Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

1393

N. Bouleau D. Feyel

F. Hirsch G. Mokobodzki

Seminaire de Theorie du Potentiel Paris, No. 9

Springer-Verlag

TABLE DES MATIERES

L'OEUVRE DE MARCEL BRELOT (1903-1987)

par Gustave CHOQUET

Marcel Brelot nous a quittés le 3 Août 1987.

Il était, dans le monde entier, la figure la plus représentative de la Théorie du Potentiel. A Grenoble, il fut le véritable fondateur des "Annales de l'Institut Fourier" qui, sous son impulsion devint l'un des meilleurs Journaux mathématiques, bien connu de tous les potentialistes. A Paris, il fut l'un des membres fondateurs de notre Séminaire, et pendant longtemps son principal rédacteur.

Les pages qui suivent seront consacrées uniquement à son oeuvre scientifique, bien qu'il soit artificiel de séparer l'oeuvre d'un chercheur, de sa vie et de ses façons d'être. Je dirai seulement qu'il fut jusqu'à sa mort un grand travailleur et qu'il avait, de la recherche et de l'éthique du chercheur, une conception exigeante qu'il sut transmettre à ses élèves.

<u>SES TRAVAUX EN THEORIE DU POTENTIEL</u>. Soixante années de recherches ne se résument pas aisément, d'autant plus qu'une partie de ses résultats sont rapidement devenus classiques, se sont incorporés au "corpus" potentialiste, et ont subi des remaniements successifs. Je n'analyserai donc que les plus originales de ses contributions à une théorie qu'il commença à étudier environ 150 ans après que Lagrange eut reconnu, en 1773, que l'attraction newtonienne $\vec{u}/r^2$ par une masse ponctuelle au point O , était le gradient de la fonction $1/r$, et que Laplace eut reconnu l'harmonicité des potentiels hors du support des masses.

Quand Brelot arrive sur la scène potentialiste, des idées-clefs ont déjà été introduites en potentiel newtonien : Gauss d'abord (1840) puis avec plus de rigueur Dirichlet, Riemann et enfin Hilbert (1900) ont résolu par une méthode variationnelle utilisant une forme quadratique, les problèmes de l'équilibre, de Dirichlet et du balayage, du moins pour des données assez régulières. Perron (1923) et Wiener (vers 1924) ont introduit de nouvelles méthodes, plus linéaires, pour résoudre le problème de Dirichlet à donnée continue ; et Wiener a défini la capacité des compacts. Mais surtout, F. Riesz (1925 et 1930) a introduit, à partir de l'étude des fonctions $f(z)$, les fonctions surharmoniques (initialement, plutôt les sous-harmoniques) et montré que localement elles sont identiques à des potentiels de mesures ≥ 0 , à l'addition près d'une fonction harmonique.

C'est alors que Frostman et Brelot entrent en scène, toujours dans le cadre des potentiels newtoniens dans $\mathbb{R}^n$ (où $n > 2$) . Les outils de Frostman sont les mesures de Radon ≥ 0 et leur topologie vague, le principe de l'énergie et le principe du maximum ; il remarque d'ailleurs que ses méthodes s'appliquent aussi aux potentiels de M. Riesz. Les outils de Brelot sont fort différents, linéaires et non quadratiques ; ils lui ont été inspirés par son utilisation, dans sa thèse, des fonctions surharmoniques pour l'étude des solutions u de $\Delta u(x) = c(x)\ u(x)$ pour $c \geq 0$ et $u \geq 0$: Il étudie le balayage, non plus à partir des masses, mais des potentiels ou des fonctions surharmoniques, ne revenant aux masses qu'à la fin des opérations sur ces fonctions.

Son <u>théorème de convergence</u> (1938). Il démontre que dans un domaine, la limite d'une suite décroissante (f_n) de fonctions surharmoniques coïncide, soit avec $-\infty$, soit avec une unique fonction surharmonique, hors d'un ensemble E de capacité <u>intérieure</u> nulle. Le mot "intérieure" devait être, en 1942, remplacé par "extérieure" par H. Cartan.

