_1\backslash A_2)\supset f(A_1)\backslash f(A_2)$；　(1.2.7)

4° $f(A^c)\supset[f(A)]^c$.　(1.2.8)

证　仅证式(1.2.7). $\forall A_1,A_2\subset X$，

① 若 $f(A_1)\backslash f(A_2)=\varnothing$，则包含关系显然成立；

② 若 $f(A_1)\backslash f(A_2)\neq\varnothing$，则 $\forall y\in f(A_1)\backslash f(A_2)$，$\exists x\in A_1$，使得 $y=f(x)$. 此时，