Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

814

Séminaire de Théorie du Potentiel Paris, No. 5

Directeurs: M. Brelot, G. Choquet et J. Deny

Rédacteurs: F. Hirsch et G. Mokobodzki

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

814

Séminaire de Théorie du Potentiel Paris, No. 5

Directeurs: M. Brelot, G. Choquet et J. Deny

Rédacteurs: F. Hirsch et G. Mokobodzki

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1980

Editeurs

Francis Hirsch
E.N.S.E.T., 61, Avenue du Président Wilson
94230 Cachan/France

Gabriel Mokobodzki
Université Paris VI, Equipe d'Analyse, Tour 46-0, 4ème
4 Place Jussieu
75230 Paris Cédex 05/France

AMS Subject Classifications (1980): 31A99, 31B35, 31C25, 31D05, 35K99, 43A35, 46E99, 47D20

ISBN 3-540-10025-3 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-10025-3 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2141/3140-543210

TABLE DES MATIERES

UNIVERSITE PARIS VI

SEMINAIRE DE

THEORIE DU POTENTIEL

CHARGE PORTEE PAR UNE SURFACE ET CHAMP ASSOCIE.

par Didier ARQUES et Jean-Pierre ROTH.*

Soit $U = B(0,4\rho)$ une boule de $\mathbb{R}^2$ et :

$f : U \to \mathbb{R}$, une application de classe $\mathcal{C}^{r+2}$ $(r \geq 0)$ telle que $\|f'\| \leq \frac{1}{2}$.

Soit V son graphe dans $\mathbb{R}^3$ et T une distribution sur V, d'ordre inférieur ou égal à r, à support compact se projetant dans $B(0,\rho)$. E^T désigne le champ électrostatique sur $\mathbb{R}^3 \setminus V$ engendré par T. On identifie, par la projection de V sur U, les fonctions et les distributions définies sur V et celles définies sur U.

On définit dans la partie II, la composante normale G du champ sur la face supérieure de V (c'est une distribution) et l'on étudie dans les paragraphes suivants, les liens entre la régularité de G et celle de T. Le résultat fondamental est le théorème 7 du paragraphe VII.

Le cadre des distributions permet d'autre part de mieux expliciter la dualité entre les problèmes de Neumann intérieur et extérieur, et les problèmes de Dirichlet extérieur et intérieur.

---

* Cet article est la rédaction détaillée de l'exposé du 1er février 1979.

I - Etude d'une famille de noyaux.

Soit $\epsilon \geq 0$ fixé.

Définition 1 : Pour $m \in \mathbb{N}$, $m \leq r+1$, $\mathcal{L}_m$ est l'ensemble des sommes finies de noyaux : $\dfrac{M(\xi,v).\epsilon^h}{[D_\epsilon(\xi,v)]^{k+h+1}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec :

- k, h appartiennent à $\mathbb{N}$.
- $D_\epsilon(\xi,v) = [\|\xi\|^2 + (f(v+\xi)-f(v)+\epsilon)^2]^{\frac{1}{2}}$ est défini, ainsi que M sur $\Omega = \{(\xi,v) : \xi + v \in U,\ v \in U\}$.
- M est m fois continûment différentiable sur Ω, à dérivées bornées.
- Il existe une constante C telle que :

$$\forall j \in [0,m]\ ,\ \left\| \frac{\partial^j M}{\partial v^j} \right\| \leq C\ \|\xi\|^k$$

$$\forall j \in [0,m-1]\ ,\left\| \frac{\partial^j}{\partial v^j}\ \frac{\partial}{\partial \xi} M \right\| \leq C\ \|\xi\|^{k-1}$$

On omettra l'indice ϵ de D_ϵ chaque fois qu'il n'y aura pas ambiguité.

Exemples : 1. Dans l'expression de la composante normale du champ (cf. paragraphe II) apparaissent les noyaux de $\mathcal{L}_r$: $\dfrac{f(v+\xi)-f(v)-f'(v+\xi).\xi}{D^{3/2}}$ et $\epsilon^2\ D^{-3/2}$.

2. Soit φ une application bornée, de classe $\mathcal{C}^m$ $(m \geq 0)$, de U dans l'espace $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ des applications k-linéaires continues.

Alors, $H = \epsilon^h\ \dfrac{\varphi(v).(\xi)^k}{D^{k+h+1}}$ est un noyau de $\mathcal{L}_m$.

On note $\mathcal{H}_m$, l'ensemble des sommes finies de ces noyaux.

Exemple : $\epsilon^2\ D^{-3/2}$ appartient à $\mathcal{H}_r$.

