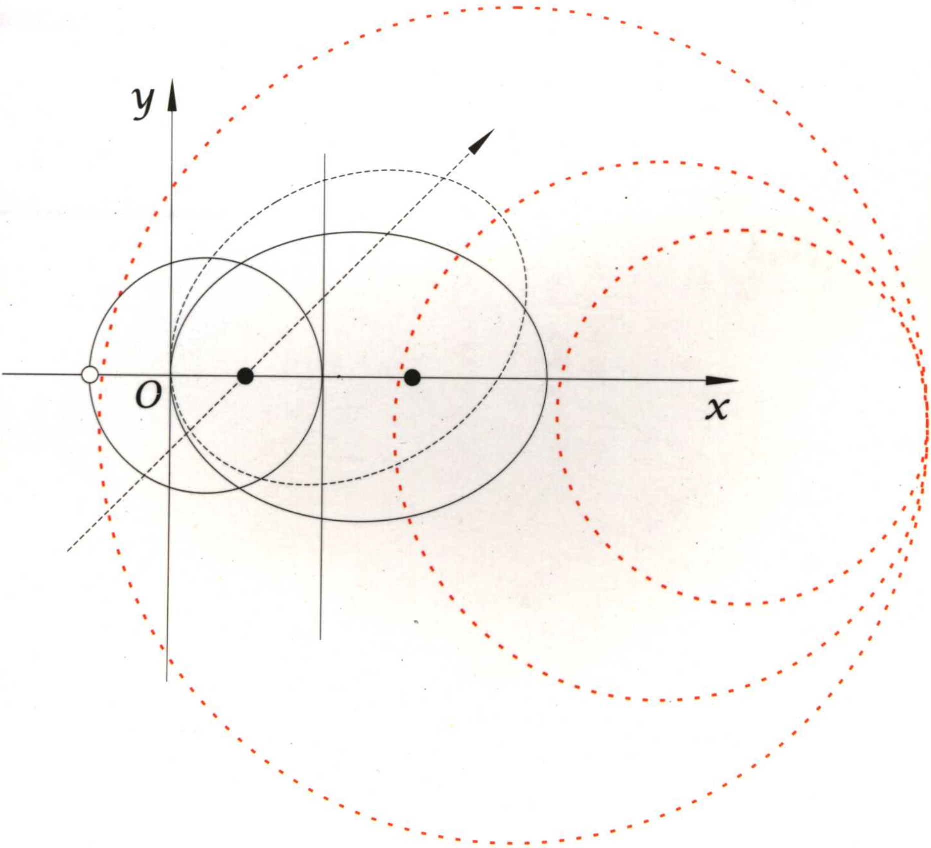
解析几何解题正误辨

JIEXI JIHE JIETI ZHENGWU BIAN

韩可立　编著

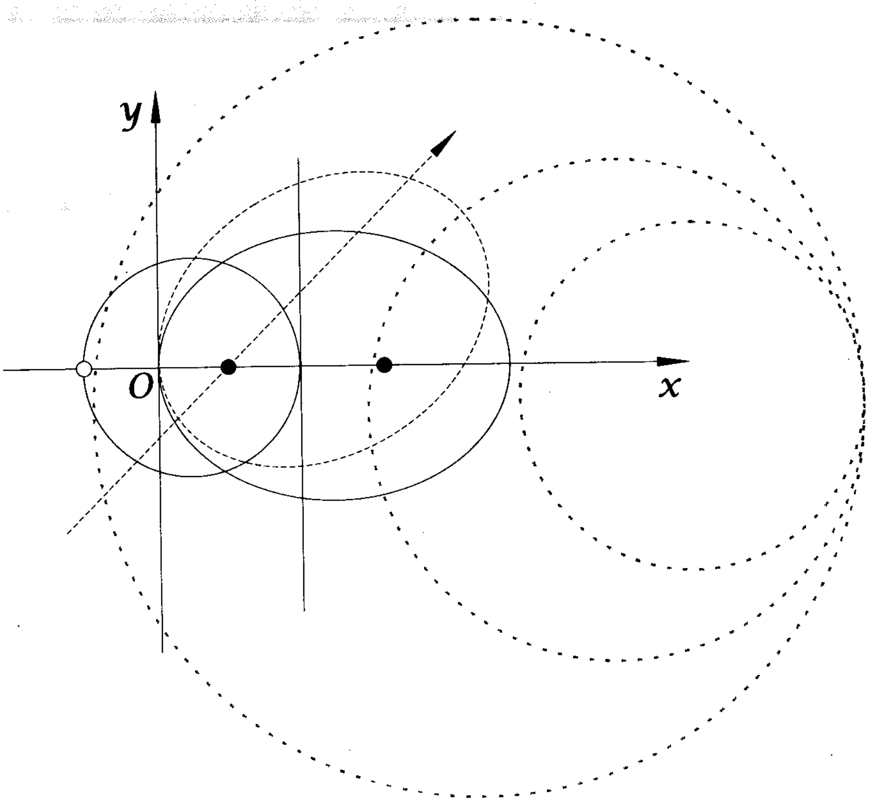


郑州大学出版社

解析几何解题正误辨

JIEXI JIHE JIETI ZHENGWU BIAN

韩可立　编著



郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

解析几何解题正误辨/韩可立编著.—郑州:郑州大学出版社,2005.12

ISBN 7-81106-088-4

Ⅰ.解… Ⅱ.韩… Ⅲ.解析几何课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.653

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 141774 号

郑州大学出版社出版发行
郑州市大学路 40 号　　邮政编码:450052
出版人:邓世平　　发行部电话:0371-66966070
全国新华书店经销
郑州文华印务有限公司印制
开本:850 mm×1 168 mm　　1/32
印张:5.375
字数:144 千字　　印数:1~3 000
版次:2005 年 12 月第 1 版　　印次:2005 年 12 月第 1 次印刷

书号:ISBN 7-81106-088-4/G·173　定价:10.00 元

前　　言

对广大高中学生来讲，学会如何解题，学会如何解对题，是学习数学的主要任务。不少学生在参加完考试或参加完高考后，自我感觉良好，认为题目都会做，解题过程也很顺畅，胸有成竹，但最后结果出来以后才发现差错不少、失分很多，总分与“期望值”相去甚远。为何出现这种情况呢？做题不细心，考虑不全面，平时训练不注意严密性等是造成这种做题不得分的主要原因。许多数学成绩好的学生，他们成功的经验中除了思维灵活、思路开阔外，肯定少不了细心、周密这样的因素，他们中不少人都有自己的“错题本”，每当考试之前就会重温一下。

为了帮助高中生会做题并且做对题，培养学习中缜密思维、周严推理的解题习惯，编者将高中解析几何中常见的典型错解加以汇总并分类详细剖析形成本书。全书收集了相当全面的有关高中解析几何方面的典型错解，其中许多都是看似正确无误、言之有理的，也是在学生学习中经常出现的。对这些错解，书中除了分析其错误所在，也给出了正确的解答，并利用较多的图形给予直观的说明。编者相信，本书的出版能对同学们的学习成绩的提高起到一定的促进作用———里面的大量实例会帮助读者潜移默化并形成缜密思维的解题习惯，从而使同学

们考试后少些惋惜，多些自信与成功；同时，它也能为教师提供一些有用的教学素材。

