

XINJIAOCAI SHUXUE TONGBU FENCENG DAOXUE

配 上 海 二 期 课 改 新 教 材



主编 徐冬林

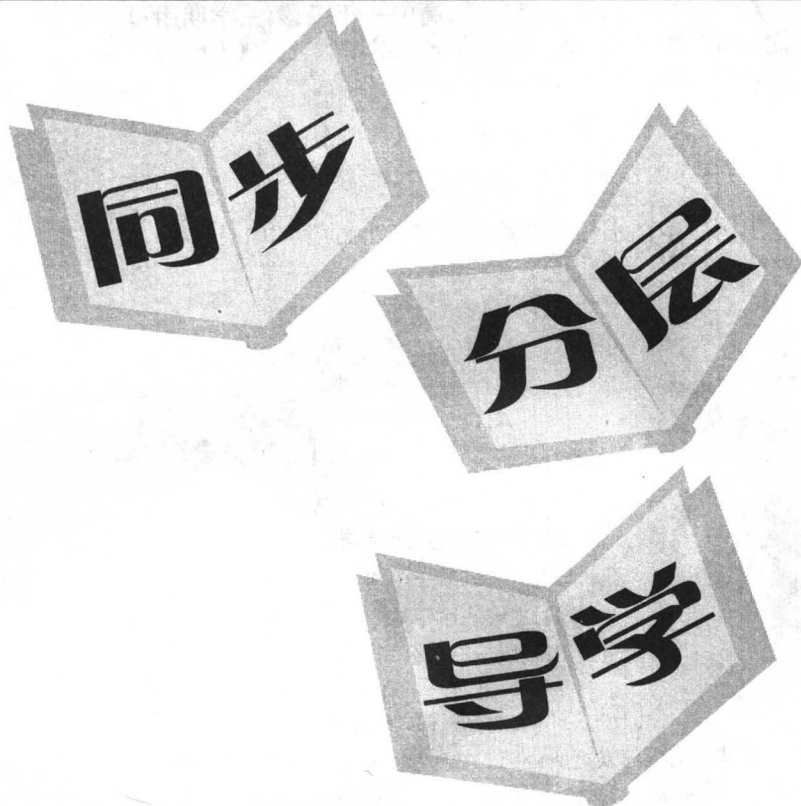
新教材 数学

同步分层导学

高中一年级第一学期用

上海科学技术出版社

新教材 数学



高中一年级第一学期用

主编 徐冬林

上海科学技术出版社

内 容 提 要

数学同步分层导学是与新教材内容紧密配合的学生同步辅导读物,旨在同步地对课堂内容进行补充,并为学生提供训练机会.本书是其中一册.

本书将每章内容按单元进行划分,每一单元由[综合导学]、[随堂应用]、[分层达标]等栏目组成,每章末还有[阅读与欣赏]、[研究性学习]栏目.整本书中附有[阶段测试]、[期末测试]及[提示与参考答案]等.

图书在版编目(CIP)数据

新教材数学同步分层导学.高中一年级.第一学期用/
徐冬林主编. —上海:上海科学技术出版社,2007.6
ISBN 978-7-5323-8614-7

I.新... II.徐... III.数学课-高中-教学参
考资料 IV.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 101810 号

责任编辑 周玉刚

新教材数学同步分层导学

高中一年级第一学期用

主编 徐冬林

上海世纪出版股份有限公司 出版、发行
上海科学技术出版社
(上海钦州南路 71 号 邮政编码 200235)

新华书店上海发行所经销 常熟市兴达印刷有限公司印刷

开本 787×1092 1/16 印张 7.5 字数 170 000

2006 年 9 月第 1 版 2007 年 6 月第 2 次印刷

印数:6 001-10 300

ISBN 978-7-5323-8614-7

定价:9.30 元

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题,
请向承印厂联系调换

出

版

说

明



这套同步分层导学丛书是以上海市二期课改新教材为依据的学生同步辅导读物,内容紧密配合教材.本丛书按每学期一册编写,旨在同步地对课堂内容进行辅导,为学生提供训练机会,并成为课堂教学的有益的参考辅导读物.

本丛书将每章内容按单元进行划分,每一单元由[综合导学]、[随堂应用]、[分层达标]栏目组成,每章末还有[阅读与欣赏]、[研究性学习]栏目.整本书中附有[阶段测试]、[期末测试]及[提示与参考答案]等.

[综合导学]是对这一单元的知识要点、例题剖析、思维误区、方法指导、请你思考.

[随堂应用]是按课时需要,将每一单元内容分成多个[随堂应用],即针对每一节课安排3~5题与课堂教学内容密切相关的练习题,让学生课后复习巩固之用.在每一单元中,如果分为4节课,就有4个[随堂应用],其内容的深浅、顺序与课堂内容完全一致.也就是说,课堂上学什么内容,就安排相应的练习内容;如果课堂是复习,内容也就是有关前面的复习内容.

[分层达标]是对本单元的有关知识以试卷(45分钟)形式让学生进行训练,分为基础型、提高型两组题目.

[阅读与欣赏]是根据二期课改的新理念,旨在开拓学生的眼界,提高学生的学习兴趣.