Le <u>Problème de Dirichlet</u> (1939). Brelot lui donne une forme définitive en le posant pour une donnée frontière g quelconque, et non plus continue comme chez Perron-Wiener. La donnée g est <u>résolutive</u> ssi g est μ-intégrable pour la mesure harmonique μ associée à un point du domaine.

<u>Capacité extérieure ; ensemble polaire ; effilement</u> (1939, 40, 41). Presque simultanément il introduit la notion de capacité extérieure (ce que feront aussi indépendamment Beurling et Monna) et de quasi-partout (d'où aussitôt le problème de la capacitabilité des ensembles boréliens). Puis la notion d'ensemble polaire, défini comme ensemble sur lequel au moins une fonction surharmonique vaut $+\infty$; ce n'est que plus tard que H. Cartan montrera que $(X \text{ polaire}) \Longleftrightarrow (C^*(X) = 0)$.

La notion d'ensemble E effilé en un point $a \in \overline{E}$ était plus cachée ; il la définit ainsi :

(E effilé en a) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (il existe f surharmonique au voisinage de a telle que $\liminf\limits_{x \neq a, x \to a, x \in E} f(x) > f(a)$.

Cette condition peut aussi s'exprimer en disant que a est un point isolé de l'adhérence de $E \cup \{a\}$ pour la topologie définie plus tard par Cartan, i.e. la moins fine des topologies qui rendent continus tous les potentiels.

Brelot montre que pour un point frontière a d'un domaine ω , <u>l'irrégularité</u> de a pour le problème de Dirichlet équivaut à l'effilement de $\complement\omega$ en a .

Extrémisation, réduite (1944). Dans plusieurs mémoires successifs, Brelot met en place sa méthode favorite, celle de l'extrémisation : Si $X \subset \overline{X} \subset \omega$ ouvert, et f surharmonique sur ω, l'extrémisée de f par rapport à X est la plus petite fonction surharmonique g telle que $g \geq f$ quasi-partout hors de X. Brelot montre l'existence de cette extrémisée ; il en résulte par exemple que l'ensemble des points d'un ensemble Y où Y est effilé est polaire.

De façon analogue et plus générale, il définit aussi la réduite associée à une fonction $f \geq 0$ quelconque.

Etudes à la frontière et frontière ramifiée. Une des préoccupations constantes de Brelot depuis les années 40 a été l'étude du comportement des fonctions surharmoniques dans un ouvert ω, de complémentaire non polaire, au voisinage de la frontière. Il était un maître dans ce domaine ; lui et Doob y ont obtenu, avec des méthodes différentes, des résultats très fins qui seront difficilement dépassés.

Cette étude était liée à la ramification de la frontière dans le sens des précurseurs Evans, Perkins, de la Vallée Poussin qui avaient, eux, surtout étudié le cas du plan avec l'outil des fonctions analytiques. Brelot y consacra de nombreux travaux, inspirés en partie par la célèbre frontière Martin (1941) dont les points sont définis au moyen des fonctions harmoniques ≥ 0, extrémales dans le convexe compact des fonctions harmoniques ≥ 0 prenant la valeur 1 en un point fixé. Cette préoccupation le conduisit à son étude (avec Choquet) des "Espaces et lignes de Green" qui englobent les surfaces de Riemann classiques, et à l'introduction de diverses distances sur ω, par exemple la distance géodésique.

Dans les problèmes de Dirichlet ramifiés s'introduisent un effilement "minimal" et des limites fines aux points frontière ramifiés (voir aussi Naīm).

