

Lecture Notes in Mathematics

1565

L. Boutet de Monvel C. De Concini
C. Procesi P. Schapira M. Vergne

D-modules, Representation Theory, and Quantum Groups

Venezia, 1992

Editors: G. Zampieri, A. D'Agnolo



Springer-Verlag

L. Boutet de Monvel C. de Concini
C. Procesi P. Schapira M. Vergne

D-modules, Representation Theory, and Quantum Groups

Lectures given at the 2nd Session of the Centro
Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.)
held in Venezia, Italy, June 12-20, 1992

Editors: G. Zampieri, A. D'Agnolo

Springer-Verlag

Berlin Heidelberg New York
London Paris Tokyo
Hong Kong Barcelona
Budapest

Authors

Louis Boutet de Monvel
Département de Mathématiques, Université Paris VI
2, Place Jussieu, F-75252 Paris, France

Corrado De Concini
Scuola Normale Superiore
Piazza dei Cavalieri, 7, I-56126 Pisa, Italy

Claudio Procesi
Dipartimento di Matematica, Università "La Sapienza"
Piazzale Aldo Moro, 5, I-00185 Roma, Italy

Pierre Schapira
Université de Paris XIII, CSP Mathématique
F-93430 Villetaneuse, France

Michèle Vergne
Ecole Normale Supérieure
45, rue d'Ulm, F-75005 Paris, France

Editors

Giuseppe Zampieri
Andrea D'Agnolo
Dipartimento di Matematica, Università di Padova
Via Belzoni, 7, I-35131 Padova, Italy

Mathematics Subject Classification (1991): Primary: 58, 17 Secondary: 22

ISBN 3-540-57498-0 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-57498-0 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, re-use of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilms or in any other way, and storage in data banks. Duplication of this publication or parts thereof is permitted only under the provisions of the German Copyright Law of September 9, 1965, in its current version, and permission for use must always be obtained from Springer-Verlag. Violations are liable for prosecution under the German Copyright Law.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1993
Printed in Germany

Typesetting: Camera-ready by author/editor
46/3140-543210 - Printed on acid-free paper

PREFACE

In this CIME session we aimed at proposing to a wide audience the language and the techniques of various fields (such as D-modules, K-theory, equivariant cohomology, microlocal study of sheaves and quantization of groups) converging to recent common results on index theorems and representation theory.

The contents of the lectures can be roughly divided into two groups:

D-modules and microlocal study of sheaves (P. Schapira and J.-P. Schneiders), K-theory and D-modules (L. Boutet de Monvel), G-equivariant cohomology (N. Berline and M. Vergne)

The theory of quantum groups, with particular emphasis to the quantization of some remarkable Poisson groups (C. De Concini and C. Procesi).

The last ingredient of the school was the magic of Venice.

A. D'Agnolo
G. Zampieri

Paris, March 19th, 1993

This CIME Session was held at Ca Dolfin under the sponsorship of the University of Venice. The organizers wish to heartily acknowledge the President of the University of Venice, Prof. G. Castellani, for the excellency of his hospitality.

TABLE OF CONTENTS

L. BOUTET DE MONVEL,	Indice des systèmes différentiels	1
C. DE CONCINI, C. PROCESI,	Quantum Groups	31
P. SCHAPIRA, J.P. SCHNEIDERS,	Index theorems for R-constructible sheaves and D-modules	141
N. BERLINE, M. VERGNE,	The equivariant Chern character and index of G-invariant operators	157

INDICE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

L. BOUTET DE MONVEL

Dans ces notes nous nous proposons de décrire la formule d'indice d'Atiyah et Singer pour les systèmes d'opérateurs différentiels et son extension au cas relatif due à Malgrange et l'auteur. Cette formule décrit le nombre de solutions d'un système d'équations différentielles — ou plus exactement, parce qu'il s'agira pratiquement toujours de complexes elliptiques d'opérateurs différentiels, la caractéristique d'Euler, somme alternée de nombres de Betti de la cohomologie du système — en termes d'invariants topologiques plus simples attachés à ce système. Il y a une version absolue du théorème d'indice, où l'indice est un nombre entier, et des versions avec paramètres, où l'indice est un fibré virtuel sur l'espace des paramètres, ou avec action de groupe compact où l'indice est une représentation du groupe, ou relative où l'indice est un nouveau système différentiel dont on décrit des invariants topologiques en fonction de ceux de l'ancien. L'énoncé que nous décrivons ici tient compte en outre plus explicitement des supports, en s'inspirant de la définition du micro-support des faisceaux constructibles et de la description de la formule de l'indice qu'en déduit P. Schapira dans ses conférences.

§1. INTRODUCTION, DESCRIPTION DU PROBLÈME

Formellement l'indice d'un complexe d'opérateurs linéaires est défini comme suit: on se donne un complexe, c'est à dire une suite

$$a : \cdots \longrightarrow E_k \xrightarrow{a_k} E_{k+1} \longrightarrow \cdots$$

d'espaces vectoriels complexes E_k et d'applications linéaires $a_k \in L(E_k; E_{k+1})$, telle que $a_{k+1} \circ a_k = 0$ pour tout k (une application linéaire $a : E_0 \rightarrow E_1$ s'identifie à un complexe de longueur 2, concentré en degrés 0, 1). La cohomologie de a est le complexe de différentielle nulle $H(a) = \ker a / \operatorname{Im} a$ ($H^k(a) = \ker a_k / \operatorname{Im} a_{k-1}$). Si $H(a)$ est de dimension finie, i.e. si les $H^k(a)$ sont de dimension finie, et nuls sauf pour un nombre fini d'indices $k \in \mathbf{Z}$, l'indice (ou caractéristique d'Euler) de a est la somme alternée:

$$\operatorname{Ind} a = \sum (-1)^k \dim H^k(a)$$

(on a $\operatorname{Ind} a = \sum (-1)^k \dim E^k$ si le complexe a est lui même de dimension finie)

Les complexes dont on s'occupera ici ne sont pas abstraits mais ont une origine ou une signification géométrique: ce sont des complexes d'opérateurs différentiels sur une variété et la formule d'indice d'Atiyah et Singer relie leur indice à des invariants géométriques de a .

