Friedhelm Kuypers

Klassische Mechanik

mit 64 Beispielen und 133 Aufgaben mit Losungen

Friedhelm Kuypers

Klassische Mechanik

mit 64 Beispielen und 133 Aufgaben mit Lösungen

physik-verlag Weinheim

Dr. Friedhelm Kuypers
Freiburger Weg 18
D-7833 Endingen a.K.

Dieses Buch enthält 120 Abbildungen

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Kuypers, Friedhelm:

Klassische Mechanik: mit 64 Beispielen u. 133 Aufgaben mit Lösungen / Friedhelm Kuypers.
Weinheim: Physik-Verlag, 1983.
ISBN 3-87664-070-9

Druck: betz-druck gmbh, D-6100 Darmstadt
Buchbinder: G. Kränkl, D-6148 Heppenheim
Umschlaggestaltung: Klaus Marinoff, D-6906 Leimen
Printed in West Germany

Vorwort

Dieses Buch wurde hauptsächlich für Studenten geschrieben, die eine einsemestrige Vorlesung über Klassische Mechanik hören. Auch Studierende, die sich auf eine Prüfung oder Klausur vorbereiten, können dieses Buch wegen der kompakten Darstellung, der vielen Beispiele und gelösten Aufgaben mit Gewinn lesen. Für das Verständnis wird nur die Kenntnis der einfachen Newtonschen Mechanik und der Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung sowie der Linearen Algebra vorausgesetzt.

Die wichtigen Themen der Klassischen Mechanik werden ausführlich behandelt. Lediglich den kleinen Schwingungen ist kein eigener Abschnitt gewidmet. Dafür sind zahlreiche Rechnungen und Aufgaben zu diesem Thema über das ganze Buch verteilt. Besonderer Wert wird auf eine eingehende Untersuchung der Prinzipien und Formulierungen der Klassischen Mechanik gelegt. Umfangreiche Abschnitte erörtern die kanonischen Transformationen, das Noether-Theorem sowie die Winkel- und Wirkungsvariablen. Ferner wird gezeigt, daß die Fundamente der Statistischen Physik und der Quantenmechanik bereits in der Klassischen Mechanik liegen.

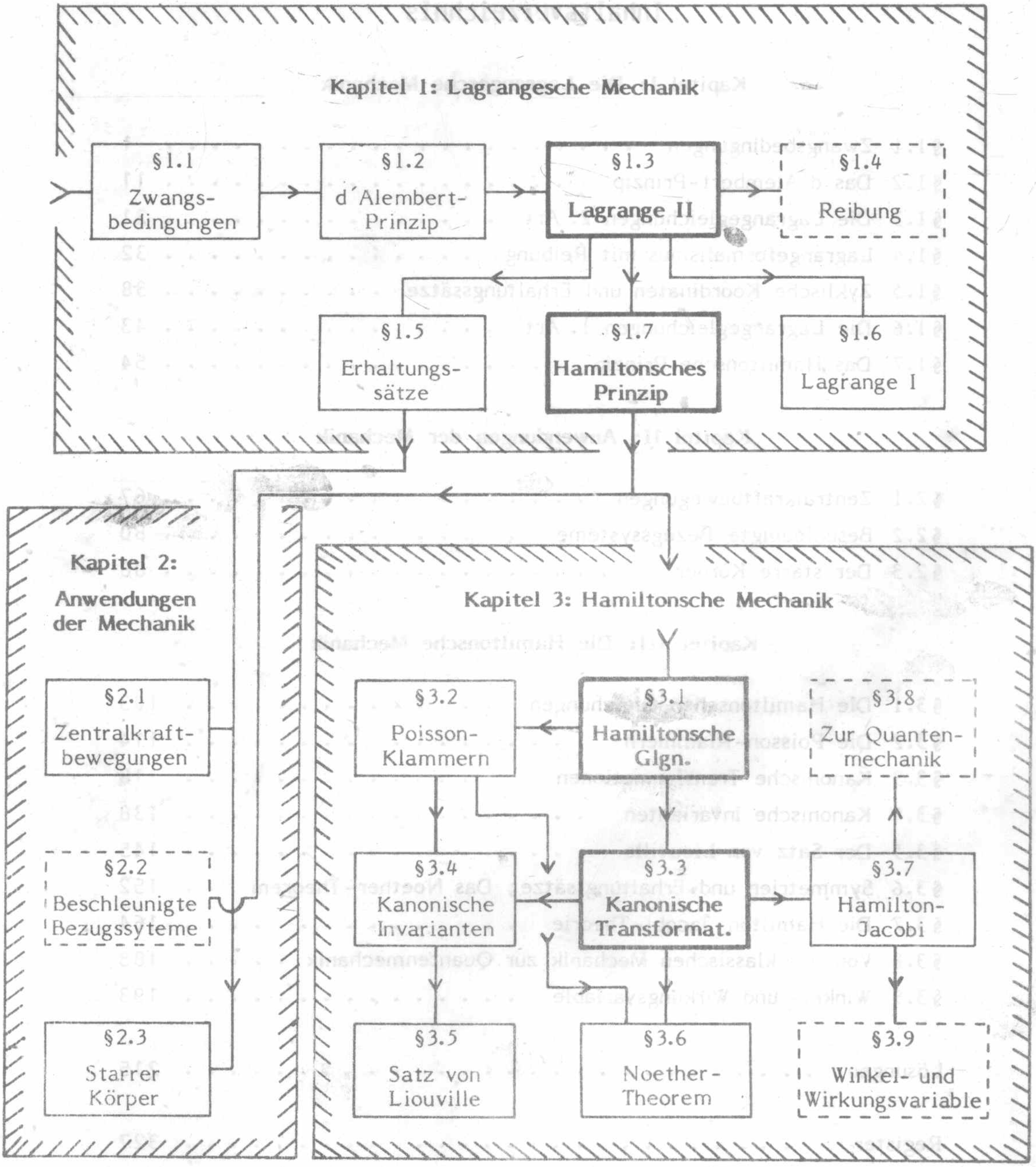
Dieses Buch unterscheidet sich in den inhaltlichen Schwerpunkten und insbesondere in der methodischen Ausführung von anderen Lehrbüchern. Ich habe mich vor allem um Klarheit und gute Verständlichkeit bemüht. Dies äußert sich in den folgenden vier Merkmalen:

1. Zahlreiche sorgfältig ausgewählte *Beispiele* werden in den Lehrstoff eingearbeitet, um Aussagen zu verdeutlichen, Rechenmethoden einzuüben und neu auftretende Probleme und Schwierigkeiten praxisnah vorzubereiten. Die Beispiele sind eingerahmt und heben sich daher vom übrigen Text ab.
2. Das Buch ist *kompakt* geschrieben. Ohne Aufgaben und Lösungen umfaßt es nur etwa 200 Seiten. Dies wurde erreicht einerseits durch einen Verzicht auf die Erläuterung „elementarer" Begriffe der Newtonschen Mechanik – wie etwa Kraft oder Inertialsystem –, andererseits durch den Einbau der Beispiele, die eine umfangreiche Besprechung nichtzentraler Themen überflüssig machen. Dabei geht die Kürze des Buches nicht auf Kosten der Anschaulichkeit und Verständlichkeit und führt zu keiner Einschränkung im Niveau oder in der Stoffülle. Der Inhalt ist in einem Semester zu bewältigen. Prüfungskandidaten können sich schnell und gezielt informieren.
3. Bedeutung und Nutzen der behandelten Themen werden stets ausführlich gewürdigt und diskutiert. Eine *Bewertung* und *Einordnung* scheint mir vor allem in der Klassischen Mechanik erforderlich zu sein, da es hier mehrere äquivalente Formalismen und Prinzipien gibt, die verschiedene „Daseinsberechtigungen" haben.
4. In jedem Abschnitt werden *Aufgaben* gestellt, die sich eng an den behandelten Stoff anlehnen und deren ausführliche *Lösungen* am Ende des Buches stehen. Der Schwierigkeitsgrad – leicht, mittel, schwer – ist jeweils angegeben. Der Student kann hier sein Verständnis überprüfen, seine Rechenfertigkeiten verbessern sowie Aussagen und Feststellungen des Haupttextes in konkreter Form wiederholen.

Die Arbeit an diesem Buch wurde durch Diskussionen mit Prof. J. Honerkamp und Dr. P. Weber wesentlich gefördert. Prof. J. Briggs, Prof. S. Flügge und insbesondere Dipl.-Phys. M. Zähringer danke ich für die Bereitschaft, das Manuskript zu lesen sowie für viele Verbesserungsvorschläge und konstruktive Kritik.

Allen Lesern, die durch Bemerkungen und Anregungen zur Verbesserung des Werkes beitragen, werde ich sehr dankbar sein.

Endingen, im September 1982 — **Friedhelm Kuypers**



Hinweise für den Leser

1) Das Flußdiagramm auf dieser Seite macht den Aufbau des Buches deutlich und zeigt dem Leser, welche Paragraphen er überspringen darf, ohne deshalb später Verständnisschwierigkeiten befürchten zu müssen. Dick eingerahmte Kästchen kennzeichnen zentrale Paragraphen; weniger wichtige Abschnitte werden durch gestrichelte Kästchen umfaßt.

2) Aufgaben, die nach Ansicht des Autors besonders interessant, reizvoll oder lehrreich sind, werden durch dünne Pfeile ▷ kenntlich gemacht. Aufgaben mit dicken Pfeilen ▶ sollen unbedingt bearbeitet werden, da sie wichtige Probleme behandeln und ihre Aussage i. a. auch im Text selber verwendet wird.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I: Die Lagrangesche Mechanik

Kapitel II: Anwendungen der Mechanik

Kapitel III: Die Hamiltonsche Mechanik

Kapitel I

Die Lagrangesche Mechanik

Die klassische Mechanik ist ein unerläßlicher Bestandteil der theoretischen Ausbildung, da sie viele der für das Verständnis der Physik unentbehrlichen Grundbegriffe einführt und wegen ihrer Anschaulichkeit den besten Einblick in theoretische Methoden und Arbeitsweisen gibt. Technische Anwendungen und mechanische Problemstellungen sind vielfältig und gewichtig. Zudem ist die klassische Mechanik der Ausgangspunkt für die Entwicklung von statistischer Mechanik und Quantenmechanik und viele ihrer Zusammenhänge und Gesetze finden sich auf anderen Gebieten wieder.