[研究性学习]是根据二期课改的新理念,旨在让学生在探究的过程中,培养其创新能力.

[阶段测试]是在每学期期中时安排两份阶段测试(90分钟).

[期末测试]是在每学期期末时安排两份期末测试(90分钟).

[提示与参考答案]给出了[随堂应用]、[分层达标]、[阶段测试]、[期末测试]的答案,对有难度的题目,进行详细解答.

本书主编为徐冬林,参加本书编写的有:徐冬林、曹荣杰、陈蓓华.本书由徐冬林统稿.





第一章 集合和命题	1
第一单元 集合	1
综合导学	1
随堂应用	4
分层达标	5
第二单元 四种命题的形式和充分条件与必要条件	7
综合导学	7
随堂应用	9
分层达标	10
阅读与欣赏	12
研究性学习	12
 第二章 不等式	15
第一单元 不等式的基本性质	15
综合导学	15
随堂应用	17
分层达标	18
第二单元 一元二次不等式的解法和其他不等式的解法	20
综合导学	20
随堂应用	23
分层达标	24
第三单元 基本不等式及其应用	26
综合导学	26
随堂应用	29
分层达标	29
阅读与欣赏	32
研究性学习	33
 阶段测试	36
A 卷	36
B 卷	37
 第三章 函数的基本性质	40
第一单元 函数的概念 函数关系的建立 函数的运算	40
综合导学	40
随堂应用	45
分层达标	47
第二单元 函数的基本性质	50
综合导学	50





随堂应用	56
分层达标	58
阅读与欣赏	62
研究性学习	63

第四章 幂函数、指数函数和对数函数(上)	68
第一单元 幂函数	68
综合导学	68
随堂应用	72
分层达标	73
第二单元 指数函数	77
综合导学	77
随堂应用	80
分层达标	81
期末测试	85
A 卷	85
B 卷	86
提示与参考答案	89



第一章

集合和命题

第一单元 集 合

综合导学

知识要点

1. 理解集合的意义,掌握集合的表示方法:列举法和描述法.
2. 理解子集、真子集、集合相等的概念,正确使用集合符号“ $\in, \notin, \varnothing, \subseteq, =$ ”.
3. 理解交、并、补的概念,掌握集合之间的运算.

例题剖析

例1 化简下列集合:

- (1) $A = \{x | y = \sqrt{x-1}\}$;
- (2) $B = \{y | y = x^2 + 1\}$;
- (3) $C = \{x | x^2 - ax - 1 = 0, a \in \mathbf{R}\}$;
- (4) $D = \{a | \text{方程 } x^2 - ax + 1 = 0 \text{ 有实数解}\}$.

分析 集合是一种数学语言,对于用描述法表达的集合,关键是读懂集合的意义,即集合中的元素是什么?(1)表示函数自变量 x 的取值范围(定义域);(2)表示函数变量 y 的取值范围(值域);(3)表示一元二次方程的解;(4)表示一元二次方程有实数解的字母 a 的取值范围.虽表示不同的集合,但其元素的公共特征是均为数,即数集.

解 (1) $A = \{x | x \geq 1\}$;

(2) $B = \{y | y \geq 1\}$;

(3) $C = \left\{ \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}, \frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{2} \right\}$;

(4) $D = \{a | a \geq 2 \text{ 或 } a \leq -2\}$.

例2 (1) 集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{x | x^2 - ax + 2 = 0, x \in \mathbf{R}\}$,若满足 $B \subseteq A$,求实数 a 的取值范围;

(2) 已知 $A = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | m \leq x \leq 3m - 1\}$,若满足 $B \subseteq A$,求实数 m 的取值范围.

分析 因为空集是任何一个集合的子集,所以在解答互为子集问题时,不遗漏空集是解题最关键的.

解答 (1) $\because B \subseteq A, \therefore$ ① $B = \varnothing, \Delta < 0, \therefore -2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$;

② $B \neq \emptyset$, $\therefore A = \{1, 2\}$, $\therefore$ 若 $1 \in B$, 则 $1^2 - a + 2 = 0$. $\therefore a = 3$.

而 $a = 3$ 时, $B = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$ 满足 $B \subseteq A$, $\therefore a = 3$. 若 $a \in B$, 则 $a = 3$.

综上所述, $a = 3$ 或 $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$.

(2) $\because B \subseteq A$, $\therefore$ ① $B = \emptyset$, 即 $3m - 1 < m$.

解不等式, 得 $m < \frac{1}{2}$.

② $B \neq \emptyset$, 从数轴上看出(图 1-1), 有

$$\begin{cases} 3m - 1 \geq m, \\ 3m - 1 \leq 3, \\ m \geq -1. \end{cases}$$

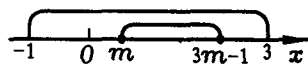


图 1-1

解不等式组, 得 $\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{4}{3}$.

综上所述, $m \leq \frac{4}{3}$.

例 3 设 $A = \{x | -1 \leq x \leq m\} (m > -1)$, $B = \{y | y = x + 1, x \in A\}$, $C = \{y | y = x^2, x \in A\}$. 若满足 $B = C$, 求实数 m 的取值范围.