Les espaces harmoniques de Brelot (1957-58). Dès les années de guerre (1939-45), inspiré par des exposés de Bourbaki, Brelot rêvait d'unifier par une axiomatique l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques ; mais les fervents de l'axiomatisation eux-mêmes l'en avaient détourné. Puis Tautz (1949) et Doob (1954) proposèrent deux axiomatiques, d'inspiration probabiliste chez ce dernier. Pour Brelot, elles manquaient d'élégance ou de généralité, mais elles lui apportèrent une nouvelle motivation ; il travailla, tailla, simplifia, avec le souci de construire une axiomatique adaptée aux opérateurs elliptiques, tout en étant assez riche pour qu'on puisse y définir en termes primitifs les notions de la théorie newtonienne et y démontrer les mêmes théorèmes clefs.

Le miracle est qu'il réussit à atteindre ces deux objectifs ; celà explique la masse des travaux suscités par son axiomatique, et ayant pour but soit l'étude de l'axiomatique elle-même et de ses applications, soit des extensions de cette axiomatique. Pour la définir, le mieux est encore de citer Brelot (1957-58) :

"Dans un espace topologique Ω localement compact mais non compact, connexe et localement connexe, on donne sur chaque ouvert un espace vectoriel de fonctions réelles finies continues dites harmoniques, satisfaisant aux axiomes suivants (de caractère local).

1) (Axiome de faisceau). Toute fonction harmonique dans un ouvert ω est harmonique dans tout ouvert partiel, et inversement toute fonction localement harmonique dans ω est harmonique dans ω.

Appelons maintenant <u>régulier</u> tout ouvert relativement compact ω tel que toute fonction réelle finie continue f sur $\partial\omega$ se prolonge continuement dans ω de façon unique selon une fonction harmonique qui est ≥ 0 si $f \geq 0$.

On peut maintenant énoncer le second axiome.

2) (Axiome de résolubilité locale du problème de Dirichlet).L'espace Ω possède une base d'ouverts réguliers.

3) (Axiome de convergence). Toute suite croissante (f_n) de fonctions harmoniques dans un domaine ω a partout pour limite $+\infty$, ou a une limite harmonique."

Ces axiomes permettent déjà de définir les fonctions surharmoniques, les potentiels, les ensembles polaires, et de retrouver une grande partie des théorèmes de la théorie newtonienne, y compris (Mme Hervé), avec la théorie des éléments extrémaux, une représentation intégrale des fonctions harmoniques ≥ 0, du type Riesz-Martin.

Si l'on ajoute un 4° axiome, à savoir qu'il existe dans Ω au moins un potentiel > 0, on retrouve le théorème de résolubilité de Brelot dans le problème de Dirichlet ; enfin un axiome dit de "domination" permet de retrouver le grand théorème de convergence de Brelot-Cartan.

Plus tard (1962) Heinz Bauer élargit la théorie de Brelot en affaiblissant l'axiome 3 de convergence, de façon à englober l'équation de la chaleur ; et en 1965-1972, Constantinescu et Cornea développent un schéma, en un certain sens final, de la théorie locale du potentiel, tout en n'ayant plus, évidemment, la simplicité de l'axiomatique Brelot.

Je vois deux raisons à l'attrait de cette dernière, en plus de sa simplicité : 1) D'abord la transparence qu'elle apporte aux notions de base et aux démonstrations, même dans le cas classique ; les ressorts qui sous tendent la théorie deviennent évidents ; dès qu'on a vérifié que les axiomes sont satisfaits, ce qui est souvent élémentaire, la structure euclidienne de l'espace et les propriétés différentielles des fonctions en jeu n'interviennent plus. 2) Ensuite la grande généralité des espaces de Brelot : Ils vont des réseaux électriques, de dimension 1 ou plus (Lumer) à des espaces contenant des tores de dimension infinie (Berg 1976), en passant par des ouverts euclidiens munis d'un opérateur elliptique, éventuellement dégénéré.