Lemme 1 : Si L est un élément de $\mathcal{L}_m$ $(m \geq 1)$ et si $\vec{\ell}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, alors $\dfrac{\partial L}{\partial v}.\vec{\ell}$ appartient à $\mathcal{L}_{m-1}$.

Démonstration : évident à partir de la formule

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{M(\xi,v)\ \epsilon^h}{D^{k+h+1}}\right].\vec{\ell} = \frac{\partial M}{\partial v}.\vec{\ell}\ \frac{\epsilon^h}{D^{k+h+1}} + M\ \epsilon^h\ \frac{-(h+k+1)}{D^{k+h+3}}[f'(v+\xi).\vec{\ell} - f'(v).\vec{\ell}]\ [f(v+\xi)-f(v)+\epsilon]$$

Lemme 2 : Soit $\varepsilon > 0$. Si H_m est un élément de $\mathcal{H}_m$ $(m \geq 1)$ et si $\vec{\ell}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, alors : $\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial v} H_m.\vec{\ell} = \frac{1}{\varepsilon} H_{m-1} + L_m$ avec : H_{m-1} élément de $\mathcal{H}_{m-1}$ et L_m élément de $\mathcal{L}_m$.

Démonstration : on applique la formule précédente avec $M(\xi,v) = \varphi(v).(\xi)^k$ et on conclut à l'aide de la formule de Taylor Lagrange appliquée à f et à $f'(.).\vec{\ell}$.

Lemme 3. Soit α une application continue à support dans $B(0,2\rho)$.

Soit $H = \varepsilon^h \varphi(v).(\xi)^k D^{-k-h-1}$ un élément de $\mathcal{H}_m$, $m \geq 0$, $k \geq 0$, $h \geq 2$. Alors, lorsque ε tend vers 0, $\int \frac{1}{\varepsilon} H(\xi,v)\ \alpha(v+\xi)\ d\xi$ converge uniformément pour v dans $B(0,\rho)$ vers :

$$\alpha(v) \int \varphi(v).(\eta)^k \left[\ \|\eta\|^2 + (f'(v).\eta+1)^2\right]^{-\frac{k+h+1}{2}} d\eta$$

Démonstration :

Le module de la différence est majoré par :

$$\left|\int_{B(0,3\rho)} \varepsilon^{-1} H(\xi,v)\left[\alpha(v+\xi)-\alpha(v)\right] d\xi\right|$$
$$+ |\alpha(v)| \left|\int_{B(0,3\rho)} \varepsilon^{-1} H(\xi,v)d\xi - \int \varphi(v).(\eta)^k\left[\|\eta\|^2+(f'(v).\eta+1)^2\right]^{-\frac{k+h+1}{2}} d\eta\right|$$

1. Compte tenu du changement de variable $\xi = \varepsilon\ \eta$ et de l'inégalité

$$D(\varepsilon\ \eta,\ v) \geq \varepsilon\ (\ \|\eta\|^2 - \|\eta\|+1)^{1/2},$$

le premier terme est majoré par :

$$\sup_{\|w\| < \sqrt{\varepsilon}} \|\alpha(.+w)-\alpha\|_\infty \int_{B(0,\varepsilon^{-\frac{1}{2}})} \|\eta\|^k\ (\|\eta\|^2 - \|\eta\| +1)^{-\frac{k+h+1}{2}} d\eta$$
$$+ 2\|\alpha\|_\infty \|\varphi\|_\infty \int_{\complement B(0,\varepsilon^{-\frac{1}{2}})} \|\eta\|^k\ (\|\eta\|^2 - \|\eta\| +1)^{-\frac{k+h+1}{2}} d\eta$$

Ces deux quantités tendent vers 0 quand ε tend vers 0.

2. Après le changement de variable $\xi = \varepsilon\eta$, le second terme est majoré par :

$$\|\alpha\|_\infty\|\varphi\|_\infty \int_{B(0,3\rho\varepsilon^{-1})} \|\eta\|^k \left| \left[\|\eta\|^2 + \left(\frac{f(v+\varepsilon\eta)-f(v)}{\varepsilon}+1\right)^2\right]^{-\frac{k+h+1}{2}} - \left[\|\eta\|^2 + (f'(v).\eta+1)^2\right]^{-\frac{k+h+1}{2}} \right| d\eta$$

$$+ \|\alpha\|_\infty \|\varphi\|_\infty \int_{\complement B(0,3\rho\varepsilon^{-1})} \|\eta\|^k \left[\|\eta\|^2 + (f'(v).\eta+1)^2\right]^{-\frac{k+h+1}{2}} d\eta$$

