Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

1295

P. Lelong P. Dolbeault H. Skoda (Réd.)

Séminaire d'Analyse P. Lelong – P. Dolbeault – H. Skoda

Années 1985/1986

Springer-Verlag

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

1295

P. Lelong P. Dolbeault H. Skoda (Réd.)

Séminaire d'Analyse P. Lelong – P. Dolbeault – H. Skoda

Années 1985/1986

Springer-Verlag

Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo

Rédacteurs

Pierre Lelong
Pierre Dolbeault
Henri Skoda
Université Paris VI, Mathématiques
Place Jussieu, Tour 45–46, 75252 Paris Cedex 05, France

Mathematics Subject Classification (1980): 32A45, 32C05, 32C30, 32F05, 32F15, 32L05, 34A20, 58E20

ISBN 3-540-18691-3 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-18691-3 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

Printing and binding: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstr.
2146/3140-543210

Lecture Notes in Mathematics

For information about Vols. 1–1090 please contact your bookseller or Springer-Verlag.

Vol. 1091: Multifunctions and Integrands. Proceedings, 1983. Edited by G. Salinetti. V, 234 pages. 1984.

Vol. 1092: Complete Intersections. Seminar, 1983. Edited by S. Greco and R. Strano. VII, 299 pages. 1984.

Vol. 1093: A. Prestel, Lectures on Formally Real Fields. XI, 125 pages. 1984.

Vol. 1094: Analyse Complexe. Proceedings, 1983. Edité par E. Amar, R. Gay et Nguyen Thanh Van. IX, 184 pages. 1984.

Vol. 1095: Stochastic Analysis and Applications. Proceedings, 1983. Edited by A. Truman and D. Williams. V, 199 pages. 1984.

Vol. 1096: Théorie du Potentiel. Proceedings, 1983. Edité par G. Mokobodzki et D. Pinchon. IX, 601 pages. 1984.

Vol. 1097: R.M. Dudley, H. Kunita, F. Ledrappier, École d'Éte de Probabilités de Saint-Flour XII – 1982. Edité par P.L. Hennequin. X, 396 pages. 1984.

Vol. 1098: Groups – Korea 1983. Proceedings. Edited by A.C. Kim and B.H. Neumann. VII, 183 pages. 1984.

Vol. 1099: C.M. Ringel, Tame Algebras and Integral Quadratic Forms. XIII, 376 pages. 1984.

Vol. 1100: V. Ivrii, Precise Spectral Asymptotics for Elliptic Operators Acting in Fiberings over Manifolds with Boundary. V, 237 pages. 1984.

Vol. 1101: V. Cossart, J. Giraud, U. Orbanz, Resolution of Surface Singularities. Seminar. VII, 132 pages. 1984.

Vol. 1102: A. Verona, Stratified Mappings – Structure and Triangulability. IX, 160 pages. 1984.

Vol. 1103: Models and Sets. Proceedings, Logic Colloquium, 1983, Part I. Edited by G.H. Müller and M.M. Richter. VIII, 484 pages. 1984.

Vol. 1104: Computation and Proof Theory. Proceedings, Logic Colloquium, 1983, Part II. Edited by M.M. Richter, E. Börger, W. Oberschelp, B. Schinzel and W. Thomas. VIII, 475 pages. 1984.

Vol. 1105: Rational Approximation and Interpolation. Proceedings, 1983. Edited by P.R. Graves-Morris, E.B. Saff and R.S. Varga. XII, 528 pages. 1984.

Vol. 1106: C.T. Chong, Techniques of Admissible Recursion Theory. IX, 214 pages. 1984.

Vol. 1107: Nonlinear Analysis and Optimization. Proceedings, 1982. Edited by C. Vinti. V, 224 pages. 1984.

Vol. 1108: Global Analysis – Studies and Applications I. Edited by Yu.G. Borisovich and Yu.E. Gliklikh. V, 301 pages. 1984.

Vol. 1109: Stochastic Aspects of Classical and Quantum Systems. Proceedings, 1983. Edited by S. Albeverio, P. Combe and M. Sirugue-Collin. IX, 227 pages. 1985.