分析 本题解答有两点要点. (1) 能看懂集合 B, C 是定义在 $-1 \leq x \leq m$ 上的一次函数及二次函数的 y 的取值范围(函数的值域); (2) 如何求出集合 C , 并用合理的三段式表示, 即把集合 C 表示成一个三段式的分段函数.

解 $\because m > -1$, $\therefore A \neq \emptyset$, $B = \{y | 0 \leq y \leq m + 1\}$.

当 $-1 < m < 0$ 时, $y = x^2$ 的 y 取值范围为 $m^2 \leq y \leq 1$;

当 $0 \leq m \leq 1$ 时, y 的取值范围为 $0 \leq y \leq 1$;

当 $m > 1$ 时, y 的取值范围为 $0 \leq y \leq m^2$,

$$\therefore C = \begin{cases} \{y | m^2 \leq y \leq 1\}, & \text{当 } -1 < m < 0 \text{ 时;} \\ \{y | 0 \leq y \leq 1\}, & \text{当 } 0 \leq m \leq 1 \text{ 时;} \\ \{y | 0 \leq y \leq m^2\}, & \text{当 } m > 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

$$\because B = C, \therefore (1) \begin{cases} -1 < m < 0, \\ m^2 = 0, \\ 1 = m + 1 \end{cases} \Rightarrow m \in \emptyset;$$

$$(2) \begin{cases} 0 \leq m \leq 1, \\ 1 = m + 1 \end{cases} \Rightarrow m = 0;$$

$$(3) \begin{cases} m > 1, \\ m^2 = m + 1 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

综上所述, $m = 0$ 或 $m = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

思维误区

例 4 (1) 已知 $A = \{y | y = -x^2 + 1\}$, $B = \{y | y = x^2 - 1\}$, 求 $A \cap B$;

(2) 已知 $A = \{(x, y) | y = -x^2 + 1\}$, $B = \{(x, y) | y = x^2 - 1\}$, 求 $A \cap B$.

错解 (1) $A \cap B$, 即 $-x^2 + 1 = x^2 - 1$, $\therefore x^2 = 1$.



解方程,得 $x=\pm 1$. $\therefore y=0$, $\therefore A\cap B=\{0\}$.

分析 求交集,即求两集合的公共元素.同样是求交集,应看清集合的元素.(1)集合 A 、 B 分别表示两个函数中 y 的取值范围,都是实数集合;(2) A 、 B 表示两个抛物线上的点集,前者做交集需分别化简两个集合,再在数轴上求出它们的公共取值范围;而(2)求两曲线的交点,即求方程组的解.

正解 (1) $A=\{y|y\leq 1\}$, $B=\{y|y\geq -1\}$,

$$\therefore A\cap B=\{y|-1\leq y\leq 1\}.$$

$$(2) A\cap B=\left\{(x,y)\left|\begin{array}{l}y=-x^2+1, \\ y=x^2-1\end{array}\right.\right\}=\{(1,0),(-1,0)\}.$$

例 5 设集合 $A=\{x|x^2+4x-4a+3=0\}$, $B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2=0\}$, $C=\{x|x^2+2x+2a=0\}$.

(1) 若 A 、 B 、 C 中至少有一个不是空集,求实数 a 的取值范围;

(2) 若 A 、 B 、 C 中至少有两个不是空集,求实数 a 的取值范围;

(3) 若 A 、 B 、 C 中有且只有两个集合不是空集,求实数 a 的取值范围.

错解 (1) $\because A\neq\emptyset$, $\therefore \Delta=16-4(-4a+3)\geq 0$.

解不等式,得 $a\geq -\frac{1}{4}$.

$B\neq\emptyset$, $\therefore \Delta=4(a+1)^2-4a^2\geq 0$. 解不等式,得 $a\geq -\frac{1}{2}$.

$C\neq\emptyset$, $\therefore \Delta=4-8a\geq 0$. 解不等式,得 $a\leq \frac{1}{2}$.

若 A 、 B 、 C 中至少有一个不是空集,上述 a 的三个取值范围的交集为

$$-\frac{1}{4}\leq a\leq \frac{1}{2}.$$

分析 题(1)的错误在于最后一步,至少有一个不是空集,应求三个取值范围的并集,而非交集.要解决本题的(1)、(2)、(3),利用数轴,可容易得到正解.

正解 若 $A\neq\emptyset$, $\therefore \Delta=16-4(-4a+3)\geq 0$.

解不等式,得 $a\geq -\frac{1}{4}$;

$B\neq\emptyset$, $\therefore \Delta=4(a+1)^2-4a^2\geq 0$.

解不等式,得 $a\geq -\frac{1}{2}$.

$C\neq\emptyset$, $\therefore \Delta=4-8a\geq 0$.

解不等式,得 $a\leq \frac{1}{2}$.

画数轴如图 1-2 所示.

观察数轴,得

(1) $a\in\mathbf{R}$;

(2) $a\geq -\frac{1}{2}$;

(3) $-\frac{1}{2}\leq a<-\frac{1}{4}$ 或 $a>\frac{1}{2}$.