La seconde quantité tend vers 0, et la première, compte tenu de l'inégalité :

$$\left| a^{-\frac{k+h+1}{2}} - b^{-\frac{k+h+1}{2}} \right| \leq \frac{k+h+1}{2} |a-b| \, |c|^{-\frac{k+h+3}{2}} \qquad \text{avec} \quad c \in [a,b]$$

est majorée par :

$$\|\alpha\|_\infty \|\varphi\|_\infty \frac{k+h+1}{4} \|f''\|_\infty \, \varepsilon \int_{B(0,3\rho\varepsilon^{-1})} \|\eta\|^{2+k} (2+\|\eta\|)(\|\eta\|^2 - \|\eta\|+1)^{-\frac{k+h+3}{2}} d\eta \leq K\varepsilon|\mathrm{Log}\ \varepsilon| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

<u>Lemme 4</u> : Soit L_ε un noyau de $\mathcal{L}_m$, $m \geq 0$.

On suppose $L_\varepsilon(\xi,v) = 0$ si $\|v+\xi\| > 2\rho$.

Alors, lorsque ε tend vers 0, $\int L_\varepsilon(\xi,v)\, d\xi$ converge uniformément pour v dans $B(0,\rho)$ $\begin{cases} \text{vers } \int L_0(\xi,v)\, d\xi, & \text{si } h = 0. \\ \text{vers } 0, & \text{si } h \geq 1. \end{cases}$

<u>démonstration</u> :

<u>1. h = 0</u> $\left| \int M(\xi,v)\, D_\varepsilon(\xi,v)^{-k-1} d\xi - \int M(\xi,v)\, D_0(\xi,v)^{-k-1} d\xi \right|$ est majoré par :

$$C \int \frac{1}{\|\xi\|} \left| \left[1 + \left(\frac{f(v+\xi)-f(v)}{\|\xi\|} + \frac{\varepsilon}{\|\xi\|}\right)^2\right]^{-\frac{k+1}{2}} - \left[1 + \left(\frac{f(v+\xi)-f(v)}{\|\xi\|}\right)^2\right]^{-\frac{k+1}{2}} \right| d\xi$$

$$\leq 2C \int_{B(0,\sqrt[3]{\varepsilon})} \frac{d\xi}{\|\xi\|} + C' \int_{\complement B(0,\sqrt[3]{\varepsilon})} \frac{1}{\|\xi\|} \frac{\varepsilon}{\|\xi\|}\left(1+\frac{\varepsilon}{\|\xi\|}\right) d\xi \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

<u>2. h ≥ 1</u> $\left| \int M(\xi,v)\, \varepsilon^h D_\varepsilon(\xi,v)^{-k-h-1} d\xi \right| \leq c \int_{B(0,3\rho)} \varepsilon^h \|\xi\|^k D_\varepsilon(\xi,v)^{-k-h-1} d\xi.$

Après le changement de variable $\xi = \varepsilon\eta$, on obtient la majoration :

$$\leq c\, \varepsilon \int_{B(0,3\rho\varepsilon^{-1})} \|\eta\|^k (\|\eta\|^2 - \|\eta\|+1)^{-\frac{k+h+1}{2}} d\eta \leq K\, \varepsilon\, |\mathrm{Log}\ \varepsilon| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

Remarque : Si on remplace dans le lemme 4, la condition $L_\varepsilon = 0$ pour $\|v+\xi\| > 2\rho$ par : $L_\varepsilon = 0$ pour $\|\xi\| > \rho$, alors la convergence est uniforme pour v dans $B(0,3\rho)$.

II - Composante normale du champ sur la face supérieure de V.

- Pour $\varepsilon > 0$, si x est le point $(u,f(u))$ de V, on note x_ε le point $(u,f(u)+\varepsilon)$.
- On pose $g_\varepsilon(x) = E^T(x_\varepsilon).\vec{n}(x)$, où $\vec{n}(x)$ désigne le vecteur unitaire normal à V en x, orienté vers le haut.

$$g_\varepsilon(u) = T_v \frac{f(u)-f(v)-f'(u).(u-v)+\varepsilon}{(1+f_u'^2+f_v'^2)^{1/2}\left[\|u-v\|^2+(f(u)-f(v)+\varepsilon)^2\right]^{3/2}}$$

On étudie la limite, au sens des distributions, de g_ε lorsque ε tend vers 0.