本书的出版，得到了郑州大学出版社领导和编辑的大力支持，畏友徐照武先生给予了不少宝贵的指点，付梓之际谨向他们表示深深的谢意！

在本书的编写过程中，编者曾参考了许多资料，这里不再一一列举。尽管编者细心撰写、仔细推敲，但限于水平，不当之处恐在所难免，敬请广大读者指正。

韩可立

2005 年 9 月

目 录

第一章 直 线

一、要点提示

1. $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$两点间的距离为：

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

2. $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$两点连线的斜率为：

$$k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.$$

3. 设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，点$P(x,y)$分有向线段AB的比为$\frac{AP}{PB}=\lambda(\lambda\neq-1)$，则$P$点坐标$(x,y)$为：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

当$\lambda>0$时，P为AB的内分点；当$\lambda<0$时，P为AB的外分点. 当$\lambda=1$时，P为AB的中点.

4. 直线方程的常见形式：

(1)斜截式：$y=kx+b$，k为斜率，b为直线在y轴上的截距.

(2)点斜式：$y-y_1=k(x-x_1)$，$P_1(x_1,y_1)$为已知点.

(3)两点式：$(y_2-y_1)(x-x_1)=(x_2-x_1)(y-y_1)$.

(4)截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，$a$，$b$分别为直线在$x$轴、$y$轴上的截距.

(5)参数式:

$$\begin{cases}x=x_1+t\cos\theta,\\ y=y_1+t\sin\theta,\end{cases}\quad t\in(-\infty,+\infty).$$

5. 点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离:

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

6. 直线系:

(1)过定点 (x_1,y_1) 的直线系:

$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$ (A,B 不同时为0).