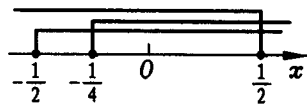


图 1-2



方法指导



1. 解集合问题,看懂集合所表示的意义,如方程的解集、不等式解集、函数定义域、值域、直线或曲线上的点集等.

2. 在运算集合时,数集问题要充分利用数轴,注意空集及区间端点的取舍.

请你思考



本章中引入了集合间的运算“ $\cap$ ”、“ $\cup$ ”、“ $\complement A$ ”. 我们知道数式运算常用的有“+”、“-”、“ $\times$ ”、“ $\div$ ”等. 以前我们学到过如乘法对于加法的分配律,即: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$;乘法的结合律,即 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;你是否能从集合的运算和数式的运算之间作一番简单的类比,写出几个集合间的运算律,并且从文氏图上加以说明.

随堂应用

应用一 集合及其表示法

1. 试用列举法表示下列集合:

$$(1) A = \left\{ x \mid \frac{6}{3-x} \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{Z} \right\};$$

$$(2) B = \{ (x, y) \mid x+y=5, x, y \in \mathbf{N}^* \};$$

$$(3) C = \left\{ x \mid x = \frac{|m|}{m} + \frac{|n|}{n} + \frac{|mn|}{m \cdot n} \right\}.$$

2. 下列集合各表示什么意义:

$$(1) A = \{ (x, y) \mid 2x+y=1 \};$$

$$(2) B = \{ (x, y) \mid 2x+y>1 \};$$

$$(3) C = \{ (x, y) \mid |x|+|y| \leq 1 \};$$

$$(4) D = \{ y \mid y = x^2 + 2 \};$$

$$(5) E = \left\{ x \mid y = \frac{2}{x} \right\}.$$

应用二 集合之间的关系

1. 试判断集合 A 与集合 B 之间的关系:

$$(1) A = \{ x \mid x^2 - 2x - 3 = 0 \}, B = \{ y \mid y^2 - 2y - 3 = 0 \};$$

$$(2) A = \{ x \mid x = 2k+1, k \in \mathbf{Z} \}, B = \{ x \mid x = 4k \pm 1, k \in \mathbf{Z} \}.$$

2. 第 1(1)题中若 $A=B$,请加以证明.

3. 集合 $A = \{ (x, y) \mid |x|+|y| < 1 \}, B = \{ (x, y) \mid |x| < 1 \text{ 且 } |y| < 1 \}, C = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 < 1 \}$,试判断 A, B, C 之间的关系.

应用三 集合的运算

1. 集合 $A = \{ x \mid 1 \leq x \leq 4 \}, B = \{ x \mid x \geq m \}$,若 $A \cap B \neq \emptyset$,求实数 m 的取值范围.

2. (1) 集合 $A = \{ x \mid y = \sqrt{x+2} \}, B = \{ y \mid y = -x^2 + 2 \}$,求 $A \cap B$;



- (2) 集合 $A=\{(x,y)|y=x+2\}$, $B=\{(x,y)|y=x^2\}$, 求 $A \cap B$.
3. 设 $A=\{x|x+a>0\}$, $B=\{x|bx<1, b \neq 0\}$, 且 $A \cup B = \left\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq \frac{1}{b}\right\}$, 求 a, b 应满足的关系式.
4. 已知 $A=\{x|1 \leq x < 2\}$.
- (1) 若 $U=\mathbf{R}$, 求 $\complement_U A$;
- (2) 若 $U=\{x|x=-t^2+3\}$, 求 $\complement_U A$.

应用四 集合复习(综合)

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-1=0, x \in \mathbf{R}\}$, $B=\{x|2x^4-19x^3+10x^2+7=0, x \in \mathbf{R}\}$, 求 $A \cap B$.
2. 对于集合 A 和 B , 定义“ $*$ ”: $A * B = (A \cap \complement_U B) \cup (B \cap \complement_U A)$. 设 $P=\{y|-5 \leq y \leq 5\}$, $Q=\{y|0 < y < 8\}$, $U=\mathbf{R}$, 求 $P * Q$.
3. 已知 $A=\{x|x^2+(p+2)x+p-1=0, x \in \mathbf{R}\}$, $A \cap \mathbf{R}^+ = \emptyset$, 求实数 p 的取值范围.
4. 已知集合 $A=\{y|y \leq 6\}$, 试判断下列三个函数是否属于 A ?
- (1) $y=2x-8(x \leq 7)$;
- (2) $y=x^2+4x+5$;
- (3) $y=-x^2+2x+5$.