Comme toute bonne axiomatique, celle de Brelot permet une grande économie de pensée. Une brève revue des principaux exemples connus s'impose ici :

1. (R.M. Hervé 1962, puis en collaboration avec M. Hervé). J'énoncerai seulement un cas particulier de ses résultats :

Sur l'ouvert Ω euclidien, soit L un opérateur uniformément elliptique (i.e. minoré et majoré par un $k\Delta$) de la forme $\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\sum_j a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j})$, où les coefficients a_{ij} sont lebesgue-mesurables bornés. Alors les solutions u de $Lu = 0$ au sens des distributions sont continues et vérifient l'axiomatique Brelot. Ceci permet de compléter des résultats antérieurs difficiles de Stampacehia (1964).

2. (Bony 1967 et 1969). Soit L un opérateur différentiel linéaire sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, de la forme canonique $(\Sigma X_i^2 + Y + c)$ tel que l'algèbre de Lie engendrée par les coefficients de X_i (resp. des X_i et Y) soit du rang maximum n ; alors les fonctions L-harmoniques vérifient l'axiomatique Brelot (resp. Bauer).

Ces conditions sont presque nécessaires (Bony) si l'on se restreint à un sous-ouvert dense de Ω .

3. (Krylov et Safonov, exposé dans l'édition récente du livre de Gilbarg et Trudinger, "Elliptic partial differential equations of second order" chez Springer.

Soit L un opérateur uniformément elliptique sur Ω dont les coefficients dans la forme ordinaire de L sont seulement continus ; alors les fonctions L-harmoniques vérifient l'axiomatique Brelot (Les auteurs démontrent seulement que des inégalités de type Harnack existent ; mais à partir de là on vérifie les axiomes de Brelot).

Brelot et la théorie locale du potentiel. Les deux Notices historiques de Brelot, la seconde surtout, montrent bien l'intérêt qu'il portait à la théorie non-locale du potentiel. Il admirait tout spécialement le lien spectaculaire établi par G. Hunt (1957, puis 58, 66) entre cette théorie et celle des martingales et processus de Markov. Il en comprenait parfaitement l'agencement interne ; un moment même il envisagea de recommencer vers les probabilités le même effort qu'il avait fait en 1945 et 1955 vers la topologie. Mais, pris d'abord par le développement de son axiomatique dont la formulation est d'ailleurs presque contemporaine des travaux de Hunt, puis conscient ensuite qu'il serait trop tard pour devenir un Maître dans une discipline toute nouvelle pour lui, il préféra - sans doute avec sagesse - utiliser sa maîtrise exceptionnelle de la surharmonicité et de l'extrémisation pour achever son oeuvre dans la théorie locale que personne n'a dominée comme lui.

Cette théorie (faut-il le répéter à des potentialistes ?) était bien digne qu'on lui consacre toute une vie ; depuis deux siècles elle a été un ferment de l'Analyse où, à la fois elle a été la matrice d'où sont sorties des théories nouvelles, et le banc d'essai d'autres théories naissantes ; on peut affirmer que pendant deux siècles, la plupart des grands Analystes lui ont consacré une part importante de leur oeuvre.

Matrice, elle l'a été pour les méthodes variationnelles, (intégrale de Gauss $\int(U^{\mu} - 2f)d\mu$ ou de Dirichlet $\int(\text{grad.}u)^2\,dx)$, pour les distributions, pour la théorie des capacités.

Banc d'essai, pour la théorie de Fredholm, l'intégrale de Lebesgue, les mesures de Radon (Frostman), la représentation intégrale dans les cônes faiblement complets.

Le champ de ses applications n'a pas cessé de s'étendre : opérateurs elliptiques, fonctions de plusieurs variables complexes. Elle sait utiliser les jeunes théories qu'elle vient d'engendrer : à peine nées les distributions donnent une belle caractérisation des fonctions surharmoniques par la condition $\Delta T \leq 0$, et trouvent dans la thèse de Deny leur première utilisation substantielle ; et l'interprétation probabiliste de la théorie générale fournit, avec ses trajectoires continues de type brownien, un nouvel outil puissant d'étude de l'effilement, des points frontière, de la capacité, en même temps qu'une nouvelle vision intuitive des êtres potentialistes.