Die fundamentalen Begriffe wie etwa Kraft, Energie, Impuls, Dreh- und Trägheitsmoment, Inertialsystem und vor allem das zweite Newtonsche Gesetz $F = m\ddot{r}$ werden als bekannt vorausgesetzt. Ausgehend von der Newtonschen Mechanik und dem Postulat, daß Zwangskräfte keine virtuelle Arbeit leisten, entwickeln wir in Kapitel I andere Formulierungen der Mechanik, deren großer Vorzug in erster Linie darin besteht, die Kenntnis der Zwangskräfte nicht zu benötigen:

- Das d'Alembert-Prinzip ermöglicht den besten Einstieg in die Lagrangesche Mechanik und wird gerne zur Bestimmung von Kräften und Gleichgewichten benutzt.
- Kern der analytischen Mechanik ist der Lagrangeformalismus 2. Art. Er liefert i.a. den schnellsten und einfachsten Weg zur Berechnung von Bewegungsglgn. und macht den Zusammenhang zwischen Erhaltungsgrößen und Symmetrien sehr deutlich.
- Die Lagrangeglgn. 1. Art gelten auch für Systeme mit differentiellen Nebenbedingungen und bestimmen die Zwangskräfte.
- Das Hamiltonsche Prinzip schließlich ist eine prägnante, koordinatenunabhängige Formulierung, aus der die Lagrangeglgn. 1. Art und 2. Art und die kanonischen Glgn. leicht und schnell abgeleitet werden können. Seine große Bedeutung liegt vor allem darin, daß es für die Untersuchung von Variablentransformationen benötigt wird und auch auf anderen Gebieten der Physik Prinzipien der stationären Wirkung auftreten.

§1.1 Zwangsbedingungen

Ein N-Teilchensystem, dessen Mitglieder äußeren Kräften $\mathbf{F}_i$ unterworfen sind und auch noch durch innere Kräfte $\mathbf{F}_{ij}$ des j-ten auf das i-te Teilchen miteinander wechselwirken, wird nach dem zweiten Newtonschen Gesetz durch die Differentialglgn. (im folgenden mit "Dgln." abgekürzt)

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{F}_{ij} \qquad i = 1,\ldots N \qquad j \neq i$$

beschrieben. Die Integration dieser Dgln. liefert den Bewegungsablauf.

Natürlich ist es nicht immer sinnvoll, die Dgln. in kartesischen Koordinaten aufzustellen. Vielmehr sollte man sich vor der Bearbeitung einer gegebenen Aufgabe stets überlegen, welche Koordinaten oder andere Größen am geeignetsten für die Beschreibung und Berechnung sind. Eine mechanische Anordnung kann ja nicht nur durch kartesische, sondern auch durch zylindrische, sphärische, parabolische .... Koordinaten bestimmt werden. Es ist sogar möglich, den Zustand eines Systems durch andersartige Größen wie etwa Energie oder Drehimpuls zu beschreiben, auch wenn von dieser Möglichkeit nur äußerst selten Gebrauch gemacht wird. Alle diese denkbaren Größen, die in der Lage sind, die Konfiguration einer mechanischen Anordnung zu kennzeichnen, werden "generalisierte" (verallgemeinerte) Koordinaten genannt; für sie ist der Buchstabe q gebräuchlich.

Der Leser hat nun vielleicht den Eindruck, daß alle mechanischen Aufgaben auf in generalisierte Koordinaten ausgedrückte Newtonsche Dgln., in denen lediglich Beschleunigungs-, äußere und innere Kräfte auftreten, zurückgeführt werden können. Dies ist jedoch nicht der Fall, da die meisten Aufgaben Zwangsbedingungen enthalten, die dem Bewegungsablauf geometrische Einschränkungen auferlegen und die Anzahl der Freiheitsgrade, die für ein N-Teilchensystem ohne Nebenbedingungen gleich 3N ist, verringern. Systeme unter Zwang lassen sich überall finden: Eine Perle gleitet auf einem Draht, ein Zylinder oder eine Kugel rollt auf einer Fläche, ein Körper hängt an einem Faden oder rotiert um eine feste Achse,.....

Bevor wir auf die Problematik der Zwangsbedingungen näher eingehen, wollen wir sie klassifizieren:

a) Holonome Zwangsbedingungen

Sie werden durch Glgn. dargestellt, die die Teilchenkoordinaten und eventuell auch die Zeit miteinander verknüpfen. Die holonomen Zwangsbedingungen lauten für ein System mit N Teilchen, deren freie Position durch 3N generalisierte Koordinaten q_j festgelegt ist:

$$f_i(q_1,\ldots q_{3N},t) = 0 \qquad i = 1,\ldots k \qquad (1\text{-}1)$$

Die k Zwangsbedingungen (1-1) reduzieren die Anzahl der Freiheitsgrade auf 3N-k.