La formule d'indice pour un système elliptique d'équations aux dérivées partielles a son origine dans le théorème de Riemann-Roch de la géométrie complexe, plus précisément sous la forme que lui ont donné Hirzebruch, et Grothendieck dans le cas relatif. Voici une

description de cette formule, en termes de K -théorie, résumant celle de Baum, Fulton, Mac Pherson: soient X un espace analytique projectif complexe, et $Z \subset X$ une partie compacte. A tout faisceau cohérent M de $\mathcal{O}_X$ -modules à support dans Z est associé un élément $[M]$ du groupe de Grothendieck $K_Z^{\text{an}}(X)$, qui est le groupe engendré par les classes d'isomorphismes $[M]$ de $\mathcal{O}_X$ -modules cohérents à support dans Z et les relations $[M] = [M'] + [M'']$ s'il existe une suite exacte $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$. Il existe un homomorphisme canonique $K_Z^{\text{an}}(X) \rightarrow K_Z^{\text{top}}(X)$, où $K_Z^{\text{top}}(X)$ est le groupe d'Atiyah des "fibrés vectoriels virtuels à support dans Z ", qui décrit les propriétés additives et invariantes par déformation des complexes de fibrés vectoriels topologiques exacts en dehors de Z (ce groupe sera défini plus en détail au §2). Suivant Baum, Fulton, Mac Pherson, le théorème de Riemann-Roch relatif exprime que cet homomorphisme commute aux images directes propres (il commute aussi aux images inverses). Ce théorème doit être complété par la description de l'image directe K -théorique, qui est définie au moyen du théorème de périodicité de Bott. On exprime aussi le théorème d'indice en termes de cohomologie au moyen de l'isomorphisme de Chern:

$$ch : K_Z^{\text{top}}(X) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow H^{\text{pair}}(X, \mathbf{Q})$$

qui permet de traduire en termes de cohomologie ce qui ne dépend pas de la torsion. Le théorème de Riemann-Roch "classique" de Hirzebruch est la traduction en termes cohomologiques (via le caractère de Chern) du cas particulier de l'énoncé ci-dessus lorsque le but est un point ($K(\text{point}) = \mathbf{Z}$).

Les fonctions holomorphes sont les solutions du système elliptique des équations de Cauchy-Riemann et on sait que pour celles-ci, les théorèmes de finitude sur une variété compacte sont un cas particulier d'un théorème de finitude analogue pour les solutions des systèmes elliptiques d'équations aux dérivées partielles linéaires (la définition sera rappelée plus loin); il était alors naturel de chercher à généraliser aux systèmes elliptiques la formule de Riemann-Roch de Hirzebruch. Les objets qui nous intéresseront d'abord ici sont les systèmes elliptiques d'équations différentielles linéaires sur une variété compacte, ou un peu plus généralement les systèmes dont l'espace des solutions est de dimension finie.

Un système, ou complexe, d'équations différentielles linéaires peut être décrit comme suit: on se donne une variété X , complexe, ou réelle de classe C^∞ , une suite de fibrés vectoriels complexes $E = (E_j)$, $j \in \mathbf{Z}$ ($E_j = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices j), et une suite $P = (P_j)$ d'opérateurs de type $E_j \rightarrow E_{j+1}$ telle que $P_{j+1} \circ P_j = 0$ pour tout j (nous considérerons $(E, P) = ((E_j), (P_j))$ comme un objet gradué et écrirons simplement $P^2 = 0$). Un opérateur P de type $E_0 \rightarrow E_1$ peut toujours être considéré comme un complexe de longueur 2. On considère alors le faisceau gradué de cohomologie de P : $H(P) = \ker(P)/\text{Im}(P)$ ($H^j(P) = \ker P_j/\text{Im } P_{j-1}$) et leurs espaces de sections globales. Par exemple si P est un opérateur de type $E_0 \rightarrow E_1$, assimilé à un complexe de longueur 2, $H^0(P) = \ker P$ est l'espace des solutions de l'équation $Pf = 0$, et l'espace $H^1(P)$ des sections de $E_1 \bmod \text{Im } P$ mesure l'obstruction à la résolution de l'équation $Pf = g$ (il est aussi étroitement lié à l'espace des solutions de l'équation adjointe $P^*g = 0$).

Les complexes d'opérateurs qui se présentent naturellement souvent localement exacts, et ont été construits pour calculer la cohomologie, au sens géométrique, de X à coefficients dans le faisceau des solutions d'un système d'équations différentielles (parce que le faisceau des fonctions C^∞ ou analytiques sur une variété C^∞ ou analytique réelle est cohomologiquement trivial). Ainsi sur une variété X réelle, le faisceau constant $\mathbf{C}_X$ (dont les sections sont les fonctions localement constantes) est le faisceau des solutions de l'équation $df = 0$, et la cohomologie $H^*(X, \mathbf{C})$ est celle du complexe de De Rham

de la différentielle extérieure opérant sur les formes différentielles; si X est une variété complexe, les fonctions holomorphes sont les solutions des équations de Cauchy-Riemann: $\bar{\partial}f = 0$, et la cohomologie $H^*(X, \mathcal{O}_X)$ à coefficients dans le faisceau $\mathcal{O}_X$ des fonctions holomorphes est celle du complexe de Dolbeault, de la différentielle extérieure antiholomorphe $\bar{\partial}$. Le Laplacien, ou plus généralement l'opérateur de Laplace-Beltrami opérant sur les formes différentielles d'une variété Riemannienne, est un exemple plus ancien d'opérateur elliptique; il est subordonné à l'exemple précédent: $\Delta = -d d^* + d^* d$.

On définit le symbole d'un opérateur, ou d'un complexe d'opérateurs différentiels: si P est d'ordre m son symbole est le polynôme σ_P homogène de degré m qu'on obtient en ne gardant que les termes de plus haut degré m lorsqu'on écrit P comme polynôme des dérivations $\partial/\partial x_j$, dans n'importe quel système de coordonnées. On a, pour toute fonction C^∞ φ et toute section u de E

$$e^{-t\varphi}P(e^{t\varphi}u) = t^m \sigma_P(d\varphi)u + O(t^{m-1})$$

plus généralement si (E, P) est un complexe d'opérateurs différentiels, σ_P s'interprète comme un complexe de fibrés vectoriels sur le fibré cotangent T^*X , de type $\pi^{-1}E \rightarrow \pi^{-1}E$, où π est la projection $T^*X \rightarrow X$ et $\pi^{-1}E$ désigne le relèvement de E à T^*X (dans la suite nous écrirons E au lieu de $\pi^{-1}E$). Si X est une variété réelle, on dit alors que P est elliptique si pour tout covecteur imaginaire pur $\xi \neq 0$, le symbole $\sigma_P(\xi)$ est une suite exacte d'espaces vectoriels¹. L'ellipticité est une propriété simple d'un système P qui, jointe à une condition de compacité du domaine sur lequel on calcule ces solutions (par exemple que la variété de base soit compacte), assure que les groupes de cohomologie sont de dimension finie. La dimension individuelle de chacun des groupes de cohomologie $H^j(P)$ d'un complexe elliptique P n'est pas stable par déformation ou par petite perturbation, et peut être difficile à calculer; mais l'indice, ou caractéristique d'Euler: $\chi(P) = \sum (-1)^j \dim H^j(P)$, est très stable, de même que la condition de finitude (ellipticité). Pour un système elliptique P il est alors naturel d'imaginer que l'indice ne dépend que de caractères topologiques plus grossiers du symbole σ_P , et est donné par une extension de formule analogue à la formule de Riemann-Roch. Les deux exemples ci-dessus (d et $\bar{\partial}$) sont elliptiques et le théorème de Riemann-Roch de la géométrie complexe apparaîtra ainsi comme cas particulier du théorème d'indice pour les systèmes elliptiques, appliqué à $\bar{\partial}$.