Cet aspect probabiliste, que Brelot regrettait tant d'être arrivé trop tard pour maitriser, est sans doute le plus bel exemple d'interaction féconde entre deux théories : La théorie du potentiel, née dans le ciel (Kepler 1618, Newton 1665) et la théorie des probabilités née d'un coup de dés (Pascal 1654), donc presque simultanément, devaient après trois siècles et des petits pas l'une vers l'autre (Wiener 1923, puis P. Levy, Doob), prendre avec G. Hunt (1957) pleinement conscience que leurs parties les plus vivaces ne sont que deux faces complémentaires d'un même bel objet, et qu'on ne peut bien comprendre l'une sans connaître l'autre (le traité Dellacherie-P.A. Meyer veut en donner la preuve).

"Ainsi ne se ralentit pas la fécondité d'une théorie qui, après avoir compté tant de noms illustres, reste un centre dans l'Analyse contemporaine" (Brelot, fin de sa 1ère Notice historique).

Le Curriculum vitae et la liste des travaux scientifique de Brelot qui suivent sont dûs à Brelot lui-même.

Ont été déposés aux Archives de l'Académie des Sciences :
- "Analyse sommaire des travaux", par Brelot lui-même.
- Un "Rapport sur les travaux de Marcel Brelot", par H. Cartan.

Voir aussi :
- Sa Notice nécrologique, Annuaire E.N.S. 1988 ou 89 par Choquet et Dieudonné.
- Une brève Notice dans la Vie des Sciences de l'Académie 1989 ou 90.
- Une Notice plus détaillée sur sa Vie et son oeuvre dans "Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques", Paris.

NOM : BRELOT Marcel, Emile.

Lieu et date de naissance - Curriculum vitae résumé.
Titres et responsabilités successives.

- CHATEAUNEUF S/LOIRE (Loiret 45) le 29 Décembre 1903.

- Mathématiques spéciales à Saint-Louis.
- Ecole Normale Supérieure 1924-27 - Agrégation 1927.
- Boursier Arconati Visconti 1927-29.
- Boursier Rockefeller à Rome puis Berlin 1929-31.
- Chargé de Recherches C.N.R.S. 1931-33.
- Thèse 1931.
- Chargé de cours à la Faculté des Sciences d'Alger (1933), puis Maître de conférences.
- Titulaire à Bordeaux (1936), à Grenoble (1942), à Paris (1953).
- Secrétaire du Comité Français de l'Union Mathématique Internationale.
- Président de la S.M.F. (1960), Correspondant de l'Académie (1974).
- Séjours à l'Etranger.

Situation de famille :

- Marié en 1933 à Alice Bautrant, 2 enfants : fille Claude CROZIER
  fils Alain, Docteur en physique, maître assistant, décédé en 1974.

Décorations, appartenance à des académies étrangères, distinctions et prix, etc.

- Chevalier de la Légion d'Honneur.
- 4 prix de l'Académie des Sciences : Francoeur (1939), Saintour (1945) Carrière (1952) et Servant (1968).
- Correspondant de l'Académie des Sciences de Bavière.
- Expert de l'UNESCO et professeur à Buenos Aires (été 1968).
- Membre honoraire de l'Union Mathématique argentine (1968).
- Membre du Comité des Sociétés Savantes (C.T.H.S.).

Discipline sçientifique. Thèmes scientifiques abordés et résumé de l'oeuvre scientifique (énumération des apports principaux en matière de recherche et applications). Principaux ouvrages.

- Analyse mathématique, surtout théorie du potentiel, environ 150 articles ou ouvrages.

Principaux ouvrages :

1959, cours du C.D.U. 4 éditions, traduit en russe.
1960, 1er cours du Tata Institute ; 2ème cours en 1966 dans Lecture Notes 175, traduit en russe.