Beispiel (1.1) Ein Zylinder mit Radius r rollt ohne Schlupf eine Ebene herunter. Ohne Zwangsbedingungen würde man drei Koordinaten benötigen, um die Lage des freien Zylinders in der Ebene zu kennzeichnen: Die beiden Mittelpunktskoordinaten x,y und den Orientierungswinkel φ. In dem vorliegenden Fall hat man jedoch nur eine unabhängige Koordinate, etwa den Winkel φ. Daher existieren zwei Zwangsbedingungen

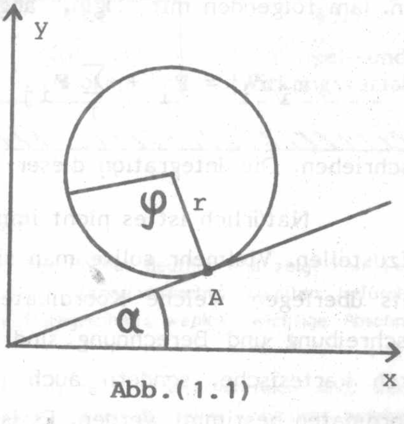


Abb.(1.1)

$$x_A - r\varphi\cos\alpha = 0 \qquad y_A - r\varphi\sin\alpha = 0$$

wobei x_A, y_A die Koordinaten des Auflagepunktes A sind.

Beispiel (1.2) Ebenes Pendel mit der Fadenlänge l. Die Kugelkoordinaten r und φ werden durch die Glgn.

$$r = l \qquad \varphi = \text{const}$$

festgelegt, so daß lediglich der Winkel ϑ frei ist. (Siehe Abb. (1.21).)

Beispiel (1.3) Auf einem parabelförmig gebogenen Draht, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse dreht, sitzt eine Perle.

In Zylinderkoordinaten lauten die beiden Zwangsbedingungen:

$$\varphi - \omega t = 0 \qquad (1\text{-}2a)$$

$$z - ar^2 = 0 \qquad (1\text{-}2b)$$

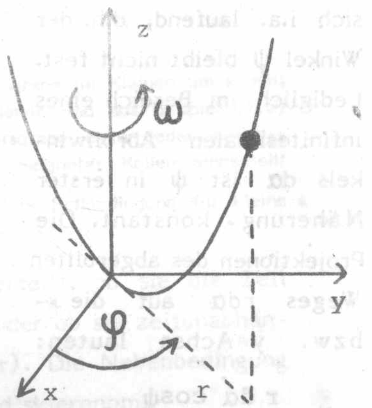


Abb. (1.2)

b) Nicht-holonome Zwangsbedingungen

Die geometrische Einschränkung der Bahnkurven läßt sich nicht durch Glgn. zwischen den generalisierten Koordinaten bestimmen, d.h. nicht in Form der Beziehungen (1-1) schreiben.

Beispiel (1.4) Ein punktförmiges Teilchen rutscht die Oberfläche einer Kugel mit Radius R herunter. Ist die Geschwindigkeit hoch genug, hebt es wegen der Zentrifugalbeschleunigung von der Kugeloberfläche ab. Die Zwangsbedingung lautet:

$$r^2 - R^2 \geq 0$$

Ungleichungen sind nur ein Spezialfall nicht-holonomer Zwangsbedingungen; es gibt z.B. auch nicht-holonome Einschränkungen, die sich nur in differentieller Form schreiben lassen.

Beispiel (1.5) Das Standardbeispiel für nicht-holonome differentielle Nebenbedingungen bildet die Kreisscheibe, die ohne Schlupf auf der (x,y)-Ebene rollt. Ihre Stellung wird durch die Koordinaten x_A, y_A des Auflagepunktes A, den Rollwinkel α, den Kippwinkel φ und den Winkel ψ zwischen Scheibenebene und x-Achse gekennzeichnet.

Wegen der Rollbedingung bewegt sich das Rad zu jedem Zeitpunkt in Richtung der momentanen Scheibenebene. Die Orientierung der Scheibe ändert sich i.a. laufend, d.h. der Winkel ψ bleibt nicht fest. Lediglich im Bereich eines infinitesimalen Abrollwinkels $d\alpha$ ist ψ in erster Näherung konstant. Die Projektionen des abgerollten Weges $r\,d\alpha$ auf die x- bzw. y-Achse lauten:

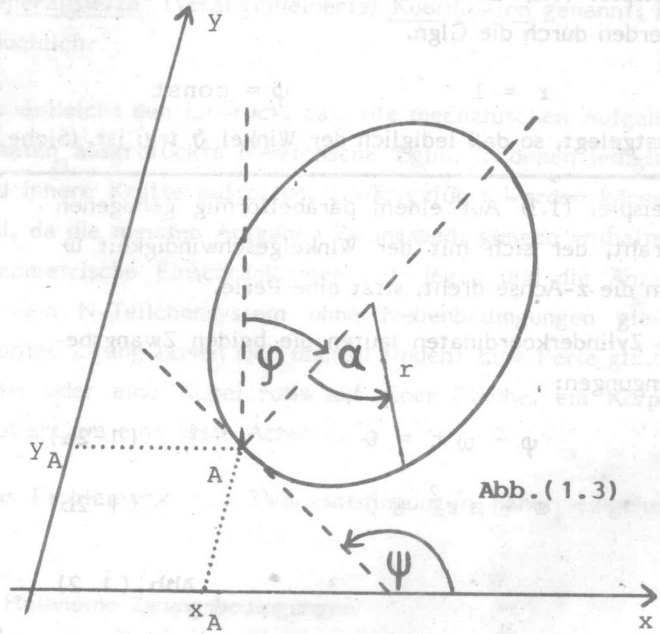


Abb. (1.3)

$$r\,d\alpha\,\cos\psi$$

bzw. $r\,d\alpha\,\sin\psi$

so daß folgende zwei differentielle Bedingungen für die fünf Scheibenkoordinaten x_A, y_A, α, φ, ψ gelten:

$$dx_A - r\,d\alpha\cos\psi = 0 \qquad dy_A - r\,d\alpha\,\sin\psi = 0 \qquad (1\text{-}3a/4a)$$

