Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold, B. Eckmann and F. Takens

1404

M.-P. Malliavin (Ed.)

Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin

Proceedings, Paris 1987–1988
(39ème Année)

Springer-Verlag

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold, B. Eckmann and F. Takens

1404

M.-P. Malliavin (Ed.)

Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin

Proceedings, Paris 1987–1988
(39ème Année)

Springer-Verlag

Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo Hong Kong

Editeur

Marie-Paule Malliavin
Université Pierre et Marie Curie, Mathématiques
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 02, France

Mathematics Subject Classification (1980): 14C20, 14F05, 14L30, 16A03, 16A20, 16A33, 16A46, 16A48, 16A54, 16A61, 16A62, 16A64, 16A89, 20G05, 32M99, 47F05

ISBN 3-540-51812-6 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-51812-6 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

Printing and binding: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstr.
2146/3140-543210 – Printed on acid-free paper

PREVIOUS VOLUMES OF THE "SEMINAIRE Paul DUBREIL" WERE PUBLISHED IN THE LECTURE NOTES, VOLUMES 586 (1976), 641 (1977), 740 (1978), 795 (1979), 867 (1980), 924 (1981), 1029 (1982), 1146 (1983-84), 1220 (1985) and 1296 (1986).

LISTE DES AUTEURS

* *

*

TABLE DES MATIÈRES

ALGEBRES PRE-INCLINEES ET CATEGORIES DERIVEES

Ibrahim Assem et Andrzej Skowronski

[*Cet article apparaît dans sa forme définitive et aucune autre version de ce travail ne sera soumise ailleurs pour publication*].

Soient k un corps algébriquement clos et A une k-algèbre (associative, unifère) de dimension finie. Sans perte de généralité, on peut supposer A sobre et connexe. Tous nos modules sont à droite et de k-dimension finie. On notera mod A la catégorie des A-modules et $D^b(A)$ la catégorie dérivée des complexes bornés sur mod A [V] . La structure de $D^b(A)$ est connue dans les cas où A est une algèbre héréditaire de représentation finie ou docile, ou bien A est une algèbre tubulaire canonique (au sens de Ringel [R1]) [H2] [HR2] . Dans ces deux cas, tout cycle de $D^b(A)$ se trouve entièrement dans un tube.

Nous prouvons que, réciproquement, si tout cycle de $D^b(A)$ se trouve dans un tube, alors $D^b(A)$ est équivalente, en tant que catégorie triangulée, à $D^b(C)$, où C est soit héréditaire de représentation finie ou docile, soit une algèbre tubulaire canonique. En outre, c'est le cas si et seulement si A s'obtient de C au moyen d'une suite finie d'inclinaisons et de co-inclinaisons. Si C est héréditaire, A est en fait une algèbre pré-inclinée [AH] . La démonstration de notre résultat (section (5)) nous permet d'obtenir une classification des algèbres pré-inclinées de type Dynkin ou Euclidien. Nous introduisons une notion de connexité simple pour les algèbres triangulaires qui ne sont pas nécessairement de représentation finie et montrons que la classification se scinde en deux cas, le cas où l'algèbre est simplement connexe et celui où elle est pré-inclinée de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$ (section (4)). Ce dernier cas est résolu dans la section (3), alors que le cas simplement connexe se divise encore en deux parties: si l'algèbre est de représentation infinie, nous donnons une description complète par carquois liés (section (2)) et si elle est de représentation finie, nous donnons un critère pratique en termes de la forme quadratique de l'algèbre (section (6)). Enfin, dans une dernière section, nous présentons une classification détaillée par carquois liés des algèbres pré-inclinées de type $\mathbb{D}_n$. Ce résultat, compte tenu de [AH] et [H1] , achève la classification des algèbres pré-inclinées de type Dynkin. Il a été utile dans les parties combinatoires des démonstrations des résultats précédents, ainsi que dans d'autres problèmes de classification d'algèbres dociles (voir, par exemple, [ANS] et [NS]). Sauf dans la dernière partie, la plupart des démonstrations ne sont qu'esquissées. Les détails paraîtront dans [AS1][AS2][AS3] et [AS4] . Dans la section (7), par contre, nous donnons une démonstration complète de notre résultat.

Ces résultats ont été présentés par le premier auteur au Séminaire Malliavin en mars 1987. Ils ont été obtenus alors que les deux auteurs visitaient l'Université de Bielefeld en tant que boursiers Alexandre von Humboldt. Ils voudraient remercier C. M. Ringel pour son hospitalité.