Soit α un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, à support dans $B(0,2\rho)$ et σ la mesure de surface sur V.

$$\int g_\varepsilon(x)\,\alpha(x)\,d\sigma(x) = \int T_v \frac{f(u)-f(v)-f'(u).(u-v)+\varepsilon}{\left[\|u-v\|^2+(f(u)-f(v)+\varepsilon)^2\right]^{3/2}}\,\alpha(u)\,du$$

$$= T_v \int \frac{f(u)-f(v)-f'(u).(u-v)+\varepsilon}{\left[\|u-v\|^2+(f(u)-f(v)+\varepsilon)^2\right]^{3/2}}\,\alpha(u)\,du, \text{ expression}$$

dont on cherche la limite lorsque ε tend vers 0.

Proposition 1 :

Soit $B_\varepsilon(v) = \int \frac{f(u)-f(v)-f'(u).(u-v)+\varepsilon}{\left[\|u-v\|^2+(f(u)-f(v)+\varepsilon)^2\right]^{3/2}}\,\alpha(u)\,du.$

Lorsque ε tend vers 0, B_ε converge uniformément sur $B(0,\rho)$ ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à r.

Sa limite vaut $2\pi\alpha - S\alpha$, avec : $S\alpha(v) = \int \frac{f(v)-f(u)-f'(u).(v-u)}{\left[\|u-v\|^2+(f(u)-f(v))^2\right]^{3/2}}\,\alpha(u)\,du$.

démonstration :

Pour v dans $B(0,\rho)$, $B_\varepsilon(v) = \int \frac{f(v+\xi)-f(v)-f'(v+\xi).\xi}{D(\xi,v)^{3/2}}\,\alpha(v+\xi)\,d\xi + \int \frac{\varepsilon}{D(\xi,v)^{3/2}}\,\alpha(v+\xi)\,d\xi.$

1. Le noyau $L(\xi,v) = \frac{f(v+\xi)-f(v)-f'(v+\xi).\xi}{D(\xi,v)^{3/2}}\,\alpha(v+\xi)$ appartient à $\mathcal{L}_r$ et est nul pour $\|v+\xi\| > 2\rho$.

Donc, d'après les lemmes 1 et 4, lorsque ε tend vers 0, la première intégrale converge uniformément sur $B(0,\rho)$ ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à r vers :$-S\alpha$.

2. Le noyau $H(\xi,v) = \varepsilon^2 D(\xi,v)^{-3/2}$ appartient à $\mathcal{H}_r$.

Donc, d'après les lemmes 1,2,3 et 4, lorsque ε tend vers 0, la deuxième intégrale converge uniformément sur $B(0,\rho)$ ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à r. Sa limite est : $\alpha(v) \int [\|\eta\|^2 + (f'(v).\eta + 1)^2]^{-3/2} d\eta$.

Il reste à remarquer que cette dernière intégrale est indépendante de f et égale à 2π.

<u>Théorème 2</u> :

> La limite de g_ε lorsque ε tend vers 0, existe au sens des distributions sur $B(0,2\rho)$. Sa limite G, composante normale du champ sur la face supérieure de V, satisfait à la relation suivante :
>
> (*) $\qquad \forall \alpha \in \mathcal{D}(B(0,2\rho)), \qquad G\alpha = T(2\pi\alpha - S\alpha).$

<u>démonstration</u> :

Pour tout α de $\mathcal{D}(B(0,2\rho))$, on a : $\int g_\varepsilon(x)\, \alpha(x)\, d\sigma(x) = T_v[B_\varepsilon(v)]$.

Le résultat se déduit donc de la proposition précédente.

<u>Remarque</u> : G ne dépend que de V et de T et non de la paramétrisation f de V choisie.

<u>III - Etude de S et de son transposé S^*</u>.

• Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, à support dans $B(0,\rho)$, valant 1 au voisinage de 0.

On pose :
$$J_1(u,v) = \frac{f(v)-f(u)-f'(u).(v-u)}{[\|v-u\|^2+(f(v)-f(u))^2]^{3/2}}\ \chi(v-u)$$

$$J_2(u,v) = \frac{f(v)-f(u)-f'(u).(v-u)}{[\|v-u\|^2+(f(v)-f(u))^2]^{3/2}}\ [1-\chi(v-u)]$$

S vaut alors S_1+S_2 , où S_1 et S_2 sont les opérateurs respectivement associés à J_1 et J_2.

• Le noyau J_2 est régulier ; en effet, quel que soit l'opérateur de dérivation D, constitué de k ($k \le r+1$) dérivées partielles par rapport à u et h($h \le r+1$) dérivées partielles par rapport à v, D J_2 existe et est continu sur $U \times U$.