Division durch dt ergibt die äquivalenten Beziehungen:

$$\dot{x}_A - r\dot{\alpha}\cos\psi = 0 \qquad \dot{y}_A - r\dot{\alpha}\sin\psi = 0 \qquad (1\text{-}3b/4b)$$

Die Glgn. (1-3a/4a) können nicht integriert und somit nicht in holonome Form gebracht werden; die Rollbedingung sagt nämlich nicht, wohin die Scheibe rollt, d.h. wie sich der Orientierungswinkel ψ in Abhängigkeit vom Rollwinkel α ändert. Aus diesem Grund bilden die Glgn. (1-3/4) keine holonomen Nebenbedingungen[1].

Nicht-holonome Nebenbedingungen zwischen den Differentialen bzw. Geschwindigkeiten lauten — in Verallgemeinerung der Glgn. (1-3) bzw. (1-4) —

$$\sum_j a_{ij}\,dq_j + a_{it}\,dt = 0 \qquad (1\text{-}5a)$$

1) In der sehr reizvollen Aufgabe (1.61) werden die Bewegungsglgn. eines rollenden Reifens aufgestellt und die Ergebnisse der numerischen Integration qualitativ diskutiert.
Die Aufgaben (1-59/60) enthalten zwei weitere, einfachere Beispiele für differentielle Nebenbedingungen.

bzw. $\sum_j a_{ij}\dot{q}_j + a_{it} = 0$ (1-5b)

wobei durch a_{it} noch eine Zeitabhängigkeit hinzukommt. Die Koeffizienten a_{ij} und a_{it} sind Funktionen der q_i. Beachte, daß die Glgn. (1-5) nur dann nicht-holonome Zwangsbedingungen darstellen, wenn sie — ohne Kenntnis des Bewegungsablaufes — nicht integrierbar sind, d.h. wenn die a_{ij} und a_{it} nicht in der Form

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \qquad a_{it} = \frac{\partial f_i}{\partial t}$$

geschrieben werden können. (Siehe auch Aufgabe (1.18).)

Bemerkung: k differentielle Nebenbedingungen schränken die Zahl der Freiheitsgrade im Kleinen um k ein; die Zahl der Freiheitsgrade im Großen hingegen bleibt unverändert. Das rollende Rad aus Beispiel (1.5) veranschaulicht diese Aussage am besten: Im Großen hat das Rad fünf Freiheitsgrade, da an jedem beliebigen Auflagepunkt x_A, y_A alle gewünschten Werte von α, φ, ψ durch geeignetes Rollen eingestellt werden können. Im Kleinen aber hat das Rad nur drei Freiheitsgrade, da die Rollbedingung für kleine Verschiebungen zwei Einschränkungen liefert.

Zwangsbedingungen werden außerdem danach unterteilt, ob sie die Zeit explizit enthalten — dann heißen sie "rheonom" (fließend) — oder ob sie zeitunabhängig sind — in diesem Fall nennt man sie "skleronom" (starr). Die Nebenbedingung in Glg. (1-2a) ist rheonom, alle anderen bisher vorgelegten sind skleronom.

Wir kommen nun auf die Problematik der Zwangsbedingungen zurück und stellen fest, daß zwei neue Gesichtspunkte zu beachten sind:

a) Der Bewegungsablauf eines N-Teilchensystems, das k Zwangsbedingungen unterliegt, erfolgt nicht im 3N dimensionalen, sondern in einem eingeschränkten 3N-k dimensionalen Konfigurationsraum [1]. Rechnerisch wird diese Einschränkung auf den Unterraum dadurch verwirklicht, daß nicht alle 3N, sondern nur 3N-k unabhängige Koordinaten in die Bewegungsglgn. eingesetzt werden. (Siehe die nächsten beiden Beispiele (1.6/1.7).) Da in der klassischen Mechanik überwiegend holonome Zwangsbedingungen auftreten, kann dieses Problem grundsätzlich gelöst werden, indem man k unabhängige Koordinaten durch die Glgn.

$$f_i(q_1,\ldots q_{3N},t) = 0 \qquad i = 1,\ldots k \qquad (1-1)$$

beseitigt. Die restlichen 3N-k generalisierten Koordinaten q_j' sind unabhängig. Durch die Transformationsglgn.

$$q_l = q_l(q_1',\ldots q_{3N-k}',t) \qquad l = 1,\ldots 3N \qquad (1-6)$$

1) Die Konfiguration eines Systems wird durch den Wert der unabhängigen Koordinaten gekennzeichnet und entspricht daher einem Punkt in einem 3N-k dimensionalen Hyperraum. Dieser durch die unabhängigen Koordinaten aufgespannte Raum heißt daher "Konfigurationsraum".

werden die 3N abhängigen Koordinaten durch die 3N-k unabhängigen ausgedrückt.