(2)平行于直线 $Ax+By+C=0$ 的直线系:

$$Ax+By=\lambda \quad (\lambda \text{ 为任意实数}).$$

(3)垂直于直线 $Ax+By+C=0$ 的直线系:

$$Bx-Ay=\lambda \quad (\lambda \text{ 为实数}).$$

(4)过两已知直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点的直线系:

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0.$$

(其中不包括直线 $A_2x+B_2y+C_2=0$).

7. 直线 l_1 和 l_2 的夹角,直线 l_1 到 l_2 的角(即 l_1 绕它和直线 l_2 的交点按逆时针方向旋转到与 l_2 重合,所转过的最小角),这两个概念的意义是不同的. 两直线 l_1,l_2 的夹角 α 规定不大于直角,当夹角小于直角时,设 l_1,l_2 的斜率分别为 k_1,k_2,则

$$\tan\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

直线 l_1 到直线 l_2 的角 θ 可由公式

$$\tan\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$$

求得,其中 k_1,k_2 分别为直线 l_1,l_2 的斜率.

8. 二元二次齐次方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ ($\Delta=B^2-4AC$),当

$\Delta>0$时，为过原点的两条直线；当$\Delta=0$时，为过原点的两条重合直线；当$\Delta<0$时，轨迹为原点.

9. 斜率为k的直线l截圆锥曲线于$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则弦AB的长

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|,$$

此式称为弦长公式.

二、典型题解题评析

1. 试判断$\triangle ABC$的形状，其中$A(1,-2)$，$B(-3,5)$，$C(-5,2)$.

解：$\because\ 1\cdot(-3)+(-2)\cdot 5=-13<0$,

$1\cdot(-5)+(-2)\cdot 2=-9<0$,

$(-3)(-5)+5\cdot 2=25>0$,

$\therefore\ \triangle ABC$为钝角三角形.

评析：上解把点的坐标误认作向量的坐标，得出错误的结论. 这两个“坐标”形式上相似，但实质却完全不同. 给出点的坐标，一般都可以确定有关向量的坐标，但反过来则不行.

正确的解法是：

如图1－1,

$\overrightarrow{CA}=(1,-2)-(-5,2)=(6,-4)$,

$\overrightarrow{CB}=(-3,5)-(-5,2)=(2,3)$,

从而有

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=6\cdot 2+(-4)\cdot 3=0.$

$\therefore\ \overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$. 故$\triangle ABC$为直角三角形.

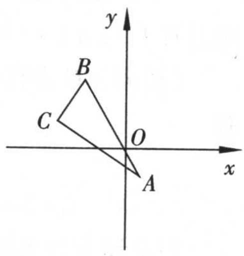


图1－1

知识链接

对于非零向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，若它们的夹角为θ，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，则

$$0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0;$$

$$\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi\Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0;$$

$$\theta=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

此外,$\boldsymbol{a}\mathbin{/\!/}\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\pm|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$(取“+”表示方向一致,取“-”表示方向相反)$\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$($\lambda$ 为不等于 0 的实数).

2. 已知$\triangle ABC$中,$\overrightarrow{AB}=(1,1)$,$\overrightarrow{AC}=(2,k)$,若$\triangle ABC$为直角三角形,求实数 k 的值.

解:$\because\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$,$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

$\therefore\ 1\cdot2+1\cdot k=0$,解得 $k=-2$.

评析:上解误认为只有$\angle A$是直角,漏掉了$\angle B$或$\angle C$可能为直角的情况. 在对向量垂直进行讨论时,切忌被思维定势所误导.

正确的解法是:

(1)若$\angle A$为直角,同上解,解得 $k=-2$.

(2)若$\angle B$为直角,则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. 而

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(2,k)-(1,1)=(1,k-1),$$

所以有 $1\cdot1+1\cdot(k-1)=0$,解得 $k=0$.

(3)若$\angle C$为直角,则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. 由(2)知$\overrightarrow{BC}=(1,k-1)$,故有

$$2\cdot1+k(k-1)=0.$$

$\therefore\ k^2-k+2=0$.

但上述方程无解,所以不存在实数 k 使$\angle C=90°$.

综上所述,当 $k=-2$ 或 $k=0$ 时,$\triangle ABC$为直角三角形.