1. Préliminaires

1.1 On rappelle qu'un <u>carquois</u> Q est défini par la donnée d'un ensemble de points Q_0 et d'un ensemble de flèches Q_1 . Une <u>relation</u> d'un point x à un point y est une combinaison linéaire $\rho = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j$ où, pour chaque $1 \leq j \leq m$, λ_j est un scalaire non-nul et w_j un chemin de x à y de longueur au moins deux (nous distinguons soigneusement entre un <u>chemin</u> de Q , orienté par définition, et une <u>allée</u>, qui ne l'est pas). Une relation ρ est une <u>relation-zéro</u> (respectivement, une <u>relation de commutativité</u>) si $m = 1$ (respectivement, $m = 2$). Un ensemble de relations engendre un idéal bilatère I de l'algèbre des chemins kQ de Q . La paire (Q,I) est alors appelée un <u>carquois lié</u>. Si $I = 0$, le carquois est dit <u>libre</u>. On sait que, pour toute k-algèbre A (localement) de dimension finie, sobre (c'est à dire telle que $A/\mathrm{rad}\, A \xrightarrow{\sim} k \times \ldots \times k$) et connexe (c'est à dire dont les seuls idempotents centraux sont 0 et 1), il existe un carquois lié connexe (Q_A,I) tel qu'il existe un isomorphisme $A \xrightarrow{\sim} kQ_A/I$ (appelé une <u>présentation</u> de A) [G1] . L'algèbre A est dite <u>triangulaire</u> si son carquois Q_A n'a pas de cycles orientés. Pour chaque $i \in (Q_A)_0$, on notera e_i l'idempotent primitif correspondant de A , $S(i)$ le A-module simple correspondant et $P(i)$ (respectivement, $I(i)$) la couverture projective (respectivement, l'enveloppe injective) de $S(i)$. Le <u>support</u> d'un A-module M est l'ensemble $\{i \in (Q_A)_0 \mid \mathrm{Hom}_A(P(i),M) \neq 0\}$. L'algèbre d'un carquois lié $A = kQ/I$ peut aussi être considérée comme une k-catégorie dont l'ensemble d'objets A_0 est Q_0 et l'ensemble $A(x,y)$ des morphismes de x à y est le quotient de l'espace vectoriel $kQ(x,y)$ des combinaisons linéaires des chemins de x à y par le sous-espace $I(x,y) = I \cap kQ(x,y)$ [BoG] .

1.2 Soit K une catégorie de Krull-Schmidt, c'est à dire une k-catégorie où les idempotents scindent. Un <u>cycle</u> de K est une suite de morphismes non-nuls et non-inversibles:

$$M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} M_2 \to \ldots \xrightarrow{f_m} M_m = M_0$$

où les M_i sont des objets indécomposables de K [R1] . Pour une algèbre A , la catégorie $\mathrm{mod}\, A$ est dite <u>dirigée</u> si elle ne contient pas de cycles. Si c'est le cas, alors A est nécessairement de représentation finie [R1] . Le <u>carquois</u> $\Gamma(K)$ d'une catégorie de Krull-Schmidt K a pour points les classes d'isomorphisme $[M]$ des objets indécomposables M de K et il existe une flèche $[M] \to [N]$ s'il existe un morphisme irréductible $M \to N$ dans K . Si $K = \mathrm{mod}\, A$ ou $D^b(A)$, alors $\Gamma(K)$ est un carquois de translation. On notera τ la translation de ce carquois. Le carquois $\Gamma(\mathrm{mod}\, A)$, noté plus brièvement Γ_A , est le <u>carquois d'Auslander-Reiten</u> de A [G1][R1][H2] . Un carquois de translation Γ sans flèches multiples est appelé un <u>tube</u> [R1] s'il contient un chemin cyclique et si sa réalisation topologique $|\Gamma| = S^1 \times \mathbb{R}_0^+$ (où S^1 est le cercle unité et $\mathbb{R}_0^+$ l'ensemble des réels non-négatifs).

Une catégorie de Krull-Schmidt K sera dite de cycles finis [AS3] si, pour chaque cycle $M_o \to M_1 \to \dots \to M_m = M_o$ de K, les objets M_i se trouvent dans un tube de $\Gamma(K)$.

1.3 Soit A une algèbre. Un module T_A est dit inclinant (respectivement, co-inclinant) [HR1] si les conditions suivantes sont satisfaites:

(T1) $\mathrm{Ext}^2_A(T,-) = 0$ (respectivement, (T1') $\mathrm{Ext}^2_A(-,T) = 0$)

(T2) $\mathrm{Ext}^1_A(T,T) = 0$

(T3) Le nombre de facteurs directs indécomposables non-isomorphes de T_A égale le rang du groupe de Grothendieck $K_o(A)$ de A.

Soit $B = \mathrm{End}\, T_A$. On dit alors que $(B,{}_BT_A,A)$ est un triplet inclinant (respectivement, co-inclinant). Un module inclinant T_A est dit séparant si, pour tout A-module indécomposable M, on a soit $\mathrm{Hom}_A(T,M) = 0$, soit $\mathrm{Ext}^1_A(T,M) = 0$ [A2]. Des exemples de modules inclinants séparants sont les modules inclinants d'APR [APR] définis comme suit: à chaque puits i de Q_A, on associe le module inclinant