分层达标

基础型

一、填空题

1. 用描述法表示全体正偶数集合_____.
2. 用列举法表示 20 以内的被 3 除余数为 1 的正整数所组成的集合_____.
3. 用适当的符号填空: $\{\sqrt{2}\}$ _____ $\{x|x \leq \sqrt{3}, x \in \mathbf{R}\}$, $\{0\}$ _____ $\{x|x^2+x+1=0, x \in \mathbf{R}\}$.
4. 已知集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0, x \in \mathbf{R}\}$ 是单元素集合, 则 $a=$ _____.
5. 集合 $A=\{y|y=x\}$, $B=\{y|y=-x^2+4\}$, 则 $A \cap B=$ _____.
6. 满足 $\{a, b\} \subset A \subseteq \{a, b, c, d, e\}$ 的集合共有_____个.
7. 已知集合 $A=\{x|x^2=1\}$, $B=\{x|mx=2\}$, 若 $B \subsetneq A$, 则 $m=$ _____.
8. 已知方程 $x^2-3x+p=0$ 的解集为 A , 方程 $x^2-qx-3=0$ 的解集为 B , 且 $A \cap B = \{1\}$, 则 $A \cup B=$ _____.
9. 已知 $U=\mathbf{R}$, $A=\{x|x>2\}$, $B=\{x|-1<x<3\}$, 则 $A \cap \complement_U B=$ _____.
10. 已知集合 $A=\{a^2, a+1, -3\}$, $B=\{a-3, 2a-1, a^2+1\}$, 若 $A \cap B = \{-3\}$, 则实数 $a=$ _____.

二、选择题

11. 如果 $U=\{a, b, c, d, e, f\}$, $N=\{a, c, d, e\}$, $M=\{a, b\}$, 则 $\complement_U (M \cup N)$ 为().
- (A) $\{f\}$ (B) $\{c, d, f\}$ (C) $\{a\}$ (D) $\emptyset$
12. 设 U 是全集, 集合 P, Q 满足 $P \subset Q$, 则下列结论中错误的是().
- (A) $P \cup Q = Q$ (B) $\complement_U P \cup Q = U$



$$(C) P \cap \complement U Q = \emptyset$$

$$(D) \complement U P \cap Q = \complement U P$$

13. 设 $U = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}$, $A = \{(x, y) | \frac{y-3}{x-2} = 1, x, y \in \mathbf{R}\}$, $B = \{(x, y) | y \neq x+1, x, y \in \mathbf{R}\}$, 则 $\complement U A \cap \complement U B =$ ().

$$(A) \complement U A$$

$$(B) \complement U B$$

$$(C) \emptyset$$

$$(D) \{(2, 3)\}$$

三、解答题

14. 设集合 $A = \{x | a-2 < x < a+2\}$, $B = \{x | x > 3 \text{ 或 } x < -4\}$, 若 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.
15. 设集合 $A = \{a | x^2 - x + a = 0 \text{ 无实数根}, a \in \mathbf{R}\}$, $B = \{a | ax^2 + 2x + 1 = 0 \text{ 有实数根}, a \in \mathbf{R}\}$, 求 $A \cup B$ 和 $A \cap B$.
16. 若集合 $A = \{x | -2 < x < 1 \text{ 或 } x > 1\}$, $B = \{x | a \leq x \leq b\}$, 若 $A \cup B = \{x | x > -2\}$, $A \cap B = \{x | 1 < x \leq 3\}$, 求实数 a, b 的值.
17. 已知 $A = \{x | x^2 - ax - 2a^2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - x - 2 = 0\}$. 若满足 $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 a 的值.
18. 已知 $A = \{x | -3 < x < 2\}$, $B = \{x | x \leq a\}$.
- (1) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围;
- (2) 若 $A \subsetneq B$, 求实数 a 的取值范围.

提高型

一、填空题

1. 集合 $A = \{x | y = \sqrt{x} + 2\}$, $B = \{y | y = -x^2 + 6x\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
2. 若 $A = \{1, \frac{a}{b}, b\}$, $B = \{0, a+b, b^2\}$, 且 $A = B$, 则 $a^{2006} + b^{2006} =$ _____.
3. 设 A, B 是两个非空集合, 定义: $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$, 若 $A = \{x | x > 1 \text{ 或 } x < -2\}$, $B = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, 则 $A - B =$ _____.
4. 已知集合 $A = \{x | x^2 + px + q = 0\}$, $B = \{x | x^2 - qx + p = 0\}$, 且 $A \cap B = \{1\}$, 则实数 $p =$ _____, $q =$ _____.
5. 已知 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$, 定义运算“ $*$ ”:
 $A * B = \{x | x = x_1 + x_2, x_1 \in A, x_2 \in B\}$, 则 $A * B$ 的所有子集的个数为 _____.
6. 已知 $A = \{(x, y) | 2x + y - 2 = 0\}$, $B = \{(x, y) | (2x - y + 3)(x + ay - 1) = 0\}$, 且 $A \subsetneq B$, 则实数 a 的值为 _____.
7. 已知 $a < 0 < b < |a|$, 且集合 $A = \{x | a < x \leq b\}$, $B = \{x | -b \leq x \leq -a\}$, 则 $A \cup B =$ _____.

二、选择题

8. 设 $M = \{x | f(x) = 0\}$, $N = \{x | g(x) = 0\}$, $P = \{x | f(x) \cdot g(x) = 0\}$, 则集合 M, N, P 的关系式为 ().
- (A) $M \cap N = P$ (B) $M \cup N = P$ (C) $P = M$ (D) $P = N$
9. 集合 $M = \{(x, y) | xy > 0 \text{ 且 } x + y > 0\}$, 集合 $N = \{(x, y) | x > 0 \text{ 且 } y > 0\}$, 则集合 M, N 之



间的关系为().