Vol. 1110: R. Jajte, Strong Limit Theorems in Non-Commutative Probability. VI, 152 pages. 1985.

Vol. 1111: Arbeitstagung Bonn 1984. Proceedings. Edited by F. Hirzebruch, J. Schwermer and S. Suter. V, 481 pages. 1985.

Vol. 1112: Products of Conjugacy Classes in Groups. Edited by Z. Arad and M. Herzog. V, 244 pages. 1985.

Vol. 1113: P. Antosik, C. Swartz, Matrix Methods in Analysis. IV, 114 pages. 1985.

Vol. 1114: Zahlentheoretische Analysis. Seminar. Herausgegeben von E. Hlawka. V, 157 Seiten. 1985.

Vol. 1115: J. Moulin Ollagnier, Ergodic Theory and Statistical Mechanics. VI, 147 pages. 1985.

Vol. 1116: S. Stolz, Hochzusammenhängende Mannigfaltigkeiten und ihre Ränder. XXIII, 134 Seiten. 1985.

Vol. 1117: D.J. Aldous, J.A. Ibragimov, J. Jacod, Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIII – 1983. Édité par P.L. Hennequin. IX, 409 pages. 1985.

Vol. 1118: Grossissements de filtrations: exemples et applications. Seminaire, 1982/83. Edité par Th. Jeulin et M. Yor. V, 315 pages. 1985.

Vol. 1119: Recent Mathematical Methods in Dynamic Programming. Proceedings, 1984. Edited by I. Capuzzo Dolcetta, W.H. Fleming and T. Zolezzi. VI, 202 pages. 1985.

Vol. 1120: K. Jarosz, Perturbations of Banach Algebras. V, 118 pages. 1985.

Vol. 1121: Singularities and Constructive Methods for Their Treatment. Proceedings, 1983. Edited by P. Grisvard, W. Wendland and J.R. Whiteman. IX, 346 pages. 1985.

Vol. 1122: Number Theory. Proceedings, 1984. Edited by K. Alladi. VII, 217 pages. 1985.

Vol. 1123: Séminaire de Probabilités XIX 1983/84. Proceedings. Edité par J. Azéma et M. Yor. IV, 504 pages. 1985.

Vol. 1124: Algebraic Geometry, Sitges (Barcelona) 1983. Proceedings. Edited by E. Casas-Alvero, G.E. Welters and S. Xambó-Descamps. XI, 416 pages. 1985.

Vol. 1125: Dynamical Systems and Bifurcations. Proceedings, 1984. Edited by B.L.J. Braaksma, H.W. Broer and F. Takens. V, 129 pages. 1985.

Vol. 1126: Algebraic and Geometric Topology. Proceedings, 1983. Edited by A. Ranicki, N. Levitt and F. Quinn. V, 423 pages. 1985.

Vol. 1127: Numerical Methods in Fluid Dynamics. Seminar. Edited by F. Brezzi, VII, 333 pages. 1985.

Vol. 1128: J. Elschner, Singular Ordinary Differential Operators and Pseudodifferential Equations. 200 pages. 1985.

Vol. 1129: Numerical Analysis, Lancaster 1984. Proceedings. Edited by P.R. Turner. XIV, 179 pages. 1985.

Vol. 1130: Methods in Mathematical Logic. Proceedings, 1983. Edited by C.A. Di Prisco. VII, 407 pages. 1985.

Vol. 1131: K. Sundaresan, S. Swaminathan, Geometry and Nonlinear Analysis in Banach Spaces. III, 116 pages. 1985.

Vol. 1132: Operator Algebras and their Connections with Topology and Ergodic Theory. Proceedings, 1983. Edited by H. Araki, C.C. Moore, Ş. Strătilă and C. Voiculescu. VI, 594 pages. 1985.

Vol. 1133: K.C. Kiwiel, Methods of Descent for Nondifferentiable Optimization. VI, 362 pages. 1985.