Seul le noyau J_1 pose problème. Il admet sur la diagonale une singularité majorée par $\frac{K}{\|v-u\|}$.

Définition 2 : On appelle $\mathcal{D}^k(B(0,\eta))$ l'espace des applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, k fois continûment différentiables, à support dans $B(0,\eta)$.
On munit $\mathcal{D}^k(B(0,\eta))$ de la norme $|||\ |||_k$ associée à la convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à k.

Théorème 3 :

1. Soit $k \leq r$. S_1 et S_1^* sont des opérateurs continus et compacts de $\mathcal{D}^k(B(0,2\rho))$ dans $\mathcal{D}^k(B(0,3\rho))$.

2. Soit $p \in [1,+\infty]$. S_1 et S_1^* sont des opérateurs continus de $L^p(B(0,2\rho))$ dans $L^p(B(0,3\rho))$.

La démonstration de ce théorème nécessite quelques remarques préliminaires.
Au cours de son étude, on associe à l'opérateur S_1 soit le noyau $J_1(u,v)$ défini ci-dessus (cf. paragraphe VI) soit le noyau $I_1(\xi,v)$ (cf. paragraphes I, III) défini par :

$$I_1(\xi,v) = \frac{f(v)-f(v+\xi)-f'(v+\xi).\xi}{[\|\xi\|^2+(f(v)-f(v+\xi))^2]^{3/2}}\ \chi(\xi)$$

Pour $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, à support dans $B(0,2\rho)$, on a l'égalité :

$$S_1\ \alpha(v) = \int J_1(u,v)\ \alpha(u)\ du = \int I_1(\xi,v)\ \alpha(v+\xi)\ d\xi\ .$$

De même, S_1^* est associé au noyau

$$K_1(\xi,v) = \frac{f(v+\xi)-f(v)-f'(v).\xi}{[\|\xi\|^2+(f(v)-f(v+\xi))^2]^{3/2}}\ \chi(\xi)\ .$$

Ces deux noyaux $I_1(\xi,v)$ et $K_1(\xi,v)$ appartiennent à $\mathcal{L}_r$ (cf. paragraphe I) et vérifient les trois conditions supplémentaires : $h = 0$, $\varepsilon = 0$, nuls pour $\|\xi\| > \rho$. A la définition I.1 des noyaux de $\mathcal{L}_m$, on adjoint dorénavant ces trois hypothèses. On note encore $\mathcal{L}_m$ cette famille restreinte.

Lemme 5 : Pour L noyau de $\mathcal{L}_1$ et α élément de $\mathcal{D}^1(B(0,2\rho))$, on note :

$$L\ \alpha(v) = \int L(\xi,v)\ \alpha(v+\xi)\ d\xi.$$

Alors, $L\alpha$ appartient à $\mathcal{D}^1(B(0,3\rho))$ et l'on a : $(L\alpha)' = L\alpha' + (\frac{\partial L}{\partial v})\ \alpha$.

démonstration :

On a $L(\xi,v) = M(\xi,v)\, D_o(\xi,v)^{-k-1}$.

Posons $L_\varepsilon(\xi,v) = M(\xi,v)\, D_\varepsilon(\xi,v)^{-k-1}\, \alpha(v+\xi)$.

D'après la remarque suivant le lemme 4 et le théorème de dérivation d'une intégrale de fonction continue, à dérivée continue, on obtient le résultat.

Corollaire : Pour L noyau de $\mathcal{L}_k$ et α élément de $\mathcal{D}^k(B(0,2\rho))$, on a :

> $L\alpha$ appartient à $\mathcal{D}^k(B(0,3\rho))$ et pour $(\ell_1,\dots,\ell_k)$ appartient à $(\mathbb{R}^2)^k$, $(L\alpha)^{(k)}(\ell_1,\dots,\ell_k)$ est somme de termes de la forme :
> $$\frac{\partial^i L}{\partial v^i}(\ell_{\sigma(1)},\dots,\ell_{\sigma(i)})\, \alpha^{(k-i)}(\ell_{\sigma(i+1)},\dots,\ell_{\sigma(k)}).$$

Démonstration du Théorème 3 :

1. Soit L un noyau de $\mathcal{L}_k$. On note encore L l'opérateur associé.

. La continuité de L opérateur de $\mathcal{D}^k(B(0,2\rho))$ dans $\mathcal{D}^k(B(0,3\rho))$ résulte de la formule de dérivation du corollaire précédent.