3. 已知 $A(3,7)$,$B(5,2)$,将$\overrightarrow{AB}$按向量$\boldsymbol{a}=(1,2)$平移,如图 1-2,求平移后所得向量$\overrightarrow{A_1B_1}$的坐标.

解:因为$\overrightarrow{AB}=(2,-5)$,由平移公式,

$$x'=x+h=2+1=3,$$

$$y'=y+k=-5+2=-3.$$

∴　$\overrightarrow{A_1B_1}=(3,-3)$，即$\overrightarrow{A_1B_1}$的坐标为$(3,-3)$.

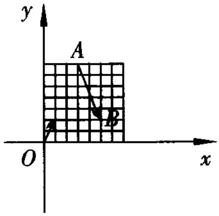


图 1－2

评析：这是一道很有欺骗性的题目，我们知道，向量在平面上进行平移并不改变向量的大小和方向，其坐标也是不会改变的，所以$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}=(2,-5)$. 上解错误地把向量的平移当作了端点的平移.

4. 设平行四边形中 3 个顶点的坐标为 $A(0,0)$，$B(0,b)$，$C(a,c)$，其中 a,b,c 均大于 0，且 $b>c$，求第四个顶点 D 的坐标.

解：如图 1－3，设第四个顶点的坐标为 $D(x,y)$，则由平行四边形的条件，$x=a,y=c+b$.

∴　D 的坐标为$(a,b+c)$.

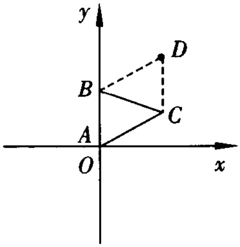


图 1－3

评析：上解只考虑到了一种情况，还有如下两种情况：

(1)若 4 个顶点按 $ACBD$ 逆时针顺序排列，如图 1－4，则由平行四边形的条件，$x=-a,y=b-c$. 即有 $D(-a,b-c)$.

(2)若 4 个顶点按 $ADCB$ 逆时针顺序排列，如图 1－5，则由平行四边形的条件，$x=a,y=c-b$. 即有 $D(a,c-b)$.

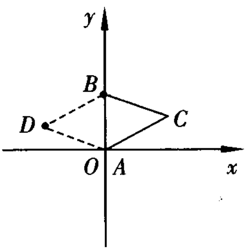


图 1－4

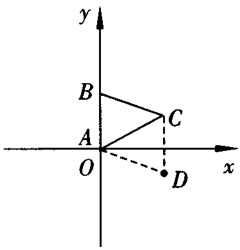


图 1－5

综合上解及(1)、(2),所求 D 点的坐标为:

$$(a,b+c)\quad 或\quad (-a,b-c)\quad 或\quad (a,c-b).$$

向外作出的(虚线)三角形,可以看成绕 $\triangle ABC$ 的三边转了一周.

5. 已知角 α 的终边上的一点的坐标为 $\left(\sin\dfrac{2\pi}{3},\cos\dfrac{2\pi}{3}\right)$,则 α 的最小正值为______.

解:因为 $\tan\alpha=\dfrac{\cos\dfrac{2\pi}{3}}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $\alpha=\dfrac{5\pi}{6}$.

评析:上解混淆了一般角的概念和直线的倾斜角的概念. 若已知点 $P(x_0,y_0)$,则由关系式 $\tan\alpha=\dfrac{y_0}{x_0}$ 求出的 α,是 OP 所在直线的倾斜角,而非 $\angle xOP$ 的(最小)正值,如图 1-6 所示.

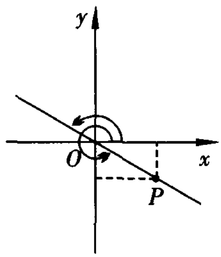


图 1-6

正确解法为:

$\because\quad \sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}>0,\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}<0,$

$\therefore$ 此点在第四象限,所以角 α 的最小正值为 $2\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{11\pi}{6}$.

6. 已知直线 l 过点 $A(1,2)$ 和 $B(m,3)$,求 l 的倾斜角和斜率.

解:设直线 l 的倾斜角为 α,斜率为 k,则 $k=\dfrac{3-2}{m-1}=\dfrac{1}{m-1}$. 而

$$\tan\alpha=k=\frac{1}{m-1},$$

$\therefore\quad \alpha=\arctan\dfrac{1}{m-1}.$

评析:遇到含参数的题目,一定要注意对参数的讨论. 上解忽

视了对斜率不存在的情况的讨论，也在得出倾斜角时忽视了对 $k=\frac{1}{m-1}$ 是否大于0的讨论（值得注意的是反正切函数的值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，而直线倾斜角的范围是 $[0,\pi)$）.