1965, Cours d'été de l'Université de Montréal : Axiomatique des fonctions harmoniques.

- Approfondissement de la théorie du balayage (notions de réduite et balayée d'une fonction).
- Résultat définitif sur le problème de Dirichlet (théorème de résolutivité par la méthode dite P.W.B. méthode (Perron-Wiener-Brelot)).
- Notion d'effilement, traduite par Cartan en termes de "topologie fine" ; notions de base donnant lieu à des recherches multiples.
- Théorème de convergence des fonctions surharmoniques, où intervient un ensemble exceptionnel de capacité "intérieure" nulle, qui a été montré par Cartan de capacité "extérieure" nulle ; forme définitive fondamentale.
- Notion d'ensemble polaire introduite pour remplacer les ensembles de capacité intérieure nulle, et que Cartan à montrée identique à la notion d'ensemble de capacité extérieure nulle. Résolutivité avec la frontière de Martin.
- Axiomatique des fonctions harmoniques, complétée, généralisée par de nombreux auteurs. A la base, inspirée par un travail probabiliste de Doob. Devenue une source de travaux multiples.

Je me suis occupé un peu de mécanique (petit ouvrage axiomatique de mécanique classique), des fonctions de Gilbert et spirale de Cornu à propos de problèmes de diffraction large, de questions de théorie des erreurs à propos de statistiques de pêche.

Autres informations jugées désirables (activités divers, etc.).

- Organisation du cours d'été italien de Strésa (1969) (CIME).
- Fondateur avec Choquet-Deny du séminaire parisien de théorie du potentiel.
- Fondateur avec Néel des Annales de l'Institut Fourier à Grenoble.
- Devenu titulaire à Paris de la chaire d'Analyse Supérieure.

- Nombreux séjours à l'Etranger : Conférences et Enseignements comme visiting professeur, un ou plusieurs mois :
- U.S.A. et Canada (10 Universités).
- Inde, Tata Institute 1959 et 1966.
- Japon 1962.
- Argentine 1968.

Date et signature.
23 Janvier 1985.

LISTE DES TRAVAUX SCIENTIQUES

I. - Quelques rédactions ou traductions vers 1930.

de E. PICARD — Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles (Cahiers scientifiques V).

V. VOLTERRA — Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie (Cahiers sc. VII).

et, en collaboration avec d'autres auditeurs

G. JULIA — Leçons sur les principes géométriques d'Analyse (1ère partie) (Cahiers sc. VI).

Leçons sur le problème de la représentation conforme (Cahiers sc. VIII).

Traduction de l'ouvrage en italien de T. Levi Civita : Caractéristiques des systèmes différentiels et propagation des ondes (Alcan 1932).

II. - Publications personnelles par année du périodique ou de l'ouvrage.

(parution parfois plus tard).
Les publications les plus importantes sont marquées d'un ou deux astériques sauf pour les articles aux CR peu après repris et développés. Certaines notes aux C.R. se suffisent à elles-mêmes et n'ont pas été développées. Les ouvrages sont marqués du signe O.

1929 1) Sur le problème de Dirichlet extérieur dans le plan relativement à l'équation $\Delta u = c.u$ (C.R. t. 189 p. 1230).

1930 2) Sur le problème de Dirichlet extérieur pour l'équation $\Delta u = c.u.$ $(c > o))$ (C.R. t. 190 p. 201).

3) Sur l'équation $\Delta u = c.u$ où $c > o$ admet des points singuliers et sur une équation de Fredholm correspondante à noyau singulier. (C.R. t. 190 p. 286).

4) Sur l'équation $\Delta u = c(x,y)\ u(x,y)$ $(c > o)$ (C.R. t. 190 p. 411).

5) Sopra la nozione di sorgente puntuale del calore in un piano irradiante in equilibrio termico (Rend. dei Lincei XI. fasc. 3 Février 1930).