Comme nous l'avons mentionné la formule de l'indice pour les systèmes elliptiques est très stable par perturbation ou déformation, aussi n'est il pas essentiellement restrictif de se limiter aux systèmes elliptiques à coefficients analytiques: toute variété paracompacte X^2 possède une structure analytique réelle, et tout système elliptique sur X peut être déformé en un système à coefficients analytiques (une telle isotopie préserve l'indice, et, pour l'essentiel, les objets topologiques évoqués ci-dessus). Dans toutes ces notes nous supposons donc que les variétés considérées sont analytiques, et nous considérerons toujours une variété analytique réelle comme germe d'une variété complexe au voisinage d'une sous-variété U totalement réelle. Un inconvénient est que ce point de vue est plus rigide, et certaines constructions ou déformations topologiques sont moins faciles que dans le cadre C^∞ , mais elles ont le plus souvent un analogue grâce au fait que le faisceau des fonctions

¹ La définition complète qu'on reverra plus loin est la suivante: P est elliptique si la variété caractéristique $\text{car } P$ ne contient pas de covecteur imaginaire pur (ou réel) non nul; c'est le cas si $\sigma_P(\xi)$ est exact pour ξ imaginaire pur non nul.

² Dans la suite les variétés que nous considérerons seront toujours paracompactes et ce mot sera omis.

analytiques réelles est cohomologiquement trivial. Cet inconvénient est largement compensé par le fait que les systèmes d'équations différentielles à coefficients analytiques sont commodément décrits par la théorie des $\mathcal{D}$ -modules, qui est décrite au §3. On dispose pour les $\mathcal{D}$ -modules analytiques de notions raisonnables de finitude ou de cohérence, et d'image directe ou inverse par une application analytique, qui n'existent pas pour les systèmes à coefficients C^∞ . La notion d'image directe, que nous rappelons au §3, est essentielle dans notre description du théorème d'indice relatif. En particulier l'image directe par immersion fermée (plongement) permettra de plonger n'importe quel système dans une variété plus simple telle que $\mathbf{R}^n$ ou un espace projectif, de façon plus naturelle que dans l'article original d'Atiyah et Singer.

L'ellipticité n'est pas préservée par plongement, et on est amené à en généraliser la définition, en introduisant, suivant l'idée de B. Malgrange, la notion de presque-ellipticité qui est décrite au §4. La presque-ellipticité est stable par image directe et donne lieu aux mêmes théorèmes de finitude, et au même théorème d'indice que l'ellipticité. Mais elle s'applique dans plus de cas; en particulier un $\mathcal{D}$ -module holonôme est toujours presque-elliptique, et le théorème d'indice pour les modules holonomes est ainsi démontré dans le même cadre que celui des systèmes elliptiques.

Jusqu'à présent nous n'avons parlé que de solutions C^∞ ou analytiques réelle; on peut aussi étudier les solutions distributions, ou plus généralement à coefficients dans un faisceau F convenable. Suivant Schapira et Schneiders il sera commode d'incorporer au faisceau des coefficients la description du domaine dans lequel on calcule les solution, qui ne sera pas toujours X tout entier, ce qui sera particulièrement utile sur une variété X complexe où on est encore plus amené à varier le domaine. Dans les notes de Schapira-Schneiders, $F = \mathcal{O}_X \otimes \phi$ est associé à un faisceau réel-constructible ϕ . Ici en nous inspirant du travail de M. Ohana, nous nous limiterons au cas plus simple où F est le faisceau des germes de fonctions holomorphes au voisinage d'une sous-variété à bord (ou à coins) de X .

La formule de l'indice comportera ainsi plusieurs éléments:

- 1) un objet topologique décrivant des propriétés additives et invariantes par déformation d'un système différentiel elliptique P . Dans ces notes cet objet sera un fibré virtuel (à support) $[P]$, élément de $K_{\text{car } P}(T^*X)$, où $\text{car } P$ est la variété caractéristique de P ; on peut le remplacer par une classe de cohomologie à support, grâce au caractère de Chern comme mentionné plus haut.
- 2) un objet topologique $[F]$ décrivant de façon analogue les propriétés du faisceau de fonctions ou distributions F des coefficients dans lesquels on calcule les solutions. Ici, $[F]$ sera un élément de $K_{\text{SS } \phi}(T^*X)$ où $\text{SS } \phi$ est le micro-support de ϕ défini par Kashiwara et Schapira.
- 3) une formule universelle produisant à partir de ces données, et moyennant une condition supplémentaire de compacité, un nombre (ou plus généralement un fibré virtuel ou une classe de cohomologie sur l'espace des paramètres, dans le cas relatif). La condition de compacité est que $\text{car } P \cap \text{SS } \phi$ soit compact, ce qui complète la condition d'ellipticité: $\text{car } P \cap \text{SS } \phi \subset \{0\}$ (on a noté $\{0\}$ la section nulle). Le produit $[P][F]$ est alors bien défini, à support compact et le théorème d'indice affirme que l'indice de P (à coefficients dans F) en est l'image K -théorique (définie au §2).

Le premier ingrédient de notre démonstration est la K -théorie, qui est décrite au §2. Le deuxième ingrédient est la théorie des $\mathcal{D}$ -modules. La presque-ellipticité et le théorème d'indice dans la cas absolu sont décrits au §4, et le cas relatif au §5.

§2. K -THÉORIE ET OPÉRATEURS DE TOEPLITZ**2.1 Rappels de K -théorie.****a. Définitions.**

Soient X un espace topologique paracompact, $Z \subset X$ une partie fermée (ou plus généralement une famille de supports³). Nous renvoyons à Atiyah ou Steenrod pour la définition des fibrés vectoriels sur X . Nous nous intéressons aux morphismes $a : E \rightarrow F$ de fibrés vectoriels complexes sur X tels que a soit un isomorphisme en dehors de Z , et plus généralement aux complexes de fibrés vectoriels exacts en dehors de Z . On note $K_Z(X)$ le groupe des classes d'équivalence $[a]$ de tels complexes a pour la relation d'équivalence engendrée par les relations:

- (i) $[a] + [b] = [a \oplus b]$
- (ii) $[a] = 0$ s'il existe une déformation exacte en dehors de Z de a sur un complexe exact.