$$T^{(i)}_A = \tau^{-1}P(i) \oplus (\bigoplus_{j \neq i} P(j)) \quad .$$

Deux algèbres A et B sont dites équivalentes pour les inclinaisons et les co-inclinaisons (ou de la même classe d'inclinaison) [AS2] s'il existe une suite d'algèbres $A = A_o, A_1, \dots, A_m, A_{m+1} = B$ et une suite de modules $T^i_{A_i}$ $(0 \leq i \leq m)$ inclinants ou co-inclinants telles que $A_{i+1} = \mathrm{End}\, T^i_{A_i}$ pour tout i. Etant donné un carquois fini connexe $\vec{\Delta}$ sans cycles orientés, une algèbre A est dite pré-inclinée de type $\vec{\Delta}$ [AH] si A est équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à $B = k\vec{\Delta}$ et, en outre, chaque $T^i_{A_i}$ est un module inclinant séparant. Si $m \leq 1$, on dit que A est inclinée [HR1]. Par exemple, si H est une algèbre héréditaire docile et T_H est un module inclinant dont tous les facteurs directs indécomposables sont pré-projectifs (ou pré-injectifs), alors l'algèbre $A = \mathrm{End}\, T_H$, appelée docile dérobée, est inclinée. Rappelons qu'une algèbre héréditaire est de représentation finie (respectivement, docile) si et seulement si le graphe sous-jacent de son carquois est un graphe de Dynkin (respectivement, un graphe Euclidien).

Il suit de [H2] que, si (B,T,A) est un triplet inclinant, alors $D^b(A) \xrightarrow{\sim} D^b(B)$, en tant que catégories triangulées. En particulier, si A est pré-inclinée de type $\vec{\Delta}$, alors $D^b(A) \xrightarrow{\sim} D^b(k\vec{\Delta})$, en tant que catégories triangulées. Happel, Rickard et Schofield [HRS] ont prouvé que pour un carquois fini connexe $\vec{\Delta}$ sans cycles orientés et une algèbre A, les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $D^b(A) \xrightarrow{\sim} D^b(k\vec{\Delta})$, en tant que catégories triangulées.

(ii) A est pré-inclinée de type $\vec{\Delta}$.

(iii) A et $k\vec{\Delta}$ sont de la même classe d'inclinaison.

1.4 Soient A une algèbre de dimension finie et $D = \mathrm{Hom}_k(-,k)$ la dualité usuelle sur mod A. <u>L'algèbre répétitive</u> $\hat{A}$ de A est l'algèbre:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & 0 \\ \ddots & A_{-1} & & & \\ & \ddots M_0 & A_0 & & \\ & & M_1 & A_1 & \\ 0 & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

où les matrices n'ont qu'un nombre fini de coefficients non-nuls, $A_p = A$, $M_p = {}_A(DA)_A$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, tous les autres coefficients sont nuls. L'addition est l'addition usuelle des matrices et la multiplication est induite des applications canoniques $A \underset{A}{\otimes} DA \xrightarrow{\sim} DA$, $DA \underset{A}{\otimes} A \xrightarrow{\sim} DA$ et l'application nulle $DA \underset{A}{\otimes} DA \to 0$ [HW]. C'est une algèbre associative, non unifère, localement de dimension finie et auto-injective.

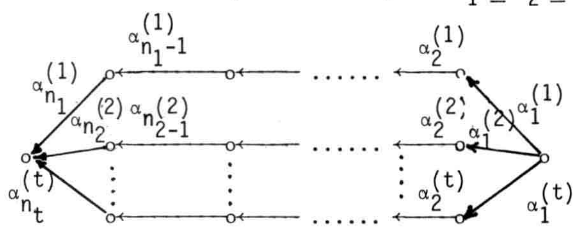
Happel a démontré que, si A est de dimension globale finie, alors $D^b(A)$ est équivalente, en tant que catégorie triangulée, à la catégorie stable $\underline{\mathrm{mod}}\,\hat{A}$ associée à mod $\hat{A}$ [H2]. D'autre part, si (B,T,A) est un triplet inclinant (et A est de dimension globale arbitraire), alors $\underline{\mathrm{mod}}\,\hat{A} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{mod}}\,\hat{B}$ [TW1][W] (voir aussi [H2]).

1.5 Rappelons que l'<u>extension</u> (respectivement, la <u>co-extension</u>) ponctuelle d'une algèbre A par un A-module M est l'algèbre

$$A[M] = \begin{bmatrix} A & 0 \\ M & k \end{bmatrix} \quad \text{(respectivement,} \quad [M]A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ DM & A \end{bmatrix} \text{)}$$

avec l'addition et la multiplication ordinaire des matrices. Son carquois contient Q_A en tant que sous-carquois plein et un point supplémentaire, dit d'extension, qui est une source (respectivement, de co-extension, qui est un puits). Soient A une algèbre triangulaire et $i \in (Q_A)_0$ un puits. La <u>réflexion</u> S_i^+A de A au puits i [HW] est le quotient de $A[I(i)_A]$ par l'idéal bilatère engendré par e_i. Il est clair que les algèbres répétitives de A et S_i^+A sont isomorphes. En outre A et S_i^+A sont de la même classe d'inclinaison [TW2]. Dualement, partant d'une source j de Q_A, on définit la réflexion S_j^-A de A en j.