正确解法是：

(1) 当 $m=1$ 时，直线 l 与 x 轴垂直，$\alpha=\frac{\pi}{2}$，斜率 k 不存在.

(2) 当 $m\neq 1$ 时，斜率 $k=\frac{1}{m-1}$（同上解）.

若 $m>1$，则倾斜角 $\alpha=\arctan\frac{1}{m-1}$；若 $m<1$，则倾斜角 $\alpha=\pi+\arctan\frac{1}{m-1}$.

知识链接

(1) 直线的倾斜角是分两种情况来定义的：

1) 对于与 x 轴相交的直线，把 x 轴绕着交点按逆时针方向旋转到和直线重合时所转的最小正角叫做直线的倾斜角；

2) 当直线和 x 轴平行或重合时，直线的倾斜角规定为0°.

由以上定义可知，直线的倾斜角 α 的范围是 $0°\leqslant\alpha<180°$. 坐标平面内任何一条直线都有唯一确定的倾斜角.

(2) 斜率和倾斜角的关系：

已知直线的倾斜角 $\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$，则直线的斜率 $k=\tan\alpha$.

已知直线的斜率 k，则直线的倾斜角 α 为：

当 $k\geqslant 0$ 时，$\alpha=\arctan k$；当 $k<0$ 时，$\alpha=\pi+\arctan k$.

对于两条直线 l_1,l_2，若它们的斜率相等，即 $k_{l_1}=k_{l_2}$，则 l_1 与 l_2 的倾斜角也一定相同.

7. 已知直线的斜率 $k=\dfrac{b}{a}(ab<0)$，求此直线的倾斜角.

解： 设直角的倾斜角为 θ，则 $\tan\theta=k=\dfrac{b}{a}$.

所以 $\theta=\arctan\dfrac{b}{a}$ 或 $\theta=\pi-\arctan\dfrac{b}{a}$，即为所求.

评析： 当 $ab<0$ 时，$\arctan\dfrac{b}{a}\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$，

$$\pi-\arctan\frac{b}{a}\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right),$$

而我们知道直线的倾斜角的取值范围为 $[0,\pi)$，所以上解的答案是错误的. 正确的答案是：$\theta=\pi+\arctan\dfrac{b}{a}$.

8. 已知点 $A(2,-3)$，$B(-3,-2)$，直线 l 过点 $P(1,1)$，且与线段 AB 相交，求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

解： 因为 $k_{PA}=-4$，$k_{PB}=\dfrac{3}{4}$，又因为直线 l 与线段 AB 相交，所以直线 l 的斜率 k 的取值范围是：$-4\leqslant k\leqslant\dfrac{3}{4}$.

评析： 上述解法错误地认为斜率 $k=\tan\alpha$（α 表示直线的倾斜角）在 $[0,\pi)$（倾斜角的范围）内是严格单调的，进而得出错误的结论. 事实上，当 $\alpha\in[0,\pi)$ 时，由正切函数的图像易知 $k=\tan\alpha$ 并不是单调的.

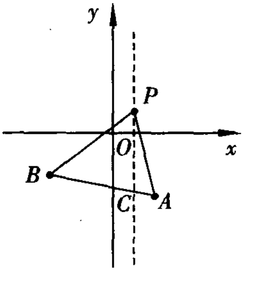


图 1－7

正确解法是：

如图 1－7，过 P 点作 PC 平行于 y 轴，交 AB 于 C. 当直线 l 在 PB，PC 间时，$k\geqslant k_{PB}=\dfrac{3}{4}$；当直线 l 在 PC，PA 间时，$k\leqslant k_{PA}=-4$. 综合，所求斜率

k 的取值范围是 $k \geqslant \frac{3}{4}$ 或 $k \leqslant -4$.

知识链接

一个函数 $f(x)$,若它在区间 $[a,b]$ 上单调递增(减),在区间 $[c,d]$ 上也单调递增(减),则我们只能说 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 或 $[c,d]$ 上单调递增(减),而不能说 $f(x)$ 在区间 $[a,b] \cup [c,d]$ 上单调递增(减).