On note encore $K(X) = K_X(X)$. Si a et b sont des complexes de fibrés on a $[a] = [b]$ si et seulement s'il existe un complexe exact c et une déformation exacte en dehors de Z de $a \oplus c$ sur $b \oplus c$; en particulier on a $[a] = [b]$ si a et b sont quasi-isomorphes, en particulier s'il existe un morphisme $a \rightarrow b$ qui induise un isomorphisme en cohomologie. Muni de la loi ci-dessus $K_Z(X)$ est un groupe; on a $-[a] = [a^*] = [a(1)]$ où $a(1)$ désigne le complexe décalé (a_{k-1}) si $a = (a_k)$ et a^* désigne l'adjoint de a (pour n'importe quelles métriques hermitiennes).

Le produit tensoriel de deux complexes a et b $((a \otimes b)_k = \oplus_p (a_p \otimes 1 + (-1)^p 1 \otimes b_{k-p}))$ est exact en tout point où un des deux facteurs l'est; par passage au quotient on définit ainsi une loi de produit bilinéaire $K_Z(X) \times K_{Z'}(X) \rightarrow K_{Z \cap Z'}(X)$ pour laquelle $K_X(X) = K(X)$ est un anneau et les $K_Z(X)$ sont des $K(X)$ -modules.

Soit H un espace de Hilbert. On note $\text{Fred}(H) \subset L(H)$ l'ensemble des opérateurs de Fredholm. Si $X \supset Z$ sont comme plus haut on note $F_Z(X)$ le groupe des classes d'homotopie de fonction continues $A : X \rightarrow \text{Fred}(H)$ telles que A soit inversible en dehors de Z . Parce que $GL(H)$ est contractile (th. de N. Kuiper) $F_Z(X)$ s'identifie aussi au groupe des classes d'homotopie de familles continues d'opérateurs de Fredholm sur un fibré hilbertien (un tel fibré est toujours trivial). Une telle famille peut toujours être considérée comme un complexe de longueur 2 et de cette façon $F_Z(X)$ s'identifie aussi au groupe des classes d'homotopie de complexes de Fredholm hilbertiens exacts en dehors de Z (c'est à dire de complexes de fibrés hilbertiens dont la cohomologie est de dimension finie en tout point et nulle en dehors de Z ; deux tels complexes sont équivalents s'il existe une déformation du premier sur le second, exacte en dehors de Z). De fait si

$$(2.1) \quad D : \cdots \longrightarrow H_k \longrightarrow H_{k+1} \longrightarrow \cdots$$

est un tel complexe, et qu'on note $[D]_Z$ (ou simplement $[D]$) sa classe dans F_Z , on montre élémentairement, par récurrence sur la longueur de D , qu'on a $[D] = [\partial(D)]$ si $\partial(D)$ est la famille d'opérateurs de Fredholm:

$$(2.2) \quad \partial(D) = D - D^* : \oplus H_{2k} \longrightarrow \oplus H_{2k+1}.$$

³ On notera K_c la K -théorie à support compact. Atiyah suppose toujours que le support Z est compact (ou contenu dans la famille des parties compactes). Nous avons omis cette condition, inutile au niveau des définitions, et qui ne sera jamais réalisée dans ces notes où X est un fibré cotangent, et Z partie conique de X .

Un complexe de fibrés vectoriels de rang fini sur X est un cas particulier de complexe de Fredholm (on peut toujours rajouter un complexe hilbertien exact de dimension infinie). On a donc une application canonique du groupe $K_Z(X)$ des fibrés virtuels à support dans Z dans $F_Z(X)$. On montre élémentairement (cf. Jänisch) que si Z est compact, ou si X est métrique de dimension finie⁴, cette application est bijective; c'est en particulier le cas si (X, Z) est une paire d'espaces analytiques ou sous-analytiques, ou une paire de CW-complexes, ce qui suffit largement pour les formules d'indice. Dans ce cas on note Ind_Z l'isomorphisme inverse $\text{Ind}_Z(A) \rightarrow K_Z(X)$ l'élément correspondant à un complexe de Fredholm A exact hors de Z : $\text{Ind}_Z(A) = [a]$ signifie qu'il existe une déformation B de A et un quasi-isomorphisme $a \rightarrow B$.

b. Produits.

La somme et le produit tensoriel de complexes munissent $F(X) = F_X(X)$ d'une structure d'anneau et $F_Z(X)$ d'une structure de $F(X)$ -module qui prolongent celles de $K(X)$ et $K_Z(X)$ (on a $A \oplus B \sim A \circ B$, et $A \otimes B$ est un complexe de Fredholm si A et B le sont, et est exact en tout point où l'un des deux complexes A ou B l'est).

Pour $Z \subset Y \subset X$ (fermés) on a encore un produit $F_Z(Y) \otimes F_Y(X) \rightarrow F_Z(X)$ défini comme suit: si A (resp. B) est une famille continue d'opérateurs de Fredholm sur Y (resp. X) inversible hors de Z (resp. Y), on choisit un prolongement continu $\tilde{A}: X \rightarrow L(H)$ de A ; comme B est exact hors de Y , le produit $\tilde{A} \otimes B$ l'est aussi, et en particulier c'est un complexe de Fredholm hors de Y ; sur $Y - Z$ il est exact comme A ; enfin il est Fredholm sur Z puisque A et B le sont; l'ensemble des prolongements de A est connexe (en fait convexe) donc la classe $[\tilde{A} \otimes B]$ ne dépend pas du choix du prolongement $\tilde{A}$.

c. Images inverses.

Soit $f: X' \rightarrow X$ continue, et $Z' \subset X'$ fermé, $f(X' - Z') \subset X - Z$. L'image inverse $F_Z(X) \rightarrow F_{Z'}(X')$ est définie par $f^{-1}[A] = [A \circ f]$. Si f est l'application identique d'un ouvert X' de X , et $Z = X$, f^{-1} est un isomorphisme (excision), parce que $GL(H)$ est contractile donc toute famille continue B d'opérateurs de Fredholm sur X' inversible hors de Z se déforme en une famille égale à 1 hors d'un voisinage de Z , qui se prolonge.

Si $U \subset X$ est un voisinage de Z , l'application de restriction $F_Z(X) \rightarrow F_Z(U)$ (image inverse par l'inclusion canonique $U \rightarrow X$) est un isomorphisme, parce qu'une application $a: U \rightarrow L(H)$ égale à 1 en dehors d'un voisinage de Z se prolonge continûment par 1 sur $X - U$, (théorème d'excision).

2.2 Indice d'une famille d'opérateurs de Toeplitz. Isomorphisme de Bott (Thom-Gysin).

a. homomorphisme de Bott.

X désigne un espace topologique comme ci-dessus. Soit $p: N \rightarrow X$ un fibré vectoriel complexe sur X . On note k_N le complexe de Koszul de N^5 :

$$(2.3) \quad k_N: \cdots p^{-1} \wedge^{-k} N^* \rightarrow p^{-1} \wedge^{-k+1} N^* \rightarrow \cdots N^* \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0 \quad (k_N \text{ est en degrés } \leq 0)$$

⁴ $\dim X \leq d$ signifie ici que tout recouvrement ouvert peut être raffiné en un recouvrement pour lequel l'intersection de $d+2$ ouverts distincts est vide. Pour le deuxième isomorphisme il faut accepter pour la définition de K_Z des fibrés localement mais non globalement de rang borné.