1.6 On considère le carquois suivant, où $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_t$:



Notons $\alpha^{(s)}$ le chemin $\alpha_1^{(s)}\alpha_2^{(s)}\ldots\alpha_{n_s}^{(s)}$ $(1 \leq s \leq t)$ et U l'espace vectoriel de base $<\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(t)}>$. Soit I un sous-espace de dimension t-2 dont l'intersection avec tout sous-espace $<\alpha^{(s)},\alpha^{(s')}>$ $(s \neq s')$ de U est nulle. L'algèbre $A = kQ/I$ est dite <u>canonique</u> de type $(n_1,n_2,\ldots,n_t)$ [R1] . Ringel a démontré que les algèbres dociles canoniques sont les suivantes: l'algèbre de type (2,2,2,2) où $I = <\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \alpha^{(3)}\ ,\ \alpha^{(1)} + \lambda\cdot\alpha^{(2)} + \alpha^{(4)}>$ $(\lambda \in k\setminus\{0,1\})$, les algèbres de type (p,q,r) avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} \geq 1$ où $I = <\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \alpha^{(3)}>$ et l'algèbre de type (p,q) où I = 0 [R1] . Les algèbres canoniques des types (p,q), (2,2,r), (2,3,3), (2,3,4) et (2,3,5) sont dites <u>domestiques</u>. Elles sont inclinées de types respectifs $\widetilde{\mathbb{A}}_{p+q+1}$, $\widetilde{\mathbb{D}}_{r+2}$, $\widetilde{\mathbb{E}}_6$, $\widetilde{\mathbb{E}}_7$ et $\widetilde{\mathbb{E}}_8$. Les autres algèbres dociles canoniques, c'est à dire des types (3,3,3), (2,4,4), (2,3,6) et (2,2,2,2) sont dites <u>tubulaires</u>.

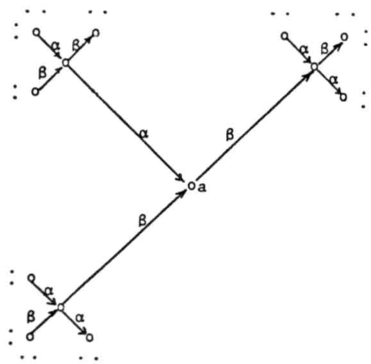
Soit C une algèbre docile canonique. La catégorie dérivée $D^b(C)$ est décrite dans [H2][HR2] . Si C est domestique, le carquois de $D^b(C)$ est formé de composantes transjectives $\mathbb{C}_i$ $(i \in \mathbb{Z})$ et de composantes régulières $\mathbb{R}_i$ $(i \in \mathbb{Z})$. Les composantes transjectives sont isomorphes à la bande infinie $\mathbb{Z}\Delta$, où Δ est le graphe Euclidien correspondant à C . Chaque composante régulière est formée d'une famille de tubes indexés par la droite projective $\mathbb{P}_1(k)$. En outre, si $\mathrm{Hom}_{D^b(C)}(M^\cdot,N^\cdot) \neq 0$ pour $M^\cdot$, $N^\cdot$ indécomposables et $M^\cdot$ dans $\mathbb{C}_i$ (respectivement, $\mathbb{R}_i$), alors $N^\cdot$ appartient soit à $\mathbb{C}_i$, soit à $\mathbb{R}_i$, soit à $\mathbb{C}_{i+1}$ (respectivement, soit à $\mathbb{R}_i$, soit à $\mathbb{C}_{i+1}$, soit à $\mathbb{R}_{i+1}$). Pour une algèbre tubulaire canonique C , le carquois de $D^b(C)$ est formé de familles $\mathbb{R}_q$, $q \in \mathbb{Q}$, où chaque $\mathbb{R}_q$ est une famille de tubes indexés par $\mathbb{P}_1(k)$. En outre, si $\mathrm{Hom}_{D^b(C)}(M^\cdot,N^\cdot) \neq 0$ pour $M^\cdot$, $N^\cdot$ indécomposables et $M^\cdot$ dans $\mathbb{R}_q$, alors $N^\cdot$ appartient à $\mathbb{R}_p$ pour un $q \leq p \leq q+3$. Dans les deux cas, la catégorie $D^b(C)$ est de cycles finis. Un autre cas où $D^b(C)$ est (trivialement) de cycles finis est le suivant: soit C une algèbre héréditaire de représentation finie et Δ le graphe sous-jacent de son carquois, alors le carquois de $D^b(C)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}\Delta$ [H2] . En particulier, $D^b(C)$ est dirigée.

2. Agrandissement d'une algèbre par branches:

2.1 Le fil conducteur à travers les résultats de classification est la notion d'agrandissement d'une algèbre par branches. La <u>branche complète</u> est un carquois lié infini (Q,I) défini comme suit. L'ensemble de points Q_0 est l'ensemble des mots sur l'alphabet formé de deux lettres α et β :
$Q_0 = \{x = \alpha^{n_1}\beta^{m_1}\ldots\alpha^{n_t}\beta^{m_t} \mid t \in \mathbb{N}\ ,\ n_i,m_j \in \mathbb{Z}\ ,\ 1 \leq i,j \leq t\}$. Pour chaque $x \in Q_0$, on définit deux flèches de source x : $\alpha_x : x \to x\alpha$ et $\beta_x : x \to x\beta$ (cela équivaut

à dire que tout $x \in Q_0$ est le but de deux flèches $\alpha_{x\alpha^{-1}} : x\alpha^{-1} \to x$ et $\beta_{x\beta^{-1}} : x\beta^{-1} \to x$). Enfin, I est l'idéal de kQ engendré par tous les mots des formes $\alpha_x\beta_{x\alpha}$ et $\beta_x\alpha_{x\beta}$ (pour $x \in Q_0$). Les flèches de la forme α_x (respectivement, β_x) seront simplement appelées des <u>α-flèches</u> (respectivement, des <u>β-flèches</u>).