Vol. 1134: G.P. Galdi, S. Rionero, Weighted Energy Methods in Fluid Dynamics and Elasticity. VII, 126 pages. 1985.

Vol. 1135: Number Theory, New York 1983–84. Seminar. Edited by D.V. Chudnovsky, G.V. Chudnovsky, H. Cohn and M.B. Nathanson. V, 283 pages. 1985.

Vol. 1136: Quantum Probability and Applications II. Proceedings, 1984. Edited by L. Accardi and W. von Waldenfels. VI, 534 pages. 1985.

Vol. 1137: Xiao G., Surfaces fibrées en courbes de genre deux. IX, 103 pages. 1985.

Vol. 1138: A. Ocneanu, Actions of Discrete Amenable Groups on von Neumann Algebras. V, 115 pages. 1985.

Vol. 1139: Differential Geometric Methods in Mathematical Physics. Proceedings, 1983. Edited by H. D. Doebner and J. D. Hennig. VI, 337 pages. 1985.

Vol. 1140: S. Donkin, Rational Representations of Algebraic Groups. VII, 254 pages. 1985.

Vol. 1141: Recursion Theory Week. Proceedings, 1984. Edited by H.-D. Ebbinghaus, G.H. Müller and G.E. Sacks. IX, 418 pages. 1985.

Vol. 1142: Orders and their Applications. Proceedings, 1984. Edited by I. Reiner and K. W. Roggenkamp. X, 306 pages. 1985.

Vol. 1143: A. Krieg, Modular Forms on Half-Spaces of Quaternions. XIII, 203 pages. 1985.

Vol. 1144: Knot Theory and Manifolds. Proceedings, 1983. Edited by D. Rolfsen. V, 163 pages. 1985.

continued on page 287

INTRODUCTION

Ce volume du Séminaire succède à de nombreux volumes précédents (voir la liste à la fin de cette introduction) et sera peut-être le dernier non pas du Séminaire, mais de cette longue série éditée par les soins de Springer dans ses Lecture-Notes.

Indiquons-en brièvement le contenu.

I. Une place importante ayant été donnée aux problèmes concernant les espaces fibrés analytiques, nous commencerons par ceux-ci.

1. L'article de J.-P.Demailly fait faire des progrès à l'estimation des formes harmoniques et plus généralement au contrôle des opérateurs linéaires sur les variétés analytiques complexes et établit une majoration asymptotique pour la dimension des groupes de cohomologie des puissances tensorielles E^k, où E est un fibré hermitien holomorphe en droites au-dessus d'une variété analytique compacte X. D'où une simplification de la démonstration récente (SIU) de la conjecture de Grauert-Riemenschneider donnant un remarquable critère pour qu'une variété soit de Moishezon

L'intéret du travail de J.-P.Demailly réside également dans le fait que les outils d'analyse réelle utilisés sont très élémentaires alors que les majorations asymptotiques obtenues pour la cohomologie de E^k sont déjà remarquablement précises, presqu'optimales et en tout cas beaucoup plus fortes que celles obtenues par Y.T.Siu. Depuis, J.-P.Demailly est parvenu à démontrer des estimations à la"Morse-Witten" encore plus fortes mais au prix d'une analyse réelle bien plus lourde et sophistiquée. Il nous a paru intéressant de publier la première version dont les méthodes ont leur intérêt propre.

2. L'article de K.Filali complète les études de H.Skoda et J.-P.Demailly sur les fibrés holomorphes à base un disque de C et à fibre C^n qui ne sont pas de Stein, et montre que non seulement les fonctions plurisousharmoniques, mais aussi les fonctions méromorphes sont constantes sur les fibres. Ce travail demande en fait une étude très précise de la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe.

II. L'étude des développements asymptotiques en liaison avec l'intégration sur les fibres d'une application holomorphe $f : X \to \mathbb{C}$, où X est une variété analytique complexe est poursuivie ici par deux mémoires.

1° L'article de D.Barlet donne des résultats nouveaux reliant les singularités, pôles et semi-pôles, pour les intégrales $\int_X |f|^{2\lambda}$ et $\int_X |f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j}$, à la monodromie.