⁵ Le complexe de Koszul est aussi défini pour un fibré réel, mais ne donne plus lieu dans le cas réel à un "isomorphisme de Bott" (la période des groupes d'homotopie stables du groupe orthogonal réel est 8).

dont la différentielle au point $n \in N$ est le produit intérieur $\omega \rightarrow n \lrcorner \omega$. Ce complexe est exact en dehors de la section nulle de N , que nous identifierons encore à X , et la multiplication par $[k_N] \in K_X(N)$ définit pour tout $Z \subset X$ fermé un homomorphisme

$$(2.4) \quad b_{N/X} : K_Z(X) \longrightarrow K_Z(N)$$

(comme on verra ci-dessous b_N ne dépend en fait que de la structure spin^c associée à la structure complexe de N , qui est bien définie à homotopie près).

Le théorème de périodicité de Bott (voir encore ci-dessous) implique que b_N est un isomorphisme lorsque $X = Z$ et X est compact. En fait c'en est toujours un lorsque X est de dimension finie; nous admettrons ce résultat, qui se démontre de façon élémentaire — la présence du support Z complique un peu la situation parce que $X - Z$ n'est pas compact même si X et Z le sont. L'inverse de l'homomorphisme de Bott est donné par l'indice des familles d'opérateurs de Toeplitz, que nous décrivons maintenant, et qui est un ingrédient essentiel de la formule de l'indice.

b. Indice d'une famille d'opérateurs de Toeplitz.

Dans ce qui suit nous supposons le fibré N trivial: $N = X \times \mathbf{C}^k$ (le cas général où N est un fibré vectoriel de rang fini quelconque se ramène au cas où N est trivial, du moment que N est complémenté, i.e. qu'il existe un fibré N' tel que $N \oplus N'$ soit trivial).

Soit B un ellipsoïde de $\mathbf{C}^k$, par exemple la boule unité, par exemple l'ellipsoïde B_ε défini par l'inégalité $|\operatorname{Re} z|^2 + \varepsilon^{-2} |\operatorname{Im} z|^2 \leq 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Un opérateur de Toeplitz de degré 0 sur B est un opérateur linéaire continu sur l'espace $\mathcal{O}^0(B)$ ⁶ des fonctions holomorphes de carré sommable sur B , de la forme $A = T_a +$ opérateur compact, où a est une fonction continue sur ∂B , T_a est l'opérateur $u \rightarrow B(au)$, et B le projecteur de Bergman $L^2(B) \rightarrow \mathcal{O}^0(B)$ (cf. Boutet de Monvel 1). Modulo les opérateurs compacts A ne dépend que de son symbole $a|_{\partial B}$ et on a : $T_a T_b \sim T_{ab}$.

On a une notion de famille continue d'opérateurs de Toeplitz paramétrée par X , dont le symbole est une fonction continue sur $X \times \partial B$, et plus généralement d'opérateur de Toeplitz de type $E \rightarrow F$ où E et F sont deux fibrés vectoriels sur X , ou de complexe d'opérateurs de Toeplitz paramétré par X , dont le symbole est un complexe de fibrés sur $X \times \partial B$. Rappelons que A est elliptique si son symbole est exact; c'est alors un complexe de Fredholm.

Nous dirons encore que A est *basique* s'il est de la forme T_a où a ne dépend que de la variable $x \in X$, autrement dit si pour chaque $x \in X$ A_x est l'opérateur $f \rightarrow a(x)f$. Pour tenir compte des supports on introduit la définition suivante:

Définition 2.1. On appelle famille admissible (relativement à Z) d'opérateurs de Toeplitz elliptiques un couple (A, A^t) ($0 \leq t \leq 1$), où A est une famille elliptique d'opérateurs de Toeplitz d'ordre 0 (de type $E \rightarrow F$) sur B , paramétrée par X , inversible hors de Z , et A^t est une homotopie d'opérateurs de Toeplitz inversibles paramétrés par $x \in X - Z$ reliant $A^1 = A|_{X-Z}$ à une famille basique A^0 .

Une famille d'opérateurs de Toeplitz inversible en dehors de Z , et en particulier une famille admissible, a un indice $\operatorname{Ind}_Z(A) \in K_Z(X)$.

⁶ Il y a beaucoup d'autres notations pour l'espace de Hardy; nous avons repris le cas $s = 0$ de la notation $\mathcal{O}^s$ utilisée dans Boutet de Monvel 3, inspirée de celle des espaces de Sobolev pour la théorie des opérateurs pseudodifférentiels tout en évitant la lettre H (qui représente trop d'autres choses par ailleurs).

Une famille admissible définit d'autre part un élément $[A]_Z \in K_Z(X \times B)$ comme suit: si (a, a^t) est le symbole de (A, A^t) on pose $a(x, tz) = a(x, z)$ si $t = 1$, $z \in \partial B$, resp. $a^t(x, z)$ si $t \leq 1$, $x \in X - Z$, $z \in \partial B$; a est ainsi bien défini sur $X \times \partial B \cup (X - Z) \times B$ (parce que a^0 est basique). Il définit donc un élément de la K -théorie de $X \times B$ à support dans $Z \times \bar{B}$, qui est égale à $K_Z(X \times B)$ (par déformation).

Si a est un complexe de fibrés vectoriels de rang fini sur X exact en dehors de N , son image $a \otimes k_N$ par l'homomorphisme de Bott définit un complexe d'opérateurs de Toeplitz $T_{a \otimes k_N}$ exact en dehors de X , qui se prolonge canoniquement en une famille admissible: $A_t = T_{a \otimes k_N}(tz)$.

Théorème 2.2. *On suppose X métrique de dimension finie. Alors*

- (i) *Tout élément $\xi \in K_{Z \times \{0\}}(X \times B)$ est de la forme $[A]_Z^{\text{top}}$ pour une famille admissible $A = (A_X, A^t)$ convenable.⁷*
- (ii) *Si $A = (A_X, A_X^t)$ est une famille admissible d'opérateurs de Toeplitz $\text{Ind}_Z(A)$ ne dépend que de $[A]_Z^{\text{top}}$.*
- (iii) *L'application $[A]_Z^{\text{top}} \rightarrow \text{Ind}_Z(A)$ de $K_{Z \times \{0\}}(X \times B)$ dans $K_Z(X)$ ainsi définie est l'inverse de l'homomorphisme de Bott.*

Les résultats i) et ii), ainsi que le fait que l'application canonique $K_Z \rightarrow F_Z$ soit un isomorphisme, se démontrent à partir de variantes du résultat suivant: si Y est de dimension finie et si A est une famille continue d'opérateurs de Fredholm sur un fibré hilbertien H , E un sous fibré de rang assez grand de H , il existe une déformation $A_t = A + q_t$, avec q_t compact, $q_0 = 0$ telle que A_1 soit injectif sur $E^\perp$ (la condition est $\text{rg}(E) \geq \text{Ind}(A) + \dim X$ en tout point); on peut dans une telle déformation ne rien bouger sur un ensemble fermé où A est déjà bon, ou forcer A_t à rester inversible sur un ensemble ouvert où A l'est.