Une <u>branche</u> est par définition un sous-carquois lié plein, fini et connexe de la branche complète. Il résulte de [AH] qu'une algèbre A est pré-inclinée de type $\mathbb{A}_n$ si et seulement si $A \tilde{\to} kQ/I$, où le carquois lié (Q,I) est une branche. Une <u>racine d'extension</u> (respectivement, de <u>co-extension</u>) dans une branche est un sommet a qui n'est pas la source (respectivement, pas le but) d'une α-flèche. La branche est alors appelée une <u>branche d'extension</u> (respectivement, de <u>co-extension</u>) <u>en a</u> . Ainsi une branche d'extension en a est un sous-carquois lié, plein, fini et connexe, contenant a , de l'arbre infini suivant, lié par toutes les relations possibles des formes $\alpha\beta = 0$ et $\beta\alpha = 0$:



Une branche d'extension de la forme $\dots \circ \xrightarrow{\alpha} \circ \xrightarrow{\alpha} \dots \xrightarrow{\alpha} \circ\ a$ est appelée une <u>droite dirigée d'extension</u>. On définit dualement une <u>droite dirigée de co-extension</u>. Le nombre de points d'une branche K est appelé sa <u>longueur</u> et noté $|K|$. On conviendra de considérer le carquois vide comme une branche de longueur zéro.

Soient $A = kQ/I$ l'algèbre d'un carquois lié (Q,I) et (Q',I') un sous-carquois lié plein de (Q,I) contenant une source a . On dit que A s'obtient à partir de kQ'/I' en <u>enracinant une branche d'extension</u> (Q'',I'') en a si (Q'',I'') est un sous-carquois lié plein de (Q,I) tel que:

(1) $Q'_0 \cap Q''_0 = \{a\}$, $Q'_0 \cup Q''_0 = Q_0$

(2) I est engendré par I', I'' et tous les chemins $\beta\gamma$, où $\beta \in Q''_1$ a pour but a , et $\gamma \in Q'_1$ a pour source a .

On définit dualement l'enracinement de branches de co-extension.

Soient C une algèbre, et $E_1,\dots,E_t$ des C-modules indécomposables deux à deux non-isomorphes. Pour $1 \leq i \leq t$, soient K_i une branche d'extension en a_i et

K_i' une branche de co-extension en a_i' (K_i ou K_i' peut être vide). On définit par récurrence l'agrandissement A de C aux modules E_i par les branches d'extension K_i et de co-extension K_i' comme suit. L'algèbre $C[E_1,K_1]$ s'obtient de l'extension ponctuelle $C[E_1]$ en enracinant la branche K_1 au point d'extension a_1 . Pour $1 < j \leq t$, $C[E_i,K_i]_{i=1}^{j}$ s'obtient de l'extension ponctuelle $(C[E_i,K_i]_{i=1}^{j-1})[E_j]$ en enracinant la branche K_j au point d'extension a_j . Alors $B = C[E_i,K_i]_{i=1}^{t}$ est appelée l'extension de C aux modules E_i par les branches d'extension K_i . On définit de même la co-extension $B' = {}_{i=1}^{t}[E_i,K_i']C$. Notons maintenant, pour $1 \leq i \leq t$, E_i' l'unique B-module indécomposable dont la restriction à C égale E_i et la restriction à K_i est l'unique K_i-module indécomposable de support le chemin maximal non-nul de but a (formé de α-flèches). Alors $[E_1',K_1']B$ s'obtient de la co-extension ponctuelle $[E_1']B$ en enracinant K_1' au point de co-extension a_1' . Pour $1 < j \leq t$, ${}_{i=1}^{j}[E_i',K_i']B$ s'obtient de $[E_j']({}_{i=1}^{j-1}[E_i',K_i']B)$ en enracinant K_j' au point de co-extension a_j' . Alors $A = {}_{i=1}^{t}[E_i',K_i']B$ est l'agrandissement de C . On dit que C est le <u>coeur</u> de A . C'est une sous-catégorie pleine et convexe de A .

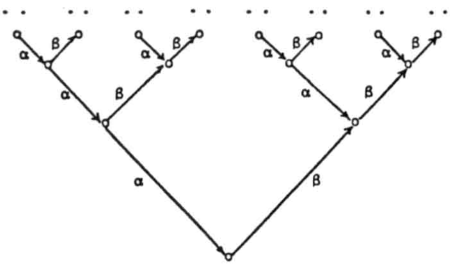
La conjecture générale est que toute algèbre pré-inclinée ou équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre tubulaire canonique est un agrandissement par branches de certaines algèbres plus élémentaires.