. Soit $\eta < \rho$ tel que Supp χ soit inclus dans $B(0,\eta)$. Alors, L applique l'espace normé $\mathcal{D}^k(B(0,2\rho))$ dans l'espace de Banach $\mathcal{D}^k(\overline{B(0,2\rho+\eta)})$.
L étant limite dans $\mathcal{L}[\mathcal{D}^k(B(0,2\rho)), \mathcal{D}^k(\overline{B(0,2\rho+\eta)})]$ de la suite d'opérateurs compacts K_ε définie ci-dessous, on en déduit la compacité de L.

. Si $L(\xi,v) = M(\xi,v)\, D_o(\xi,v)^{-k-1}$, K_ε est l'opérateur compact associé au noyau de classe $\mathcal{C}^k$: $K_\varepsilon(\xi,v) = M(\xi,v)\, D_\varepsilon(\xi,v)^{-k-1}$.
Soit α un élément de $\mathcal{D}^k(B(0,2\rho))$. La constante C associée au noyau $K_\varepsilon(\xi,v)\alpha(v+\xi)$ ainsi qu'à ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à k dans la définition 1 est de la forme $A.\, |||\alpha|||_k$, où A est une constante.
On déduit donc de la démonstration et de la remarque du lemme 4 que :

$$|||L\alpha - K_\varepsilon\alpha|||_k \le A'\, \varepsilon^{1/2}\, |||\alpha|||_k ,$$ et par suite la limite annoncée.

2. Soit α un élément de $L^p(B(0,2\rho))$, nulle en dehors de $B(0,2\rho)$.

Soit L un noyau de $\mathcal{L}_k$. Compte-tenu de la définition de $\mathcal{L}_k$, on a la majoration :

$$|L(\xi,v)| \le 1_{\|\xi\| < \rho} \cdot K\|\xi\|^{-1}.$$

Donc : $A = \int_{B(0,3\rho)} [\int_{B(0,2\rho)} |L(\xi,v)|\ |\alpha(v+\xi)|\ d\xi]^p\ dv$ est majoré par :

$$\int_{B(0,3\rho)} [\int_{B(0,2\rho)} 1_{\|\xi\|<\rho}\ K\|\xi\|^{-1}\ |\alpha(v+\xi)|\ d\xi]^p\ dv$$

Or, α appartient à $L^p(B(0,2\rho))$ et $1_{\|\xi\|<\rho}\ K\ \|\xi\|^{-1}$ à $L^1(B(0,2\rho))$.

On est donc ramené au cas de la convolution d'une fonction de L^p par une fonction de L^1 : on a la majoration $A^{1/p} \leq C\ \|\alpha\|_p$.

L est donc défini et continu de $L^p(B(0,2\rho))$ dans $L^p(B(0,3\rho))$.

<u>Conclusion</u> : On obtient le théorème 3 en appliquant ces résultats à $L = S_1$, S_1^* .

<u>IV - Régularité de G connaissant celle de T.</u>

<u>Théorème 4</u> : Si T est une fonction de classe $\mathcal{C}^k (k \leq r)$, (respectivement de L^p, $p \in [1,+\infty]$, une distribution d'ordre k, $k \leq r$), alors $G_{|B(0,2\rho)}$ est de même nature.

<u>démonstration</u> :

Sur $B(0,2\rho)$, on a l'égalité au sens des distributions : $G = 2\pi\ T - ToS$.

Les propriétés de régularité du noyau J_2 (cf. début du paragraphe III), entraînent que $T \circ S_2$ appartient à $\mathcal{C}^r(U)$.

La nature de $G_{|B(0,2\rho)}$ distribution sur $B(0,2\rho)$ est donc celle de $2\pi\ T - T \circ S_1$.

1. Si T appartient à $\mathcal{D}^k(B(0,\rho))$, alors par le théorème 3, $S_1^*\ T$ appartient à $\mathcal{D}^k(B(0,2\rho))$. Donc $G_{|B(0,2\rho)}$ appartient à $\mathcal{C}^k(B(0,2\rho))$.

2. Si T appartient à $L^p(B(0,\rho))$, alors $S_1^*\ T$ appartient à $L^p(B(0,2\rho))$, par le théorème 3. Donc $G_{|B(0,2\rho)}$ appartient à L^p.

3. Si T est une distribution d'ordre k, à support dans $B(0,\rho)$: S_1 étant un opérateur continu de $\mathcal{D}^k(B(0,2\rho))$ dans $\mathcal{D}^k(B(0,3\rho))$, $T \circ S_1$ est une distribution d'ordre k à support dans $B(0,2\rho)$. Donc, $G_{|B(0,2\rho)}$ est une distribution d'ordre k.

V - Expression de la charge en fonction du champ.

Nous allons, en quelque sorte, inverser partiellement la formule (*).