Bemerkung: Generalisierte Koordinaten sind nicht notwendig unabhängig, d.h. "generalisiert" und "unabhängig" sind zwei verschiedene Begriffe.

b) Bei der Existenz von Nebenbedingungen können die Bewegungsglgn. nicht

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i$$

sondern müssen

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{Z}_i \qquad (1\text{-}7)$$

lauten[1]. Dabei sind m_i und $\mathbf{r}_i$ Masse und Ortsvektor des i-ten Teilchens, $\mathbf{F}_i$ die äußere Kraft und $\mathbf{Z}_i$ die Zwangskraft auf das i-te Teilchen, die die geometrische Einschränkung des Bewegungsablaufes bewirkt — in Beispiel (1.2) die Fadenspannung, die den Pendelkörper auf der Kugeloberfläche hält oder in Beispiel (1.3) die Kraft, welche die Perle an den Draht bindet. Gravitations-, Feder-, elektromagnetische Kräfte usw., d.h. die äußeren Kräfte lassen sich meist leicht bestimmen. Die Wirkungen der Zwangskräfte, d.h. die Nebenbedingungen, sind bekannt. Die Größe der $\mathbf{Z}_i$ hingegen ist i.a. unbekannt. Dies bedeutet, daß die Lösung der Dgln. (1-7) nicht unmittelbar gewonnen werden kann, sondern weitere Überlegungen erforderlich sind.

Wir untersuchen zwei Beispiele, die diese Schwierigkeiten veranschaulichen und Hinweise auf Lösungsmöglichkeiten geben.

Beispiel (1.6) Ein punktförmiges Teilchen m rollt auf der Innenseite eines Kreiskegels.

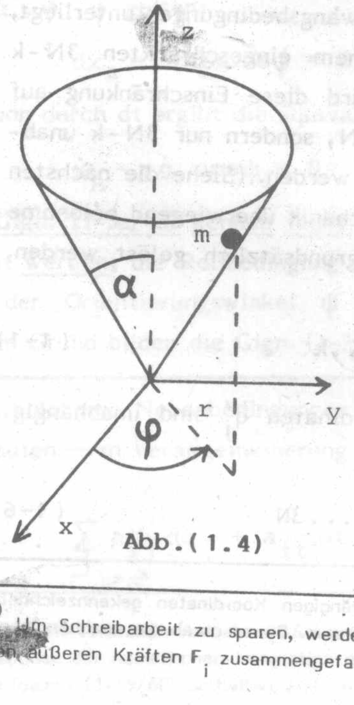


Abb.(1.4)

Die Gravitationskraft wirkt in negative z-Richtung. Die Bewegungsglgn. (1-7) lauten:

$$m\ddot{x} = Z_x \qquad (1\text{-}8a)$$

$$m\ddot{y} = Z_y \qquad (1\text{-}8b)$$

$$m\ddot{z} = Z_z - mg \qquad (1\text{-}8c)$$

Wir wählen nun die Zylinderkoordinaten (z, r, φ) als generalisierte Koordinaten. Infolge der einen Nebenbedingung

$$r - z\,\mathrm{tg}\alpha = 0 \qquad (1\text{-}9)$$

sind nur zwei unabhängig, etwa r, φ. Es gilt:

$$(x, y, z) = r(\cos\varphi, \sin\varphi, \mathrm{ctg}\alpha)$$

[1] Um Schreibarbeit zu sparen, werden die Summanden $\sum_j \mathbf{F}_{ij}$ über die inneren Kräfte ab jetzt stets mit den äußeren Kräften $\mathbf{F}_i$ zusammengefaßt.

Daraus folgt:

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi$$

$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

$$\ddot{z} = \ddot{r}\cot g\alpha$$

Diese Glgn. werden in die Glgn. (1-8) eingesetzt:

$$m(\ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi) = Z_x \tag{1-10a}$$

$$m(\ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi) = Z_y \tag{1-10b}$$

$$m(\ddot{r}\cot g\alpha + g) = Z_z \tag{1-10c}$$

Damit ist das erste oben angesprochene Problem gelöst: Die Aufgabe ist auf unabhängige Koordinaten umgerechnet.

Die drei Glgn. (1-10) enthalten fünf Unbekannte: $r(t), \varphi(t), Z_x, Z_y, Z_z$. Die Feststellung, daß die Zwangskraft $Z = (Z_x, Z_y, Z_z)$ senkrecht zur Kegelwand steht, ermöglicht die Streichung von zwei Unbekannten:

$$Z_y = Z_x\, tg\varphi \tag{1-11a}$$

$$Z_z = \sqrt{Z_x^2 + Z_y^2}\; tg\alpha = -Z_x\, tg\alpha / \cos\varphi \tag{1-11b}$$

Wir setzen die Glgn. (1-11) in die Glgn. (1-10) ein, multiplizieren Glg. (1.10a) mit $tg\varphi$ und subtrahieren Glg. (1-10b):

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \tag{1-12}$$

Glg. (1-10b) multipliziert mit $tg\alpha/\sin\varphi$ plus Glg. (1-10c) ergibt:

$$(tg\alpha + \cot g\alpha)\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 tg\alpha + g = 0 \tag{1-13}$$

Die Glgn. (1-12/13) sind die beiden gesuchten Bewegungsglgn. für die unabhängigen Koordinaten r, φ [1].

Beispiel (1.7) Der Aufhängepunkt eines ebenen Pendels mit Länge l und Pendelmasse m_2 gleitet reibungsfrei auf der x-Achse und hat die Masse m_1. m_1 wird durch die Schwingungen von m_2 hin- und herbewegt.