6) Sopra l'equazione $\Delta u = c\ u \quad (c \geq 0)$.
(Rend. dei Lincei. XI fasc. 4, février 1930).

7) Sopra le sorgenti puntuali del calore in un piano irradiente in equilibrio termico
(Rend. dei Lincei XI. fasc. 5, mars 1930).

8) Sopra gli integrali della $\Delta u = c(M)\ u(M) \quad (c \geq o)$ nelle vicinanze di un punto singolare O della $c(M)$.
(Rend. dei Lincei XI. fasc. 9, Mai 1930).

9) Sopra il problema di Dirichlet generalizzato relativo al dominio limitato piu generale e all' equazione $\Delta u = c(M)\ u + f(M) \quad (c \geq o)$.
(Rend. dei R. Ist Lombardo 63, fasc. XI-XV).

10) Sur un problème de Dirichlet généralisé.
(C.R. t. 191 p. 697).

1931 11) Sur l'équation $\Delta u = c\ (x,y)\ u(x,y) \quad (c > o)$ quand $c(x,y)$ admet des points singuliers et une équation de Fredholm correspondante à noyau singulier.
(Rend. del circ. mat. di Palermo p. 55).

12) Sur le problème biologique héréditaire.
(Annali di Matematica IX. p. 57-74).

13) Sur la structure des ensembles de capacité nulle.
(C.R. t. 192 p. 206).

14) Etude de l'équation de la chaleur $\Delta u = c(M)\ u(M)$ où $c(M) \geq o$, au voisinage d'un point singulier du coefficient.
(Thèse et Annales de l'E.N.S. t. 48, p. 153 ; 95 p.).

15) Etude des intégrales bornées de l'équation $\Delta u = c\ u \ (c \geq o)$ au voisinage de singularités de c formant un ensemble de capacité nulle.
(Bull. Sc. Math. 55 sept 31 p. 281).

1932 16) Quelques propriétés générales des intégrales bornées de $\Delta u = c(M)\ u$, $c \geq o$, sur un domaine borné ouvert où c est continu $\geq o$.
(Bull. Sc. Math. 56, avril 32, p. 105).

17) Etude à la frontière de la solution du problème de Dirichlet généralisé relatif à l'équation $\Delta u = cu + f$, $c(M) \geq o$, et

f(M) borné.
(Rend. dei R. Istituto Lombardo 65 fasc. 1-V).

18) Sur l'allure à la frontière des intégrales bornées de $\Delta u = c(M)\ u, \quad (c \geq o)$.
(Rend. del R. Ist. Lombardo 65 fasc. VI-X).

19) Uberblick über die biologisch - mathematischen Untersuchungen von Volterra.
(Jahresbericht der deut. mat Ver. 42, Heft 1/4).

20) Einige neuere Untersuchungen über das Dirichletsche Problem.
(Jahresb. der. deut. mat. Ver. 42, Heft 5/8).

21) Sur les singularités ponctuelles des fonctions sous-harmoniques.
(C.R. t. 195, p. 693 Oct. 32).

22) Sur l'allure des singularités ponctuelles des fonctions sous-harmoniques.
(C.R. t. 195, p. 852, Nov. 32).

23) Sur l'allure des fonctions sous-harmoniques au voisinage d'un point singulier ou non.
(C.R. t. 195, p. 932, Nov. 32).

24) Sur un théorème de non-existence relatif à l'équation $\Delta u = c(M)\ u(M)\ (c \geq o)$.
(Bull. Soc. Math. t. 56 Déc. 32,p. 389).

25) Über die singularitäten der Potentialfunktionen und der Integrale der differentialgleichungen vom elliptischer typus.
(Sitzungsber der Berl. Math. Gesell t. 31).

1933 26) Sur le problème de Dirichlet.
(C.R. t. 196, p. 737).

27) Le problème de Dirichlet sous sa forme moderne.
(Mathematica VII p. 147-166).