Pour α appartenant à $\mathcal{D}^r(B(0,2\rho))$, on a : $T(2\pi\alpha - S_1\alpha) = G\alpha + TS_2\alpha = \tilde{G}\alpha$.

$\tilde{G}$ a la même régularité que G puisque TS_2 est une fonction de classe $\mathcal{C}^r$.

Si χ est choisi avec un support assez petit, on peut itérer S_1 un nombre arbitraire de fois pour l'appliquer à α élément de $\mathcal{D}^r(B(0,\rho))$.

soit :
$$T(\alpha - \frac{S_1}{2\pi}\alpha) = \frac{\tilde{G}}{2\pi}\alpha$$
$$\vdots$$
$$T((\frac{S_1}{2\pi})^{n-1}\alpha - (\frac{S_1}{2\pi})^n\alpha) = \frac{\tilde{G}}{2\pi}(\frac{S_1}{2\pi})^{n-1}\alpha .$$

Pour α appartenant à $\mathcal{D}^r(B(0,\rho))$, on a donc :

$$(**) \qquad T\alpha = T(\frac{S_1}{2\pi})^n\alpha + \frac{\tilde{G}}{2\pi}[\alpha + \frac{S_1}{2\pi}\alpha + \dots + (\frac{S_1}{2\pi})^{n-1}\alpha] .$$

VI - Etude de $(S_1)^n$ et de $(S_1^*)^n$.

Le but de cette partie est d'étudier la régularité de $(S_1)^n$ et d'en déduire des résultats sur la régularité de $T(\frac{S_1}{2\pi})^n$.

On a le théorème :

Théorème 5 :

J_1^n désigne l'itéré n fois du noyau J_1, le support de χ étant choisi dans une boule $B(0,\frac{\rho}{n})$.

Pour tout entier k inférieur ou égal à r, on a :

- $\frac{\partial^k}{\partial u^k} J_1^{5r}(u,v)$ existe et est continue sur $B(0,\rho)^2$
- $\frac{\partial^k}{\partial v^k} J_1^{5r}(u,v)$ existe et est continue sur $B(0,\rho)^2$.

La démonstration de ce théorème nécessite l'étude préliminaire de J_1^5.
On suppose le support de χ inclus dans $B(0,\frac{\rho}{5})$.

Lemme 6 : Si α appartient à $\mathcal{D}^k(B(0,2\rho))$ et si, pour $i = 1,\dots,5$, L_i est un noyau de $\mathcal{L}_k$, alors $L_5 \circ \dots \circ L_1\alpha$ appartient à $\mathcal{D}^k(B(0,3\rho))$.

De plus, $(L_5 \circ \dots \circ L_1\alpha)^{(k)}.(\ell_1,\dots,\ell_k)$ est une somme de termes de la forme

$L'_5 \circ \dots \circ L'_1 \alpha^{(j)}(\ell_{\sigma(1)}, \dots, \ell_{\sigma(j)})$ avec j entier inférieur ou égal à k et L'_i noyau de $\mathcal{L}_o$ pour $i = 1,\dots,5$.

démonstration : C'est une conséquence immédiate du corollaire du lemme 5.

Lemme 7 : Si α appartient à $\mathcal{D}^k(B(0,2\rho))$ et si pour $i = 1,\dots,5$, L_i est un noyau de $\mathcal{L}_{k+1}$, alors $L_5 \circ \dots \circ L_1\alpha$ appartient à $\mathcal{D}^{k+1}(B(0,3\rho))$.

remarque : d'après le lemme 6, il suffit de démontrer le résultat pour k = 0.

notations : • On note $U \underline{\times} U$, l'ensemble $U \times U$ privé de la diagonale.

• $\mathcal{K}_m$ est la famille de noyaux $K(u,v)$ définis sur $U \underline{\times} U$ par :

$K(u,v) = L(u-v,v)$ avec $L \in \mathcal{L}_m$.

on a : $K(u,v) = \dfrac{N(u,v)}{\Delta(u,v)^{k+1}}$ avec $\Delta(u,v) = [\|u-v\|^2 + (f(u)-f(v))^2]^{1/2}$.

Pour α appartenant à $\mathcal{D}(U)$, on a : $L\alpha(v) = \int L(\xi,v)\alpha(v+\xi)\,d\xi = \int K(u,v)\alpha(u)\,du$.

Le lemme 7 est évident si l'on démontre que le produit $K^5 = K_5 \circ \dots \circ K_1$ de cinq noyaux de $\mathcal{K}_1$ est un noyau continu sur $U \times U$ qui admet une dérivée partielle par rapport à sa seconde variable, continue sur $B(0,3\rho)^2$. Ce résultat est établi par les lemmes 8, 9, 10 et 11.