- (A) $N \subsetneq M$ (B) $M = N$ (C) $M \subsetneq N$ (D) $M \cap N = \emptyset$

10. 设 M, P 是两个非空集合, 定义: $M - P = \{x | x \in M \text{ 且 } x \notin P\}$, 则 $M - (M - P)$ 等于().

- (A) P (B) $M \cap P$ (C) $M \cup P$ (D) M

三、解答题

11. 设集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | 2x^2 - ax + 2 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cup B = A$, 求实数 a 的取值范围.

12. 集合 $A = \{x | t \leq x \leq t^2 + 1\}$, $B = \left\{x \mid x = \frac{1}{2}m^2 - m + \frac{5}{2}, 0 \leq m \leq 3\right\}$. 若 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 t 的取值范围.

13. 设 $A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x | -3 < x < -1\}$. 是否存在集合 C , 使下列三个条件同时成立:

- (1) $C \subseteq (A \cup B) \cap \mathbf{Z}$;
- (2) C 有两个元素;
- (3) $C \cap B \neq \emptyset$.

若存在, 求集合 C ; 若不存在, 则说明理由.

14. 设集合 $A = \{x | ax^2 + bx + c = x\}$, $B = \{x | a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c = x\}$. 求证: $A \subseteq B$.

第二单元 四种命题的形式和充分条件与必要条件

综合导学

知识要点

1. 理解并掌握命题概念和推出记号的意义.
2. 掌握命题的四种形式及相互关系, 能写命题的四种形式.
3. 理解命题的等价关系, 并能证明命题的真假.
4. 理解充分条件、必要条件和充要条件的含义, 并能判断条件与结论的关系.
5. 理解子集与推出关系的联系.

例题剖析

例1 判定下列命题的真假并说明理由.

(1) 若集合 $A \subseteq B$, 则 $A \cup C \subseteq B \cup C$;

(2) 若一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 满足 $\frac{c}{a} < 0$, 那么这个方程有两个不相等的实数根;

(3) 设 $a, b, c \in \mathbf{N}^*$, 如果 $a \cdot b$ 是 c 的倍数, 那么 a, b 中至少有一个是 c 的倍数.



分析 命题的真假都需要证明,证明一个命题正确,可以从已知条件出发,依据所学知识,逐步推理得到;要说明一个命题是假命题,则只需举一个反例即可.

解 (1) 真命题,若 $x \in A \cup C$, 则 $x \in A$ 或 $x \in C$.

$\because A \subseteq B, \therefore x \in A$, 则 $x \in B$,

$\therefore x \in B$ 或 $x \in C$. 即 $x \in B \cup C$.

(2) 真命题. $\Delta = b^2 - 4ac. \because \frac{c}{a} < 0, \therefore 4ac > 0$.

$\because b^2 \geq 0, \therefore b^2 - 4ac > 0$. 即 $\Delta > 0$.

所以方程有两个不相等的实数根.

(3) 假命题. 反例: 若 $a=2, b=3, c=6$. 显然 $a \cdot b$ 是 c 的倍数, 而 a, b 都不是 c 的倍数.

例 2 (1) “ $x^2 - x - 2 \neq 0$ ”是“ $x \neq 2$ ”的什么条件?

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\sin A \neq \frac{1}{2}$ ”是“ $A \neq 30^\circ$ ”的什么条件?

分析 本例两命题的条件与结论都是以否定形式出现,此时判断条件是结论的什么条件时,最好的方法是利用逆否命题与原命题是等价命题,从研究其逆否命题的条件是结论的什么条件,而此时的条件与结论都不是否定形式,这时判断命题的真假比直接判断更容易,而且不易发生错误.

解 (1) 逆否命题. “ $x=2$ ”是“ $x^2 - x - 2 = 0$ ”的什么条件? 容易得到结论: 充分且不必要条件.

(2) 逆否命题. “ $A=30^\circ$ ”是“ $\sin A = \frac{1}{2}$ ”的什么条件? 容易得到结论: 充分且不必要条件.

例 3 (1) 若 A 是 B 的充分不必要条件, C 是 B 的充要条件, D 是 C 的必要不充分条件, 问 D 是 A 的什么条件?

(2) 请你写出一个使“ $1 \leq x \leq 3$ ”成立的充分不必要条件和必要非充分条件?

(3) 设集合 $P = \{x | -m < x < 3-m\}, Q = \{x | x > 3\}$. 若“ $x \in P$ ”是“ $x \in Q$ ”的充分不必要条件, 求实数 m 的取值范围.

分析 在判断充要条件时, 一定要注意哪是条件, 哪是结论; 如(1)中 D 是 C 的必要不充分条件, 即 $D \not\supseteq C$, 另外充要条件即为等价条件; 写充分不必要条件, 只需写一个特例即可, 而写必要不充分条件, 则需将原条件的范围扩大; 若 A 是 B 的充分不必要条件, 由子集与推出关系可得 $A \subsetneq B$.