2° L'article de D.Barlet et H.-M.Maire reprend en la précisant l'étude de $\int_{f^{-1}(s)} \psi = \psi(s)$ au voisinage de $s = 0$, le résultat est obtenu grâce à un résultat du second auteur sur la transformée de Mellin.

III. L'étude des formes différentielles et des courants sur les variétés ou les ensembles analytiques a donné lieu à plusieurs travaux qui concernent aussi bien la géométrie que l'analyse complexe.

1° Le mémoire de G.Raby complète d'abord les résultats de G.de Rham, de J.-B.Poly et de J.King sur les opérateurs A qui donnent sur une variété des formules d'homotopie entre le complexe des courants et celui des formes différentielles (les propriétés de régularité de AT sont importantes ainsi que les propriétés de recollement sur une variété). Cette technique permet alors une description des classes de cohomologie du complémentaire d'un sous-ensemble analytique fermé Y d'une variété analytique complexe X , pour des formes C^∞ sur $X\setminus Y$ à singularités le long de Y .

2° L'article de A.Yger est consacré à la définition des courants résiduels $\bar\partial[\frac{1}{f_1}]$ ... $\bar\partial[\frac{1}{f_p}]$ associé à des fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_p$. A.Yger reprend un travail de M.Passare mais alors que ce dernier adoptait un point de vue proche de celui de Coleff-Herrera, A.Yger s'inspire lui de la méthode d'Atiyah utilisant le prolongement méromorphe en λ du courant $|f|^{2\lambda}$. Ceci lui permet de faire le lien avec les formules de division "explicites" d'Anderson-Berndtsson. Des applications diverses sont données par exemple à l'interpolation algébrique. Enfin ces courants sont à rapprocher des intégrales de l'article de Barlet.

3° M.Passare a introduit précédemment des courants résiduels généralisant ceux de Coleff-Herrera par introduction de plusieurs facteurs valeur principale au lieu d'un au plus. Très récemment il a introduit des courants résiduels en faisant une moyenne des précédents; les deux notions coïncident dans le cas d'intersection complète. L'article de M.Passare est d'un grand intérêt car son théorème montre l'identité de ces derniers courants et de ceux de l'article de Yger.

4° La recherche de prolongements au moyen de formules intégrales, élégante en dimension un, présente de grosses difficultés en dimension $n > 1$. De ce type est la formule de Bochner-Martinelli

$F(z) = \int_V f(\zeta)k(z,\zeta)$ où $f(\zeta)$ sont des données continues sur une hypersurface V lisse réelle de classe $\mathcal{C}^1$ dans C^n. Le travail de Mme Laurent, à partir des noyaux de Henkin et de Leiterer, dans une variété de Stein, fait une étude des valeurs des deux côtés de V à l'approche de V, puis applique la méthode au prolongement des formes différentielles et à l'étude des valeurs au bord de certains courants.

IV. 1° L'étude de A.Méril apporte des théorèmes de prolongement pour les solutions de systèmes $\mu_j \star f = 0$, $1 \leq j \leq r$, les μ_j étant des distributions à support compact, et les produits de convolution pouvant être étendus au cas où f est dans des espaces de distributions. Il met en évidence un phénomène de prolongement à la "Hartogs" à travers un compact, des solutions du système.

L.Ehrenpreis avait déjà observé que le phénomène de "Hartogs" de prolongement des fonctions holomorphes à n variables ($n \geq 2$) à travers un compact était un cas particulier d'un phénomène semblable pour les solutions de certains systèmes d'E.D.P. homogènes à coefficients constants.

2° L'article de G.Laville concerne l'algèbre non commutative des opérateurs de Feymann, présentant aussi bien des critiques du travail de 1951 de cet auteur qu'une remise en ordre à partir des propriétés des algèbres de Banach non commutatives ; la non commutativité fait apparaître des problèmes nouveaux par rapport aux études antérieures et aux représentations intégrales conçues autrefois pour un calcul symbolique des opérateurs commutatifs.