2.2 Dans cette section, nous nous limiterons au cas suivant. Soit C une algèbre docile dérobée, de famille tubulaire $(\mathfrak{T}_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{P}_1(k)}$. Nous noterons r_λ le rang du tube (stable) $\mathfrak{T}_\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{P}_1(k)$) . Soient $E_1,E_2,\dots,E_t$ des C-modules simples réguliers deux à deux non-isomorphes, $K_1,K_2,\dots,K_t$ des branches d'extension et $K_1',K_2',\dots,K_t'$ des branches de co-extension. On définit le <u>type tubulaire</u> $n_A = (n_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{P}_1(k)}$ de l'agrandissement $A = {}_{i=1}^{t}[E_i',K_i']\, C\, [E_i,K_i]_{i=1}^{t}$ par:

$$n_\lambda = r_\lambda + \sum_{E_i \in \mathfrak{T}_\lambda} (|K_i| + |K_i'|) \quad .$$

On conviendra d'écrire, au lieu de $(n_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{P}_1(k)}$, la suite finie ayant au moins deux n_λ et comprenant tous ceux qui sont plus grands que 1, ordonnés suivant un ordre non-décroissant. Un agrandissement A d'une algèbre docile dérobée C en des modules simples réguliers est dit <u>domestique</u> (respectivement, <u>tubulaire</u>) si son type tubulaire est une des suites suivantes: (p,q), (2,2,r), (2,3,3), (2,3,4) ou (2,3,5) (respectivement, (3,3,3), (2,4,4), (2,3,6) ou (2,2,2,2)).

2.3 Ces concepts généralisent ceux de [R1]: une <u>branche tronquée</u> en a (branche dans la terminologie de [R1]) est un sous-carquois lié plein, fini et connexe, contenant a , de l'arbre infini suivant, lié par toutes les relations de la forme $\alpha\beta = 0$:



En d'autres termes, une branche tronquée est une branche telle que le but d'une β-flèche n'est pas la source d'une α-flèche. Si C est une algèbre docile dérobée, $E_1,\ldots,E_t$ des C-modules simples réguliers deux à deux non-isomorphes et $K_1,\ldots,K_t$ des branches tronquées, l'extension par branches $B = C[E_i,K_i]_{i=1}^{t}$ est une extension tubulaire au sens de [R1](4.7). Ringel a démontré que, si A est une extension (respectivement, co-extension) domestique d'une algèbre docile dérobée en des modules simples réguliers par des branches tronquées, alors A est une algèbre inclinée de type Euclidien ayant une tranche complète dans sa composante pré-injective (respectivement, pré-projective) et aucun projectif (respectivement, injectif) dans cette composante. Réciproquement, toute algèbre inclinée de représentation infinie de type Euclidien est d'une de ces formes [R1](4.9).

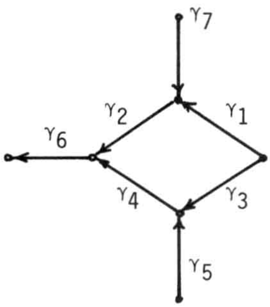
2.4 THEOREME [AS3] . Une algèbre A est pré-inclinée de type Euclidien (respectivement, équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre tubulaire canonique) et de représentation infinie si et seulement si A est isomorphe à un agrandissement domestique (respectivement, tubulaire) d'une algèbre docile dérobée en des modules simples réguliers. En outre, dans ce cas, n_A égale le type tubulaire de l'algèbre héréditaire (respectivement, tubulaire canonique) correspondante.

Démonstration. La nécessité suivra de (3.1) si A est pré-inclinée de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$ et de (5.3) dans les autres cas. Nous démontrons ici la suffisance. Soit A un agrandissement domestique (respectivement, tubulaire) de l'algèbre docile dérobée C en des modules simples réguliers. Il suffit (d'après (1.3)) de prouver que A est de la classe d'inclinaison d'une algèbre héréditaire de type Euclidien (respectivement, d'une algèbre tubulaire canonique). Pour commencer, on trouve une algèbre B de la classe d'inclinaison de A , qui est un agrandissement de C par des droites dirigées et telle que $n_B = n_A$. En effet, on applique l'algorithme de [AH](2.3) pour effacer successivement les relations sur les branches. Comme à chaque étape les calculs ont lieu à l'intérieur d'une branche donnée, le type tubulaire n'est pas affecté.

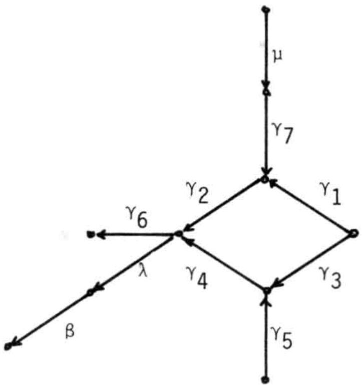
Nous montrons maintenant qu'il existe une algèbre D , de la classe d'inclinaison de B (donc de A), qui est une extension de C par des droites dirigées, et telle que $n_D = n_B$. En effet, soit K' une droite de co-extension de B et i son puits. Pour réfléchir en i , on remarque que, d'après (2.1), le support de la restriction de $I(i)_B$ à K' égale K' , le support de sa restriction à C est un C-module simple régulier E et, s'il existe aussi une droite d'extension K correspondant à E , alors la restriction de $I(i)$ à K est K . Enfin, ce support ne coupe pas les autres droites d'extension et de co-extension. Ainsi, dans l'algèbre S_i^+B , le puits i de B est remplacé par une source, qui est point d'extension de $B/\langle e_i\rangle$ et le module d'extension est dans le tube de $B/\langle e_i\rangle$ contenant E . Par conséquent, $n_B = n_{S_i^+B}$. Si on applique successivement ce processus aux points de K' , on obtient une algèbre de la même classe d'inclinaison que B , de même type tubulaire, mais dans laquelle K' est remplacée par une droite dirigée d'extension. On obtient D en appliquant ce processus successivement à toutes les droites de co-extension.