解 (1) $A \subsetneq B, C \Leftrightarrow B, D \not\supseteq C$,

$\therefore D \not\supseteq C \Leftrightarrow B \not\supseteq A$.

所以 D 是 A 的必要不充分条件.

(2) 充分不必要条件可以是 $x=2$ 等; 必要不充分条件可以是 $0 \leq x \leq 4$ 等.

(3) $\because$ “ $x \in P$ ”是“ $x \in Q$ ”的充分不必要条件,

$\therefore P \subsetneq Q$, 如图 1-3 所示.

$\therefore 3 \leq -m$, 即 $m \leq -3$.

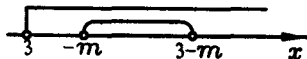


图 1-3

思维误区



例 4 命题 P : 若 a, b 都是奇数, 则 $a+b$ 是偶数. 试写出命题 P 的逆否命题.

错解 逆否命题: 若 $a+b$ 不是偶数, 则 a, b 都不是奇数.

分析 a, b 都是奇数的否定是 a, b 不都是奇数而不是都不是奇数, 或者写成至少有一个是偶数.

正解 逆否命题: 若 $a+b$ 不是偶数, 则 a, b 至少有一个是偶数.

例 5 两实数 $\alpha, \beta, \alpha > 2, \beta > 2$ 的充要条件是什么?

错解 $\alpha + \beta > 4$ 且 $\alpha \cdot \beta > 4$.

分析 两实数是正数的充要条件为 $\alpha + \beta > 0, \alpha \cdot \beta > 0$. 要解决例 5, 需转化为 $\alpha - 2 > 0, \beta - 2 > 0$ 的充要条件.

正解
$$\begin{cases} (\alpha - 2) + (\beta - 2) > 0, \\ (\alpha - 2)(\beta - 2) > 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \alpha + \beta > 4, \\ (\alpha - 2)(\beta - 2) > 0. \end{cases}$$

方法指导



1. 注意判断条件与结论的关系时, 可充分利用等价命题, 从而达到转化、化易的作用.

2. 充要条件是一个贯穿在所有章节内容的重要问题, 在今后不断学习新知识时, 要不断地去思考, 研究命题条件与结论的关系.

请你思考



在一元二次方程中, 我们已经能够写出几个特殊的充要条件. 如一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有实根的充要条件为 $\Delta \geq 0$; 有一正一负两实根的充要条件为 $\frac{c}{a} < 0$; 有两正根



的充要条件为
$$\begin{cases} \Delta \geq 0, \\ -\frac{b}{a} > 0, \\ \frac{c}{a} > 0; \end{cases} \text{ 有两负实数根的充要条件为 } \begin{cases} \Delta \geq 0, \\ -\frac{b}{a} < 0, \\ \frac{c}{a} > 0. \end{cases}$$

请你思考一下, 你能否写出有其他根的情况的充要条件呢? 如有两个根 x_1, x_2 , 其中, x_1, x_2 均在小于 1 或 x_1, x_2 都满足 $1 < x_1 < 2, 1 < x_2 < 2$ 等. 能否从中找出写此类充要条件的规律呢? 尝试一下吧!

随堂应用

应用一 命题的形式及等价关系

1. 判断下列命题的真假并说明理由:

- (1) 若 $a + b + c = 0$, 则关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有一个根为 1;
- (2) 任何一个集合 A 必有两个子集.

2. 写出下列命题的其他三种形式并判断真假:

- (1) 若 $x + y > 0$, 则 $x > 0, y > 0$;
- (2) 若 x, y 都是偶数, 那么 $x + y$ 也是偶数.

3. 若 A 是 B 的必要不充分条件, C 是 B 的充分不必要条件, D 是 C 的充要条件, 问 A 是 D

的什么条件?

应用二 充分条件与必要条件

1. 判断下列命题中条件是结论的什么条件:

- (1) “ $x \neq 1$ ”是“ $x^2 \neq 1$ ”的_____;
- (2) “ $a > b$ ”是“ $ac^2 > bc^2$ ”的_____;
- (3) “ $|x| + |y| = |x + y|$ ”是“ $x \cdot y > 0$ ”的_____;
- (4) 在 $\triangle ABC$ 中“ $A = 60^\circ$ ”是“ $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ”的_____;
- (5) “ $x^2 - 2x - 8 \neq 0$ ”是“ $x \neq 4$ ”的_____.

2. 请你写出“ $a + b > 0$ ”的一个充分不必要的条件_____, 一个必要不充分的条件_____.

3. 请你写出 $a, b \in \mathbf{R}$, a, b 不同时为零的一个充要条件_____.