1934 28) Etude des fonctions sous-harmoniques au voisinage d'un point.
(Actualités scientifiques et ind. N° 134) 55 p.

29) Sur l'influence des erreurs de mesure en statistique.
(Soc. fr. de Physique, Section d'Alger 9 Mai 35).

30) Sur l'intégration de $\Delta u = \varphi$.
(C.R. t. 201, p. 1316 dec. 1935).

31) Sur l'influence des erreurs de mesure en statistique et biométrie.
(Bull. de la Station d'Aquiculture de Castiglione. 1er sem. 35 paru en 36).

32) Sur l'influence des erreurs de mesure en statistique et biométrie.
(Bull. de la Station d'Aquiculture de Castiglione 2ème sem. 35 paru en 36).

1936 33) Sur l'influence des erreurs de mesure en statistique.
(J. de Math. t. 15, p. 113).

34) Sur l'allure des intégrales bornées de $\Delta u = c(M)u$, $c(M) \geq 0$ au voisinage d'un point singulier de $c(M)$.
(Bull. Sc. Math. t. 60 avril 36, p. 112).

35) Sur l'influence des erreurs de mesure en statistique.
(C.R. du Congrès d'Oslo 1936).

36) Quelques difficultés dans l'application pratique de la théorie des erreurs.
(Bull. Soc. Fr. de Physique, Déc. 36).

1937 37) Quelques propriétés des fonctions de Gilbert et de la spirale de Cornu.
(Bull. Sc. Math. t. 61, Mai 37, p. 133-160).

38) Sur la meilleure majorante harmonique.
(C.R. t. 205, p. 12).

39) Sur les meilleures et plus petites majorantes harmoniques.
(C.R. t. 206, p. 456).

40) Sur l'influence des erreurs de mesure en statistique (suite)
(J. de Math. t. 16, p. 285).

41) Quelques difficultés dans l'application pratique de la théorie des erreurs.
(Mathematica XIII, p. 243-257).

1938 42) Quelques propriétés des fonctions sous-harmoniques et du balayage.
(C.R. t. 206, p. 35).

43) Sur des extensions du balayage.
(C.R. t. 206, p. 636).

44) Sur le problème de Dirichlet et les fonctions sous-harmoniques.
(C.R. t. 206, p. 1161).

45) Fonctions sous-harmoniques et balayage (en 2 parties).
(Bull. Ac. Royale de Belgique, t. 24, p. 301-312 et 421-436 N° Mai-Juin 38).

46) Sur le potentiel et les suites de fonctions sous-harmoniques.
(C.R. t. 207, p. 836).

47) Sur un balayage d'ensembles fermés.
(C.R. t. 207 p. 1157).

1939 48) Problème de Dirichlet et majorantes harmoniques.
(Bull. Sc. Math. t. 63 Mars-Avril 39, p. 79-96 et 115-128).

49) Critères de régularité et de stabilité.
(Bull. Ac. Royale des Sc. de Belgique t. 25, p. 125-137).

50) Familles de Perron et problème de Dirichlet.
(C.R. t. 208, p. 1623) (Développé dans 53).

51) Quelques applications aux fonctions holomorphes de la théorie moderne du potentiel et du problème de Dirichlet.
(Bull. Soc. Royale de Liège n° 6-7, 1939 p. 385-391).

52) Sur l'allure à la frontière des fonctions harmoniques, sous-harmoniques ou holomorphes.
(Bull. Soc. royale des Sc. de Liège n° 8-9-10, 1939, p. 468-477).

53) Familles de Perron et problème de Dirichlet.
(Acta de Szeged IX, p. 133-153).

54) Sur la théorie moderne du potentiel.
(C.R. t. 209, p. 828).

1940 55) Quelques propriétés locales à la frontière des fonctions harmoniques ou sous-harmoniques.
(Bull. Sc. Math. t. 64 Juin-Juillet 40, p. 153).

56) Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel.
(J. de Math. t. 19, p. 319-331).