Supposons que A est domestique. Comme les droites dirigées sont des branches tronquées, il résulte de (2.3) que D est une algèbre inclinée de type Euclidien ayant une tranche complète dans sa composante pré-injective. Par contre, si A est tubulaire, D est, par définition [R1](5), une algèbre tubulaire. Mais alors il suit de [HR2](1) qu'elle est équivalente , pour les inclinaisons et les co-inclinaisons, à une algèbre tubulaire canonique. Dans les deux cas, le type tubulaire est préservé. Cela achève la démonstration.

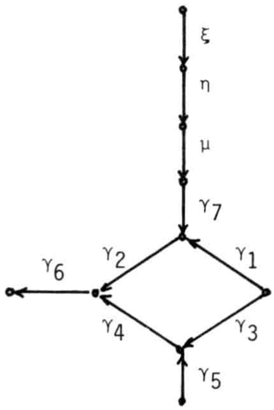
Exemple: Soit C l'algèbre docile dérobée de type $\widetilde{\mathbb{E}}_6$ donnée par le carquois:



lié par $\gamma_1\gamma_2 = \gamma_3\gamma_4$. On a $n_C = (2,3,3)$. Soit E_C le module simple régulier de vecteur-dimension $\begin{smallmatrix} & & 0 & \\ & & 1 & \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & 0 & \\ & & 0 & \end{smallmatrix}$. On enracine en E la branche d'extension de longueur un, et la branche de co-extension de longueur deux formée d'une β-flèche. Cela donne l'algèbre A du carquois:



lié par $\gamma_1\gamma_2 = \gamma_3\gamma_4$, $\gamma_4\lambda = 0$, $\lambda\beta = 0$, $\mu\gamma_7\gamma_2\gamma_6 = 0$. C'est un agrandissement de C de type tubulaire $n_A = (2,3,6)$. Donc A est dans la classe d'inclinaison de l'algèbre tubulaire canonique de ce type. Afin de voir ceci, on commence par appliquer un module inclinant d'APR correspondant au but de β . Cela donne une algèbre B , de même carquois que A , lié seulement par $\gamma_1\gamma_2 = \gamma_3\gamma_4$, $\gamma_4\lambda = 0$ et $\mu\gamma_7\gamma_2\gamma_6 = 0$. On applique ensuite successivement des réflexions correspondant aux buts de β et λ . On obtient l'algèbre D du carquois:



lié par $\gamma_1\gamma_2 = \gamma_3\gamma_4$ et $\mu\gamma_7\gamma_2\gamma_6 = 0$. C'est bien une algèbre tubulaire de type (2,3,6).

3. Algèbres pré-inclinées de type $\widetilde{\mathbb{A}}_m$:

3.1 Dans cette section, nous exposons la classification des algèbres pré-inclinées de type $\widetilde{\mathbb{A}}_m$ $(m \geq 1)$ [AS1] :

THEOREME. Une algèbre A est pré-inclinée de type $\widetilde{\mathbb{A}}_m$ si et seulement s'il existe une présentation $A \xrightarrow{\sim} kQ/I$ de A par un carquois lié (Q,I) de m+1 points tel que:

(R1) Le nombre de flèches de source ou de but donné est au plus égal à deux.

(R2) Pour chaque flèche α , il existe au plus une flèche β et une flèche γ telles que $\alpha\beta$ et $\gamma\alpha$ n'appartiennent pas à I .

(R3) I est engendré par un ensemble de chemins (relations-zéro) de longueur deux.

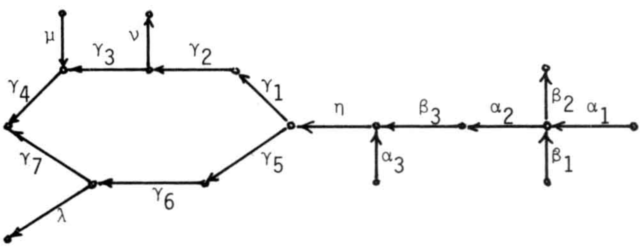
(R4) Pour chaque flèche α , il existe au plus une flèche ξ et une flèche η telles que $\alpha\xi$ et $\eta\alpha$ appartiennent à I .

(R5) Q contient un cycle unique (non-orienté) C .

(R6) Le nombre de relations-zéro de C dans le sens des aiguilles d'une montre égale le nombre de relations-zéro dans le sens inverse.

En d'autres termes, les algèbres pré-inclinées de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$ sont des agrandissements par branches des algèbres dont le carquois ordinaire est un cycle non-orienté, lié par des relations-zéro de longueur deux et satisfaisant la condition (R6).

Exemple: On considère l'algèbre A du carquois:



lié par $I = \langle\gamma_1\gamma_2, \gamma_2\gamma_3, \mu\gamma_4, \gamma_5\gamma_6, \eta\gamma_5, \beta_3\eta, \alpha_2\beta_3, \beta_1\alpha_2, \alpha_1\beta_2\rangle$. On voit de suite que A satisfait les conditions (R1) à (R6) et donc est une algèbre pré-inclinée de type $\tilde{\mathbb{A}}_{16}$. Observons que A est de représentation finie.