Historique du Séminaire. Comme il a été dit il se peut que ce volume soit non pas le dernier volume du Séminaire mais seulement le dernier volume publié par les Lecture Notes. Tout en remerciant l'éditeur Springer d'une collaboration de 20 ans, la direction du Séminaire se préoccupe de continuer son édition.

Rappelons que le Séminaire a déjà connu deux séries A et B .

Série A . Editée à l'Institut Henri Poincaré par P.Belgodère (Séminaire d'Analyse P.Lelong) , correspondant aux années 1958,1959,1961,1962,1963,1966,1967.

Série B . Editée aux Lecture Notes Springer
-Séminaire d'Analyse (P.Lelong), de 1968 à 1976, 9 volumes sous les n° 71,116,205,275,338,410,474,524,578.
-Séminaire d'Analyse (P.Lelong-H.Skoda), de 1977 à 1981, 3 volumes n° 624,822,919.
-Séminaire d'Analyse (P.Lelong-P.Dolbeault-H.Skoda), 2 volumes n° 1028,1198.

Nous remercions tout particulièrement les auteurs qui nous ont confié leurs textes.

P.LELONG,P.DOLBEAULT,H.SKODA

TABLE DES MATIÈRES

SYMÉTRIE DE HODGE POUR LE POLYNÔME DE BERNSTEIN-SATO

D.Barlet
Université de Nancy I
Mathématiques
B.P. 239
F-54506 VANDOEUVRE LES NANCY

INTRODUCTION

Dans la première partie nous montrons comment les méthodes introduites dans [0], [1] et [2] permettent d'arriver à des propriétés de "symétrie de Hodge" pour les racines du polynôme de Bernstein-Sato d'un germe de fonction holomorphe $f : (\mathbb{C}^{n+1},0) \to (\mathbb{C},0)$. Les techniques utilisées donnent en fait des renseignements beaucoup plus précis que ce qui peut être lu au niveau du polynôme de Bernstein-Sato. Ceci nous conduit dans la seconde partie à introduire d'abord la notion de profondeur pour un bloc de Jordan de la monodromie de f en 0. Cet entier représente la "distance" des sections horizontales correspondant au bloc de Jordan au complexe de De Rham relatif de f. Ensuite nous introduisons la notion de "semi-pôle" (effectif en codimension p) pour le prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2\lambda}\square$. Cette notion est adaptée à une approche de type Hodge de la structure de pôles de $\int_X f^\lambda \bar{f}^\mu \square$ avec $\lambda - \mu \in \mathbb{Z}$ (ceci correspond à la transformation de Mellin complexe introduite dans [BM]). L'aspect "effectif en codimension p" de cette définition permet de reconnaître que certains pôles proviennent de la monodromie en degré plus grands que le degré que l'on considère, ce qui permet de négliger de tels pôles dans la version précisée du théorème 1, donnée dans cette seconde partie.

Une première version de cet article a circulé avec le titre peu adapté suivant "un peu mieux sur le polynôme de Bernstein-Sato" à partir de décembre 1985.

1. Nous reprenons ici les notations de [1].

Théorème :

Soit $f : X \to D$ un représentant de Milnor(*) d'un germe non constant de fonction holomorphe $f : (\mathbb{C}^{n+1},0) \to (\mathbb{C},0)$. Supposons que pour $0 \le u < 1$, $e^{-2i\pi u}$ soit valeur propre de multiplicité k de la monodromie agissant sur le p-ième

(*) Voir [1].

groupe $(p \geq 1)$ de cohomologie de la fibre de Milnor de f. Désignons par $b \in \mathbb{C}[\lambda]$ le polynôme de Bernstein-Sato de f en 0 et posons $v = 1 - u$.

Soit σ le plus petit entier tel que b admette au moins k racines (en comptant les multiplicités) de la forme $-q-u$ avec q entier $0 \leq q \leq \sigma$. Définissons τ de manière analogue à σ mais relativement aux racines de b congrues à $-v$ modulo $\mathbb{Z}$.