Nach Glg. (1-7) erhalten wir in der

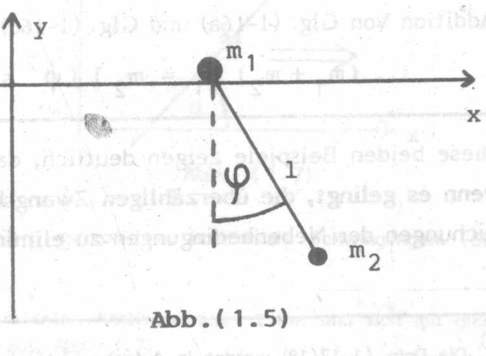


Abb. (1.5)

[1] Die Dgln. (1-12/13) werden in Beispiel (1.18) §1.5 integriert. In Beispiel (2.3) wird die Bewegung qualitativ diskutiert.

(x,y)-Ebene folgende vier Bewegungsglgn.:

$$m_1 \ddot{x}_1 = Z_{1x}$$
$$m_1 \ddot{y}_1 = Z_{1y} - m_1 g$$
$$m_2 \ddot{x}_2 = Z_{2x}$$
$$m_2 \ddot{y}_2 = Z_{2y} - m_2 g$$

Aufgrund der Nebenbedingungen

$$y_1 = 0 \qquad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0 \qquad (1\text{-}14a/b)$$

sind nur zwei Koordinaten unabhängig. Wir wählen als unabhängige generalisierte Koordinaten x_1, φ. Die Transformationsglgn.

$$x_2 = x_1 + l \sin\varphi \qquad y_2 = -l \cos\varphi \qquad (1\text{-}15a/b)$$

führen dann auf folgende Bewegungsglgn., die nur noch von x_1, φ abhängen:

$$m_1 \ddot{x}_1 = Z_{1x} \qquad (1\text{-}16a)$$
$$m_1 g = Z_{1y} \qquad (1\text{-}16b)$$
$$m_2 (\ddot{x}_1 + l \ddot{\varphi} \cos\varphi - l \dot{\varphi}^2 \sin\varphi) = Z_{2x} \qquad (1\text{-}16c)$$
$$m_2 (l \ddot{\varphi} \sin\varphi + l \dot{\varphi}^2 \cos\varphi + g) = Z_{2y} \qquad (1\text{-}16d)$$

Die drei Glgn. (1-16a/c/d) enthalten fünf Unbekannte: $x_1(t), \varphi(t), Z_{1x}, Z_{2x}, Z_{2y}$. Zwei Zwangskraftkomponenten können wiederum durch geometrische Überlegungen gestrichen werden:

$$Z_{1x} = -Z_{2x} \qquad Z_{2x}/Z_{2y} = -\operatorname{tg}\varphi$$

Multiplikation der Glg. (1-16c) mit $\cos\varphi$, der Glg. (1-16d) mit $\sin\varphi$ und anschließende Addition führen auf:

$$\ddot{x}_1 \cos\varphi + l \ddot{\varphi} + g \sin\varphi = 0 \qquad (1\text{-}17)$$

Addition von Glg. (1-16a) und Glg. (1-16c) ergibt:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = m_2 l (\dot{\varphi}^2 \sin\varphi - \ddot{\varphi} \cos\varphi)^{1)} \qquad (1\text{-}18)$$

Diese beiden Beispiele zeigen deutlich, daß die **Newtonschen Glgn. (1-7) zu lösen sind, wenn es gelingt, die überzähligen Zwangskraftkomponenten** durch geometrische Untersuchungen der Nebenbedingungen **zu eliminieren.**

[1] Die Dgln. (1-17/18) werden in Aufgabe (1.45) integriert.

Zusammenfassung

In den meisten Aufgaben der klassischen und technischen Mechanik treten Zwangsbedingungen auf, die dem Bewegungsablauf geometrische Einschränkungen auferlegen. Dabei gibt es zwei Probleme, die bei Bewegungen ohne Zwang nicht existieren:

a) Die Anzahl der Freiheitsgrade wird verringert, da der Konfigurationsraum eingeschränkt wird.

b) Die 3N Bewegungsglgn. sind unterbestimmt, d.h. es treten mehr Unbekannte als Glgn. auf.

Die erste Schwierigkeit läßt sich bei holonomen Nebenbedingungen durch die Einführung von 3N-k unabhängigen Koordinaten lösen. Das zweite Problem erfordert eine genaue Analyse der geometrischen Einschränkung des Bahnverlaufs. Dadurch lassen sich soviele Zwangskraftkomponenten beseitigen, daß die Anzahl der Glgn. der Zahl der Unbekannten entspricht. Schließlich können auch noch die restlichen Zwangskraftkomponenten durch geeignete Zusammenstellung der Glgn. beseitigt werden. Man erhält dann die gesuchten 3N-k Bewegungsglgn. für die unabhängigen Koordinaten.

Die rechnerische Durchführung dieses Programmes kann für komplizierte Systeme mit verwickelten Nebenbedingungen sehr schwierig und umfangreich, ja eventuell sogar unmöglich werden. Daher ist die Einführung neuer Prinzipien und Formalismen wünschenswert, die den Zwangsbedingungen besser als die Newtonsche Mechanik angepaßt sind. Dies wird Gegenstand der folgenden Paragraphen sein.