3.2 Il suit immédiatement de l'énoncé du théorème que les algèbres pré-inclinées de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$ sont bisérielles. Rappelons qu'une k-catégorie localement bornée Λ est dite <u>bisérielle</u> si le radical de tout Λ-module projectif indécomposable (à droite ou à gauche) qui n'est pas unisériel est la somme de deux sous-modules unisériels dont l'intersection est simple ou nulle. Λ est dite <u>bisérielle spéciale</u> [SW] si elle admet une présentation $\Lambda \tilde{\to} kQ/I$ telle que (Q,I) satisfait les conditions (R1) et (R2). Toute algèbre bisérielle spéciale est bisérielle, et toute algèbre bisérielle de représentation finie est bisérielle spéciale [SW] . Rappelons aussi que Λ est dite satisfaire <u>$\alpha'(\Lambda) \leq 2$</u> si, pour tout $x \in (\Gamma_\Lambda)_0$, il existe au plus deux σ-orbites de flèches ayant x pour source ou pour but [H1](5). On sait qu'une algèbre Λ est pré-inclinée de type $\mathbb{A}_n$ si et seulement si elle est simplement connexe de représentation finie, bisérielle spéciale et satisfait $\alpha'(\Lambda) \leq 2$. On en déduit:

LEMME. Une catégorie localement bornée Λ est bisérielle spéciale avec $\alpha'(\Lambda) \leq 2$ si et seulement si elle admet une présentation $\Lambda \xrightarrow{\sim} kQ/I$ où (Q,I) satisfait les conditions (R1) (R2) (R3) et (R4).

Démonstration: Si Λ est bisérielle spéciale et $\alpha'(\Lambda) \leq 2$, alors, par définition, $\Lambda \xrightarrow{\sim} kQ/I$, où (Q,I) satisfait (R1) et (R2). Comme il est clair que tout indécomposable projectif-injectif est unisériel, alors I est engendré par un ensemble de chemins. On considère un revêtement galoisien $F : \tilde{\Lambda} \to \Lambda$ avec le groupe fondamental libre de Q [G2]. Le carquois $\tilde{Q}$ de $\tilde{\Lambda}$ est un arbre lié par l'ensemble $\tilde{I}$ des chemins w de $\tilde{Q}$ tels que $F(w) \in I$. Comme le foncteur de rabaissement F_λ : mod $\tilde{\Lambda} \to$ mod Λ associé à F préserve les suites d'Auslander-Reiten, on a $\alpha'(\tilde{\Lambda}) \leq 2$. Par conséquent $(\tilde{Q},\tilde{I})$ satisfait (R3) et (R4). Il en est donc de même de (Q,I) . Réciproquement, si (Q,I) satisfait ces conditions, alors Λ est bisérielle spéciale et toute sous-catégorie finie K du revêtement universel $\tilde{\Lambda}$ de Λ est pré-inclinée de type $\mathbb{A}_n$. En particulier, $\alpha'(K) \leq 2$. Il suit alors de [DS][WW] que $\alpha'(\Lambda) \leq 2$.

3.3 La démonstration du théorème (3.1) fait intervenir les notions précédentes. Soit en effet A une algèbre pré-inclinée de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$. Alors il existe une algèbre héréditaire H de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$ telle que $\underline{\text{mod}}\ \hat{A} \xrightarrow{\sim} \underline{\text{mod}}\ \hat{H}$ (voir (1.3)). On démontre:

(a) Soit A une algèbre telle que $\underline{\text{mod}}\ \hat{A} \xrightarrow{\sim} \underline{\text{mod}}\ \hat{H}$ pour H héréditaire de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$. Alors $\hat{A}$ est bisérielle.

Il suit de [H2](7.3) et [S] que A est triangulaire. On prouve:

(b) Soit A une algèbre triangulaire telle que $\hat{A}$ est bisérielle. Alors A est bisérielle spéciale avec $\alpha'(A) \leq 2$.

Remarquons qu'il s'ensuit immédiatement que $\hat{A}$ est en fait bisérielle spéciale. Nous avons montré que A admet une présentation $A \xrightarrow{\sim} kQ/I$ où le carquois lié (Q,I) satisfait les conditions (R1) à (R4). En outre, Q n'est pas un arbre puisque sinon A serait pré-inclinée de type $\mathbb{A}_n$ et alors $\hat{A}$ serait localement de représentation finie [AHR], une absurdité, puisque $\underline{\text{mod}}\ \hat{A} \xrightarrow{\sim} \underline{\text{mod}}\ \hat{H}$ avec H de représentation infinie. Par conséquent, Q contient au moins un cycle non-orienté. D'autre part, comme $D^b(H) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{mod}}\ \hat{H}$ est de cycles finis, il en est de même de $D^b(A)$. On démontre:

(c) Soit A une algèbre triangulaire telle que $D^b(A)$ est de cycles finis. Alors toute sous-catégorie pleine K de A qui est bisérielle spéciale et telle que $\alpha'(K) \leq 2$ contient au plus un cycle.

En particulier, Q contient exactement un cycle non-orienté C . Il résulte