Preuve de iii): si a est un complexe de fibrés sur X exact hors de Z , k le complexe de Koszul de $X \times B$, $k^t = k(x, tz)$, $A = T_{a \otimes k}$, $A^t = T_{a \otimes k^t}$, on a par construction $[A]_Z = [k][a] = b([a])$ et il est élémentaire de vérifier $\text{Ind}_Z(A) = [a]$ (l'injection canonique $a \rightarrow A$ est un quasi-isomorphisme). Ainsi l'application Ind_Z définie par i) ii) est inverse à gauche de l'homomorphisme de Bott b . Un argument de G. Segal montre alors simplement que c'est aussi un inverse à droite.

2.3 IMAGE DIRECTE

a. Structures spin^c .

Soit X comme ci-dessus, et soit N un fibré vectoriel réel de dimension paire sur X . Une structure spin^c ⁸ sur N est la donnée

- (i) d'une métrique euclidienne (continue) sur N

On note C_N l'algèbre de Clifford négative de N : fibré en $\mathbf{C}$ -algèbres $\mathbf{Z}_2$ -graduées sur X , engendré par le sous fibré vectoriel réel N et les relations $n \cdot n = -\|n\|^2$ pour $n \in N$.

- (ii) d'un C_N -module $\mathbf{Z}_2$ -gradué $\mathcal{S}_N = \mathcal{S}_N^+ \oplus \mathcal{S}_N^-$ (fibré), simple en tout point de X .

Si N est muni d'une structure spin^c , il est canoniquement orienté: une base orthonormale $e_1, e_2, \dots, e_{2n}$ de N_X ($\dim_{\mathbf{R}} N_X = 2n$) est orientée si $e_1 e_2 \cdots e_{2n} \xi = i^n \xi$ pour tout $\xi \in \mathcal{S}_{N_X}^+$.

⁷ Nous avons noté $\{0\}$ la section nulle de T^*X — aussi notée T_X^*X dans les notes de Schapira-Schneiders.

⁸ sur les structure spin^c on pourra aussi consulter l'article de Atiyah-Bott-Shapiro.

Les structures spin^c s'ajoutent: si N et N' sont munis de structures spin^c , $N \oplus N'$ est muni de la métrique somme, et de $\mathcal{S}_{N \oplus N'} = \mathcal{S}_N \otimes^g \mathcal{S}_{N'}$, produit tensoriel gauche, qui est un $C_{N \oplus N'}$ -module $\mathbf{Z}_2$ -gradué ($C_{N \oplus N'} \sim C_N \otimes^g C_{N'}$). Elles sont complémentées: si N est muni d'une structure spin^c , ainsi que $N' \subset N$ (N' muni de la métrique induite), l'orthogonal $N'' = N'^\perp$ est muni de la métrique induite et de $\mathcal{S}_{N''} = \text{Hom}_{C_{N''}}^{\text{gr}}(\mathcal{S}_{N'}, \mathcal{S}_N)$, qui en fait un $C_{N''}$ -module simple $\mathbf{Z}_2$ -gradué. C'est l'unique structure spin^c sur N'' pour laquelle N , avec sa structure spin^c , soit isomorphe à $N' \oplus N''$.

On peut alors parler de fibré spin^c virtuel et former le groupe K^{spin^c} analogue au groupe $K^{\text{réel}}$ des fibrés vectoriels virtuels; on a un homomorphisme $K^{\text{spin}^c}(X) \rightarrow K^{\text{réel}}(X)$.

Exemple. soit E un fibré vectoriel complexe de rang fini, muni d'une métrique hermitienne, et soit N le fibré réel sous-jacent. Alors N est muni d'une structure spin^c canonique, pour laquelle la métrique euclidienne est celle déduite de la métrique hermitienne de E , et

$$\mathcal{S}_N = \wedge_C E^* \quad (= \wedge_C^{\text{pair}} E^* \oplus \wedge_C^{\text{impair}} E^*)$$

où E^* désigne le dual de E , l'indice $(\cdot)_C$ signifie qu'il s'agit de l'algèbre extérieure complexe du fibré vectoriel complexe E ; la multiplication de Clifford est donnée par

$$n \cdot \omega = n \lrcorner \omega - n^* \wedge \omega$$

où $n \in N = E$, $\omega \in \mathcal{S}_N = \wedge E^*$, et $n^* \in E^*$ est l'élément correspondant à n par la métrique hermitienne ($\omega \rightarrow n^* \wedge \omega$ est adjoint de $\omega \rightarrow n \lrcorner \omega$).

Comme les métriques hermitiennes de E sont toutes homotopes la structure spin^c virtuelle définie par la structure ci-dessus ne dépend que de la structure complexe de E .

Le théorème de complémentation ci-dessus montre que si E est un fibré vectoriel réel sur X (pas virtuel), une structure spin^c virtuelle sur E (c'est à dire un élément de $K^{\text{spin}^c}(X)$) dont l'image dans $K^{\text{réel}}(X)$ soit $[E]$ provient d'une vraie structure spin^c sur E , unique à isomorphisme près. Il n'y a pas de résultat semblable pour les structures complexes.

La définition de l'isomorphisme de Bott: $K_Z(X) \rightarrow K_Z(N)$, que nous avons donnée lorsque N est un fibré complexe, se prolonge canoniquement au cas où N est un fibré réel muni d'une structure spin^c : c'est la multiplication par $[c_N]$ où $c_N : p^{-1}\mathcal{S}_N^+ \rightarrow p^{-1}\mathcal{S}_N^-$ est le morphisme de fibrés sur N défini par le produit de Clifford ($c_N = \delta(k_N)$) lorsque N est un fibré vectoriel complexe muni d'une métrique hermitienne; on voit que l'homomorphisme de Bott $b_{N/X} : [a] \rightarrow [c_N][a]$ de $K_Z(X)$ dans $K_Z(N)$ est un isomorphisme lorsque X est compact ou métrique de dimension finie en choisissant un supplémentaire de N c'est à dire un fibré spin^c N' tel que $N \oplus N'$ soit trivial — donc en particulier complexe — et en composant avec $b_{N \oplus N'/N}$.

b. Image directe K -théorique.