分层达标

基础型

一、填空题

1. 命题“若 $\frac{a}{b} > 1$, 则 $a > b$ ”的否命题是_____; 原命题是_____ (选填“真”或“假”)命题.
2. “若 $A \subseteq B$, 则 $A \cap B = A$ ”是_____ (选填“真”或“假”)命题.
3. 已知 p 和 q 是两个命题, 如果 p 是 q 的充分不必要条件, 那么 q 是 p 的_____条件.
4. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的对称轴为 $x = 1$ 的充要条件是_____.
5. 下列命题: ① 任何实数的偶次幂均为正数; ② $\emptyset$ 是任何集合的真子集; ③ 若 $A \cap B = \emptyset$, 则 $A = \emptyset$ 或 $B = \emptyset$. 其中, 正确的命题个数有_____个.
6. 设原命题: “平行四边形的对角线互相平分”, 那么它的逆命题是_____.
7. 设全集为 U , 则“ $A \cap B = \emptyset$ ”的充要条件是“ $A \cap \complement_U B =$ _____”.
8. “若 $ab \neq 0$, 则 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$ ”的否命题是_____.
9. 写出“ $x < 8$ ”的一个必要非充分条件_____.
10. 如果 $\beta \nRightarrow \alpha$, 且 $\alpha \Rightarrow \beta$, 则 β 是 α 的_____条件.

二、选择题

11. 下列命题中的真命题的个数是().
(1) 每个集合都有真子集; (2) 每个集合都有子集; (3) 若 $A \cap B = \emptyset$, 则 A, B 中至少有一个是空集; (4) 若 $A \cup B = U (U \text{ 为全集})$, 则 A, B 中至少有一个是全集.
(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个
12. A, B 是集合, 则下列命题中真命题是().
(A) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cap B = A$ (B) 若 $A \cap B = B$, 则 $A \subseteq B$
(C) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cup B = A$ (D) 若 $A \cup B = B$, 则 $B \subseteq A$
13. 对于命题: ① $x^2 > 1$ 是 $x > 1$ 的充分条件; ② $0 < x < 1$ 是 $|x| < 1$ 的充分条件; ③ $x^2 +$

$y^2=0$ 是 $x \cdot y=0$ 的充分条件; ④ $A \subset B$ 是 $A \cup B=B$ 的必要条件, 其中正确的个数为 ().

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

三、解答题

14. 写出命题“已知实数 a 和 b , 若 a 和 b 都是偶数, 则 $a+b$ 是偶数”的其他三种形式, 并判断真假.
15. 某命题的逆命题是“ x 为实数, 当 $x < \frac{1}{x}$ 时, $0 < x < 1$ ”, 请写出原命题、否命题、逆否命题, 并判断其真假.
16. 求证: 对角线不互相平分的四边形不是平行四边形.
17. 试写出方程 $x^2 - 2x + a = 0$ 有两个不同实数解的充要条件, 及一个充分不必要条件, 一个必要不充分条件.

提高型

一、填空题

1. 设 U 是全集, A, B 是两个非空集合. (1) 若 $A \cap B = A$, 则 $A \subseteq B$; (2) 若 $A \cup B = U$, 则 $\complement_U A \subseteq B$, 上述两个命题中是真命题的序号为 _____.
2. 函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象关于 y 轴对称的充要条件是 _____.
3. “ $|y| > |x|$ ”是“ $y > x$ ”的 _____ 条件.
4. 设 A, B 为任意两个集合, 则 $A \subseteq B$ 的一个充分非必要条件是 _____.
5. 已知有理数集 Q 和整数集 Z , 命题 $x \in Q$, 则 $x \in Z$ 的逆否命题是 _____.
6. 已知 $A = \{1, 1+m, 1+2m\}$, $B = \{1, n, n^2\}$, 若 $A = B$, 则 m, n 的值为 _____.
7. 一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过第一、二、三象限的充要条件是 _____.
8. 写出 $|x+y| < 3$ 的一个充分非必要条件 _____.
9. 设 $x, y \in \mathbf{R}$. 条件甲: $x^2 + y^2 = 0$; 条件乙: $xy = 0$, 则甲是乙的 _____ 条件.
10. 某个命题与自然数 n 有关. 当 $n = k (k \in \mathbf{N}^*)$ 时, 该命题成立, 可推出 $n = k+1$ 时该命题也成立; 那么当 $n =$ _____ 时该命题不成立, 可推出 $n = 5$ 时该命题也不成立.

二、选择题

11. 下列各组中的两个命题互为等价命题是 ().
(A) “ $M \subseteq N$ ”与“ $M \cup N = N$ ” (B) “ $P \in M$ ”与“ $P \in M \cup N$ ”
(C) “ $P \in M \cap N$ ”与“ $P \in N$ ” (D) “ $P \in M \cup N$ ”与“ $P \in M \cap N$ ”
12. 下列各题中, 甲是乙的一个充分非必要条件的是 ().
(A) 甲: $|x| > 3$, 乙: $x > 3$ 或 $x < -3$ (B) 甲: $x > 3$, 乙: $x > 5$
(C) 甲: $x < 3$, 乙: $x < 5$ (D) 甲: $|x| > 3$, 乙: $x > 3$
13. a, b, c 中至少有一个是非负实数的充要条件是 ().
(A) a, b, c 中全不是负数 (B) a, b, c 中只有一个是负数
(C) a, b, c 中至少有一个正数 (D) a, b, c 不全是负数

三、解答题

14. 设 $A = \{y | y = x^2 - 4x + 6\}$, $B = \{x | x > a\}$. 试给出 $B \subset A$ 的一个充分非必要条件.