Lemme 8 : Soit K un noyau de $\mathcal{K}_1$. On a l'inégalité :

$$|K(w,u)-K(w,v)| \le c\,\frac{\|u-v\|}{\|u-w\|\,\|v-w\|}.$$

démonstration : Soit D la boule de centre $\frac{u+v}{2}$ et de rayon $3\|u-v\|$.

1. si w appartient à D,

$$|K(w,u)-K(w,v)| \le |K(w,u)| + |K(w,v)| \le \frac{c}{\|w-u\|} + \frac{c}{\|w-v\|} \le \frac{7c\|u-v\|}{\|u-w\|\,\|v-w\|}.$$

2. si w appartient à $U - D$,

$$|K(w,u)-K(w,v)| \le \|u-v\| \sup_{x\in[u,v]} \left\|\frac{\partial}{\partial x} K(w,x)\right\|$$

la définition de $\mathcal{K}_1$ entraîne : $\left\|\dfrac{\partial}{\partial x} K(w,x)\right\| \le \dfrac{c}{\|w-x\|^2} \le \dfrac{4c}{\|u-w\|\,\|v-w\|}$.

<u>Lemme 9</u> : Soient K_1, K_2 des noyaux de $\mathcal{K}_1$.

On note $K^2 = K_1 \circ K_2$: $K^2(w,v) = \int K_1(w,u)\, K_2(u,v)\, du$.

Alors $\dfrac{\partial K^2}{\partial v}$ existe sur $U \times B(0,3\rho)$.

<u>démonstration</u> :

On note $v = (v_1,v_2)$ et pour h réel non nul, on identifie h et (h,0).

Démontrons l'existence de $\dfrac{\partial K^2}{\partial v_1}$. On a la décomposition :

$$\frac{K^2(w,v+h) - K^2(w,v)}{h} = \int [K_1(w,u)-K_1(w,v)]\, \frac{K_2(u,v+h)-K_2(u,v)}{h}\, du$$
$$+ K_1(w,v) \int \frac{K_2(u,v+h)-K_2(u,v)}{h}\, du .$$

1. <u>Etude du deuxième terme</u> : l'application ϕ définie par :

$\phi(v) = \int K_2(u,v)du = \int L_2(\xi,v)d\xi$ est continûment dérivable sur $B(0,3\rho)$:

c'est une conséquence du lemme 4.

Le deuxième terme a donc pour limite lorsque h tend vers 0 :

$K_1(w,v)\, \dfrac{\partial \phi}{\partial v_1}(v)$ application définie et continue sur $U \times B(0,3\rho)$ et admettant au voisinage de la diagonale une singularité majorée par $\dfrac{c}{\|w-v\|}$.

2. <u>Etude du premier terme</u> :

• Soit $\psi_n(u) = [K_1(w,u)-K_1(w,v)]\, \dfrac{K_2(u,v+h_n)-K_2(u,v)}{h_n}$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$.

La suite ψ_n converge presque partout sur U, lorsque n tend vers l'infini, vers la fonction ψ : $\psi(u) = [K_1(w,u)-K_1(w,v)]\, \dfrac{\partial K_2}{\partial v_1}(u,v)$.

• Soit : $B_\varepsilon = \{u \in U : |u_1-v_1| < \dfrac{\|v-w\|}{2} , |u_2-v_2| < \varepsilon\}$

avec : $\varepsilon < \dfrac{\|v-w\|}{4}$ et $|h_n| < \dfrac{\|v-w\|}{4}$ pour tout n.

On a alors les convergences suivantes :

<u>a</u>. On a la majoration (Lemme 8) : $|\psi_n(u)| \leq \dfrac{c^2}{\|u-v-h_n\|\ \|u-w\|\,\|v-w\|} \cdot 1_{B(v,2)}$.

Par suite, si $u \in U - B_\varepsilon$, $|\psi_n(u)| \leq \dfrac{4c^2}{\|v-w\|^2\ \|u-w\|}\ 1_{B(v,2)}$.

Donc (théorème de Lebesgue) la suite $\int_{U-B_\varepsilon} \psi_n(u)\, du$ tend, lorsque n tend vers l'infini, vers $\int_{U-B_\varepsilon} \psi(u)\, du$.

<u>b</u>. Lorsque ε tend vers 0, $\int_{B_\varepsilon} |\psi_n(u)|\, du$ tend vers 0 uniformément par rapport à n.