Aufgaben

(1.1) Leicht Zwangsbedingungen

Gebe die Zwangsbedingungen bzw. die Transformationsglgn. und die unabhängigen Koordinaten an:

a) Ein Zylinder rollt mit Schlupf eine Ebene herunter. (Siehe Abb. (1.1).)

b) Auf einem geraden Draht, der mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω in der (x,y)-Ebene rotiert, gleitet eine Perle. Abb. (1.6)

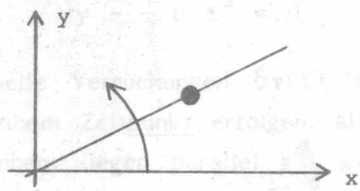


Abb. (1.6)

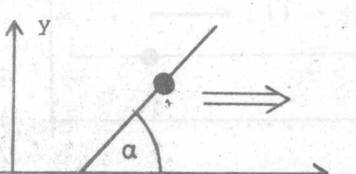


Abb. (1.7)

c) Der Aufhängepunkt eines ebenen Pendels vollführt harmonische, horizontale Schwingungen. (Siehe Abb. (1.25) in Aufgabe (1.29).)

d) Sphärisches Pendel. (Siehe Abb. (1.21).)

e) Eine Perle rutscht auf einem Draht, der den konstanten Anstiegswinkel α hat und sich mit gleichförmiger Beschleunigung b in x-Richtung fortbewegt. Abb. (1.7)

(1.2) Mittel Ableitung nach generalisierten Koordinaten

Es gelte: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, \ldots q_n, t)$

Es wird nicht vorausgesetzt, daß die q_i unabhängig sind. Zeige, daß

a) $$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} \qquad (1\text{-}19)$$

b) $$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \qquad (1\text{-}20)$$

Demnach kann die Reihenfolge der Differentiationen vertauscht werden:

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q_i}$$

(1.3) Leicht Größe von Zwangskräften

Wie groß ist

a) die Fadenspannung $|Z|$ des ebenen Pendels?

b) die Zwangskraft $Z = (Z_z, Z_r)$ des Kreiskegels auf das Teilchen m in der Abb. (1.4)?

(1.4) Leicht Ebenes Pendel mit bewegtem Aufhängepunkt **Abb. (1.5)**

Integriere die Bewegungsglgn. (1-17/18) für kleine Ausschläge und die Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = 0 \qquad \dot{x}_1(0) = 0 \qquad \varphi(0) = \varphi_o \qquad \dot{\varphi}(0) = 0$$

§1.2 Das d'Alembert-Prinzip

Nach den Überlegungen in § 1.1 sind Aufgaben mit Zwangsbedingungen im Rahmen der Newtonschen Mechanik prinzipiell lösbar. Oftmals ist jedoch die rechnerische Behandlung von Mehrteilchensystemen mit komplizierten Nebenbedingungen praktisch unmöglich; die Anwendung der Newtonschen Axiome scheitert an den Zwangskräften, die in den Rechnungen mitgeführt werden müssen. Hier springt nun ein neues Prinzip der klassischen Mechanik ein, das eine Berechnung der Zwangskräfte überflüssig macht und somit dem angesprochenen Problem besser angepaßt ist.

Wir definieren virtuelle Verrückungen $\delta \mathbf{r}_i$ des i-ten Teilchens als beliebige infinitesimale Konfigurationsänderungen, die mit den Nebenbedingungen verträglich sind und bei festgehaltener Zeit, d.h. instantan erfolgen; die Zeit wird bei virtuellen Verrückungen nicht verändert. Virtuelle Verrückungen haben demnach drei kennzeichnende Eigenschaften:

1) Sie sind infinitesimal.
2) Sie erfüllen die Zwangsbedingungen.
3) Sie sind zeitlos und können nicht in der Wirklichkeit, sondern nur in Gedanken ausgeführt werden. (Daher der Name "virtuell".)

Bei skleronomen, d.h. zeitunabhängigen Nebenbedingungen sind wirkliche und virtuelle Verschiebungen gleich. Bei rheonomen Zwangsbedingungen hingegen besteht ein Unterschied zwischen wirklichen und virtuellen Verrückungen. Folgendes Beispiel soll dies verdeutlichen.

Beispiel (1.8) Ein Draht, der parallel zur x-Achse gespannt ist, bewegt sich mit gleichförmiger Beschleunigung b in y-Richtung.

Für die Perle auf dem Draht gilt:

$$y - \frac{1}{2} b\, t^2 = 0$$

Virtuelle Verrückungen $\delta \mathbf{r}(1)$ der Perle, die zu einem Zeitpunkt erfolgen, also keine Zeit brauchen, liegen parallel zur x-Achse; reale Verschiebungen $d\mathbf{r}(2)$ hingegen, deren Ausführung ein Zeitintervall dt benötigt, haben die Komponente $b\,dt\,t$ senkrecht zum Draht.

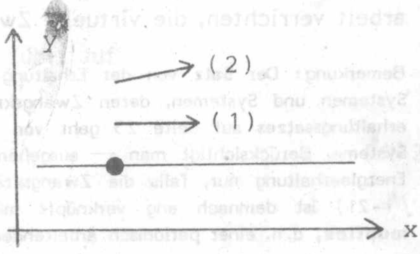


Abb. (1.8)

Die Beziehungen

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i = \mathbf{Z}_i \tag{1-7'}$$

für ein N-Teilchensystem führen auf