On définit alors l'image directe K -théorique $f_* : K_Z(Y) \rightarrow K_{Z'}(X)$ lorsque X et Y sont deux variétés, $f : Y \rightarrow X$ une application de classe C^1 propre sur Z , $Z' \supset f(Z)$, et f est muni d'une structure spin^c , i.e. on s'est donné une structure spin^c (virtuelle) sur le fibré normal (virtuel) $f^{-1}(TX) - TY$, par exemple une structure complexe virtuelle. Elle est caractérisée axiomatiquement par les conditions suivantes:

- (I1) Elle est covariante: $(fg)_* = f_* g_*$.
- (I2) Elle commute aux changements de base.
- (I3) Si X est un fibré vectoriel spin^c sur Y , f la section nulle, munie de la structure spin^c déduite de celle des fibres de X , on a $f_* = b_{X/Y}$ (isomorphisme de Bott).

La signification de (I2) est la suivante: soit un diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{G} & Y \\ F \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

où X, Y, X', Y' sont des variétés, f, g, F, G sont de classe C^1 , f et g sont transverses et Y' s'identifie au produit fibré $Y \times_X X'$, f est muni d'une structure spin^c et F de la structure spin^c qui s'en déduit. On se donne des fermés $Z \subset Y$, $Z' \subset Y'$, $T \subset X$, $T' \subset X'$ tels que $Z' \supset G^{-1}(Z)$, $T' \supset g^{-1}(T)$, $T \supset f(Z)$, $T' \supset F(Z')$. Alors on a $G^{-1}f_* = F_*g^{-1} : K_Z(Y) \rightarrow K_{T'}(X')$. En particulier l'image directe commute aux restrictions aux ouverts (cas où g et G sont des plongements ouverts); ainsi si $Y \subset X$ est ouvert $f : Y \rightarrow X$ est l'inclusion canonique munie de la structure spin^c triviale, $Z = T$ est fermé dans X , $f_* : K_Z(Y) \rightarrow K_Z(X)$ est l'isomorphisme d'excision.

Ceci étant l'image directe f_* est bien définie si f est une projection $Y = X \times \mathbb{C}^n \rightarrow X$, comme composé de l'homomorphisme de restriction $K_Z(Y) \rightarrow K_B(Y)$ où $B \supset Z$ est un fibré en boules de base T , de rayon assez grand, et de l'inverse de l'isomorphisme de Bott $K_B(Y) \rightarrow K_T(X)$. Dans le cas général f spin^c de classe C^1 est composée d'une telle application, d'un plongement ouvert, et de la section nulle d'un voisinage tubulaire spin^c , de sorte que f_* est bien défini par ces axiomes.

Remarque. dans Boutet de Monvel 1 nous avons aussi défini les opérateurs de Toeplitz de degré $\neq 0$, auxquels le théorème d'indice ci-dessus se généralise. Ainsi soit $E^k = \oplus_l E_l^k$ une famille de fibrés gradués sur X . Soit

$$D : \dots E^k \otimes \mathcal{O} \longrightarrow E^{k+1} \otimes \mathcal{O} \longrightarrow \dots$$

une famille de complexes d'opérateurs différentiels à coefficients holomorphes sur B . On suppose D de degré 0, i.e. D_{ij} est d'ordre $\leq i - j$ si (D_{ij}) est la matrice de D dans la décomposition $E^k = \oplus_l E_l^k$; en particulier $D_{ij} = 0$ si $i < j$, et dans ce cas D est exact comme complexe d'opérateurs différentiels ssi sa partie diagonale d'ordre 0 l'est en tout point de $Y = B \times X$.

Supposons D elliptique, exact hors de Z . Alors à D est canoniquement associée une famille admissible, qu'on construit en deux crans: 1) pour $1/2 \leq t \leq 1$ on pose $D^t = ((2t-1)^{i-j} D_{ij})$; c'est bien défini parce que $D_{ij} = 0$ si $i - j < 0$; $D^{1/2}$ est "diagonal", d'ordre 0. 2) pour $0 \leq t \leq 1/2$ on pose $D^t = D^{1/2}(2tz)$; D^0 est basique.

Le symbole $[D]_Z^{\text{top}}$ associé à cette famille peut encore être décrit ainsi: c'est l'élément de K -théorie associé à $\sigma_D(\eta)$, où η est une section de $X \times T^*B$ de direction voisine de celle de du au voisinage de $X \times \partial B$, où $u = 0$ est l'équation du bord ∂B (une description équivalente est donnée au n°3). Le théorème 2 est donc encore vrai dans ce cas: $\text{Ind}_Z(D) = p_*[D]_Z^{\text{top}}$.

§3. $\mathcal{D}$ -MODULES

Dans l'introduction nous avons rappelé ce qu'est un système différentiel sur une variété. En fait il est plus commode de décrire les systèmes à coefficients analytiques en termes de $\mathcal{D}$ -modules. Ce paragraphe contient un rappel des définitions concernant les $\mathcal{D}$ -modules qui forment un cadre naturel pour décrire les systèmes différentiels, et à peu près indispensable

pour décrire les opérations fondamentales (images directe ou inverse, etc.) au moyen desquelles s'énonce et se démontre le théorème d'indice dans le cas relatif. Le lecteur pourra aussi se reporter au séminaire Borel et al où ces objets sont décrits avec précision (dans un cadre algébrique), ainsi qu'aux livres de Sato-Kawai-Kashiwara, de Kashiwara 5, Schapira, et de Björk, ou au séminaire de Grenoble 1965 (Boutet de Monvel-Lejeune-Malgrange). Plusieurs opérations sur les $\mathcal{D}$ -modules représentent une superposition de nombreuses manipulations et sont commodément décrites en termes de complexes et de catégorie dérivée; nous renvoyons aux mêmes références pour cela, ainsi qu'à Verdier, Borel et al 2, et Kashiwara-Schapira 2.

3.1 $\mathcal{D}$ -Modules.

Soit X une variété analytique complexe, ou une variété analytique réelle, que nous considérerons toujours comme le germe d'une variété complexe au voisinage des points réels. On note $\mathcal{O}_X$, ou simplement $\mathcal{O}$, le faisceau des fonctions analytiques sur X et Ω_X , ou Ω , le faisceau des formes différentielles de degré maximum. On note $\mathcal{D}_X$ (ou $\mathcal{D}$) le faisceau des opérateurs différentiels sur X : $\mathcal{D}$ opère à gauche sur $\mathcal{O}$ et à droite sur Ω . $\mathcal{D}$ est muni d'une filtration croissante canonique, pour laquelle $\mathcal{D}_m$ est le sous-faisceau des opérateurs d'ordre $\leq m$, et pour laquelle le faisceau gradué $\text{gr } \mathcal{D}$ s'identifie au faisceau des sections de l'algèbre symétrique STX , ou au faisceau des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathcal{O}_X$ sur le fibré cotangent T^*X .