当一条直线的倾斜角 α(在 $[0,\pi)$ 范围内)在一个区间内变动时,或者相当于直线在平面直角坐标系中连续转动时,比如 $\alpha \in [a,b]$,则直线的斜率即 $\tan\alpha$ 的取值范围有 3 种情况:

(1) 当 $b < \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan a \leqslant \tan\alpha \leqslant \tan b$;

(2) 当 $b = \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan\alpha \geqslant \tan a$;

(3) 当 $b > \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan\alpha \geqslant \tan a$, 或 $\tan\alpha \leqslant \tan b$.

9. 平面直角坐标系 xOy 中,直线 $x\cos\theta + y + m = 0$(θ 是 $\triangle ABC$ 中的最大角),则此直线的倾斜角的变化范围是(　　).

A. $\left[-\arctan\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$　　B. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$

C. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$　　D. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left[\pi - \arctan\frac{1}{2}, \pi\right)$

解: 显然,由题意 $y = -\cos\theta \cdot x - m$,设直线倾斜角为 α,则有 $\tan\alpha = -\cos\theta$. 而 $\frac{\pi}{3} \leqslant \theta < \pi$,故对 $\cos\theta$ 有 $-1 < \cos\theta \leqslant \frac{1}{2}$. 所以 $-\frac{1}{2} \leqslant \tan\alpha < 1$, $-\arctan\frac{1}{2} \leqslant \alpha < \frac{\pi}{4}$. 选 A.

评析: 上解考虑问题不全面,也没有注意直线倾斜角所定义的

范围 $0 \leqslant \alpha < \pi$.

正确的解法是：

……（同上解）$\tan\alpha = -\cos\theta$. θ 有 3 种情况：

(1) 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，$\tan\alpha = 0$，故 $\alpha = 0$；

(2) 当 $\frac{\pi}{3} \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ 时，$0 < \cos\theta \leqslant \frac{1}{2}$，$\pi - \arctan\frac{1}{2} \leqslant \alpha < \pi$；

(3) 当 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 时，$-1 < \cos\theta < 0$，$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

正确答案应是 D.

10. 求经过点 $P(-2,3)$，倾斜角是直线 $3x+4y-5=0$ 倾斜角一半的直线的方程.

解：设直线 $3x+4y-5=0$ 的倾斜角为 α，则

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} = -\frac{3}{4}.$$

解得 $\tan\frac{\alpha}{2} = 3$ 或 $\tan\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{3}$.

由点斜式得所求直线方程为 $3x-y+9=0$ 或 $x+3y-7=0$.

评析：上解忽视了题中隐含的条件. 其实，由 $\tan\alpha = -\frac{3}{4}$，$0 \leqslant \alpha < \pi$，知 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$，从而 $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$. 故 $\tan\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{3}$ 不合题意，应舍去. 所以所求直线方程只有 $3x-y+9=0$.

11. 已知 AB 的两个端点的坐标分别是 $A(-1,2)$，$B(3,4)$，延长 AB 至 P，使 $|AP| = 3|BP|$，求点 P 的坐标.

解：点 P 分 AB 所成的比 $\lambda = \frac{|AP|}{|BP|} = 3$，则由定比分点公式，对点 $P(x,y)$ 有：

$$x=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{-1+3\cdot 3}{1+3}=2,$$

$$y=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}=\frac{2+3\cdot 4}{1+3}=\frac{7}{2}.$$

∴　点 P 的坐标为$\left(2,\frac{7}{2}\right)$.

评析:λ 是有向线段的比,$\lambda=\frac{AP}{PB}$,如果点 P 在 AB 的延长线上,则 AP 与 PB 方向相反,λ 应取负值. 上解仅从 λ 的定义的形式上理解,对 λ 的意义(有向线段之比)没有透彻理解.

正确解法是:

∵　点 P 在 AB 的延长线上,

∴　P 是外分点,λ 应为负值.

又 $|AP|=3|BP|$,所以 $\lambda=\frac{AP}{PB}=-3$.

对 $P(x,y)$ 有:

$$x=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{-1+(-3)\cdot 3}{1-3}=5,$$

$$y=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}=\frac{2+(-3)\cdot 4}{1-3}=5.$$

∴　点 P 的坐标为$(5,5)$.

知识链接

有向线段是指一条指定了方向的线段,在这条有向线段所在的直线上,所有指向与这条有向线段方向一致的线段,其数量取正值;所有指向与这条有向线段方向相反的线段,其数量取负值. 特别地,$BA=-AB$(这里,有向线段 AB 的第一个字母为起点,第二个字母为终点,要注意顺序的写法).

有向线段和向量有区别,有向线段间可以比较大小,但向量间