Le faisceau $\mathcal{D}$ est cohérent, autrement dit, pour tout homomorphisme de $\mathcal{D}$ -modules (à droite ou à gauche) $a : \mathcal{D}^p \rightarrow \mathcal{D}^q$, le faisceau $\ker a$ est localement de type fini sur $\mathcal{D}$. Rappelons qu'un faisceau M de $\mathcal{D}$ -modules⁹ (à droite ou à gauche) est cohérent s'il est localement engendré sur $\mathcal{D}$ par un nombre fini d'éléments soumis à un nombre fini de relations. Rappelons la définition des bonnes filtrations:

Définition 3.1. Une bonne filtration sur un $\mathcal{D}_X$ -module M à droite (ou à gauche) est une filtration croissante $M = \cup M_k = \cup F_k M$ telle que

- (F1) M_k est un $\mathcal{O}_X$ -module cohérent, nul pour $k \ll 0$.
- (F2) $M_k \mathcal{D}_p \subset M_{k+p}$, avec égalité si $k \gg 0$.

La filtration canonique $\mathcal{D} = \cup \mathcal{D}_k$ est bonne. Si un $\mathcal{D}$ -module M possède une bonne filtration il est cohérent car, si M est muni d'une bonne filtration, le gradué $\text{gr } M$ est un module gradué cohérent sur le faisceau $\text{gr } \mathcal{D}$ des fonctions polynomiales à coefficients analytiques sur T^*X . Inversement si M est un $\mathcal{D}$ -module cohérent, il possède localement de bonnes filtrations¹⁰. Dans la suite nous supposerons le plus souvent que les $\mathcal{D}$ -modules que nous considérerons possèdent une bonne filtration globale, sans nécessairement la préciser (modules globalement bien filtrables).

Définition 3.2. On appelle variété caractéristique de M et on note $\text{car } M$ le sous-ensemble analytique conique de T^*X support de $\text{gr } M$ pour une bonne filtration.

La variété caractéristique $\text{car } M$ ne dépend pas du choix d'une bonne filtration sur M , et est donc défini de façon globale (on peut aussi le définir comme support du faisceau $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{D}} M$ sur T^*X , où $\mathcal{E}$ est le faisceau des opérateurs microdifférentiels analytiques, pour lequel nous renvoyons à Sato, Kawai, Kashiwara; cette deuxième définition s'étend à n'importe quel

⁹ Dans la suite nous parlerons de $\mathcal{D}$ -module, en précisant au besoin s'il est à gauche ou à droite, et en omettant le mot faisceau

¹⁰ Il en possède aussi globalement s'il est "algébrique" ou holonôme régulier; mais on ne sait toujours pas si ce résultat d'existence globale est vrai en général.

faisceau de $\mathcal{D}$ -modules). Si P est un complexe de $\mathcal{D}$ -modules, on note $\text{car } P$ la réunion des variétés caractéristiques de ses faisceaux d'homologie.

Sato, Kawai et Kashiwara ont montré que $\text{car } M$ est toujours **involutif** lorsque M est cohérent, autrement dit si f et g sont différentiables et s'annulent sur $\text{car } M$, le crochet de Poisson $\{f, g\}$ s'annule aussi sur $\text{car } M$ ¹¹.

3.2 Lien avec les systèmes différentiels; solutions.

Dans la suite il sera commode de noter de la même manière les fibrés vectoriels et leurs faisceaux de sections. A un complexe d'opérateurs différentiels

$$(3.1) \quad p : \dots E^k \xrightarrow{p_k} E^{k+1} \longrightarrow \dots$$

où les E^k sont des fibrés vectoriels analytiques sur X on associe un complexe de $\mathcal{D}$ -modules à droite localement libres

$$(3.2) \quad P^d : \dots \longrightarrow \mathcal{E}^k \longrightarrow \mathcal{E}^{k+1} \longrightarrow \dots$$

où $\mathcal{E}^k = \text{Diff}(\mathcal{O}, E^k)$ est le faisceau des opérateurs différentiels de type $\mathcal{O} \rightarrow E^k$, la différentielle étant donnée en degré k par $Q \rightarrow p_k \circ Q$.

De même on associe à P un complexe de $\mathcal{D}$ -modules à gauche localement libres:

$$(3.3) \quad P^g : \dots \mathcal{E}'^k \rightarrow \mathcal{E}'^{k+1} \dots$$

où $\mathcal{E}'^k = \text{Diff}(E^{-k}, \mathcal{O})$ est le faisceau des opérateurs différentiels de type $E^{-k} \rightarrow \mathcal{O}$, et la différentielle en degré k est donnée par $Q \rightarrow Q \circ p_{-k-1}$.

Exemples 1. Soit $f : X \rightarrow Y$ une submersion. Notons T^*X/Y le fibré cotangent relatif. Le complexe de De Rham relatif $d_{X/Y}$ est le complexe

$$(3.4) \quad d_{X/Y} : 0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow T^*X/Y \longrightarrow \dots \wedge^k T^*X/Y \longrightarrow \wedge^{k+1} T^*X/Y \longrightarrow \dots$$

défini par la différentiation extérieure verticale. Il lui correspond un complexe de $\mathcal{D}_X$ -modules à droite (en degrés positifs) $\text{DR}_{X/Y}^d$, et un complexe de $\mathcal{D}_X$ -modules à gauche (en degrés négatifs) $\text{DR}_{X/Y}^g$. Le symbole de $d_{X/Y}$ est le complexe de l'algèbre extérieure

$$(3.5) \quad 0 \longrightarrow \mathbf{C} \longrightarrow T^*X/Y \longrightarrow \dots \wedge^k T^*X/Y \longrightarrow \wedge^{k+1} T^*X/Y \longrightarrow \dots$$

dont la différentielle au point $\eta \in T^*X$ est le produit extérieur $\omega \rightarrow \eta' \wedge \omega$, où $\eta' \in T^*X/Y$ est la partie verticale de $\eta \in T^*X$.

2. Si $\mathcal{M}$ est un complexe de $\mathcal{O}_X$ -modules, on lui associe le $\mathcal{D}_X$ -modules à droite

$$(3.6) \quad M = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X$$

¹¹ On rappelle que le crochet de Poisson est le crochet de Lie défini par $\{f, g\} = \sum \partial f / \partial \xi_j \partial g / \partial x_j - \partial f / \partial x_j \partial g / \partial \xi_j$ pour f, g fonctions différentiables sur T^*X (pour tout choix de coordonnées locales $x_1, \dots, x_n$ sur X , $\xi_1, \dots, \xi_n$ désignant les coordonnées duales dans les fibres de T^*X). On a $\sigma_{m+n-1}([P, Q]) = \{\sigma_m(P), \sigma_n(Q)\}$ si P et Q sont deux opérateurs différentiels d'ordres m, n et $\sigma_\bullet$ désigne le symbole (partie principale).