Alors on a $\sigma + \tau \leq p$.

Remarques :

1) L'hypothèse fait jouer des rôles symétriques à u et v car la monodromie étant réelle (car définie sur $\mathbb{Z}$!) $e^{-2i\pi u}$ est valeur propre de multiplicité k si et seulement si $e^{-2i\pi v}$ l'est ; d'où l'aspect symétrique de la conclusion du théorème.

2) Le théorème ci-dessus est à comparer avec la remarque 1) qui suit le théorème 2 de [1] : sous la même hypothèse on obtenait alors l'inégalité $\sigma \leq p$ (et donc aussi $\tau \leq p$ par symétrie).(*)

3) Dans le cas d'une singularité isolée A.N. Varchenko a obtenu un résultat plus précis ; voir [V], th. 8.3.

Démonstration du théorème :

Grâce aux résultats de [1] (corollaire 1 du théorème 1) et de [0] (lemme A), notre hypothèse implique l'existence d'un entier $m \in [0,p]$ et de p-formes holomorphes $w_1, \ldots, w_k$ sur X vérifiant

1°) $dw_a = (m+u)\frac{df}{f} \wedge w_a + \frac{df}{f} \wedge w_{a-1}$ $\forall a \in [1,k]$ avec la convention $w_0 \equiv 0$.

2°) Les $w_a|X(s_0)$, où $X(s_0) = f^{-1}(s_0)$ désigne la fibre de Milnor de f, induisent un bloc de Jordan de taille (k,k) de la monodromie T, agissant sur $H_p(X(s_0),\mathbb{C})$, pour la valeur propre $e^{-2i\pi u}$.

Notons par σ (resp. τ) le plus petit entier tel que b, le polynôme de Bernstein-Sato de f en 0, admette k racines de la forme $-q-u$ (resp. de la forme $-q-v$ avec $v = 1-u$) avec $q \in \mathbb{N}$ et $q \in [0,\sigma]$ (resp. $q \in [0,\tau]$) en comptant les multiplicités.

Soit ℓ_0 le plus petit entier relatif qui vérifie que le prolongement méromorphe du courant

$$\int_X |f|^{2\lambda}\, \bar{f}^{\ell_0} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \square$$

(*) Mais un résultat précis sur les pôles de $\int_X |f|^{2\lambda} \square$!

n'ait pas de pôle d'ordre $\geq k$ en $\lambda = -m-u$(*) . On aura en particulier un pôle d'ordre $\geq k$ en $\lambda = -m-u$ pour

$$\int_X |f|^{2\lambda}\, \bar{f}^{\ell_0 -1} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \square .$$

Effectuons le prolongement analytique de ce courant de la manière suivante : partons d'une identité de Bernstein itérée

$$f^{\lambda} = \frac{1}{b(\lambda)\, b(\lambda+1) \dots b(\lambda+N-1)} P_N(\lambda, z, \frac{\partial}{\partial z}) f^{\lambda+N}$$

où P_N est un opérateur différentiel holomorphe qui dépend polynomialement de λ . On en déduit, puisque b est à coefficients réels (en fait rationnels)

$$\bar{f}^{\lambda+\ell_0-1} = \frac{1}{b(\lambda+\ell_0-1) \dots b(\lambda+\ell_0+N-1)} \widetilde{P}_N(\lambda, \bar{z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}) \bar{f}^{\lambda+\ell_0+N}$$

où $\widetilde{P}_N$ est un opérateur différentiel anti-holomorphe dépendant polynomialement de λ . Si $\widetilde{Q}_N$ désigne l'adjoint formel de $\widetilde{P}_N$, on aura, puisque $\widetilde{Q}_N$ agit $\mathcal{O}_X$-linéairement :

$$\int_X |f|^{2\lambda}\, \bar{f}^{\ell_0-1} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \phi =$$

$$\frac{1}{b(\lambda+\ell_0-1) \dots b(\lambda+\ell_0+N-1)} \int_X |f|^{2\lambda}\, \bar{f}^{\ell_0+N} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \widetilde{Q}_N(\phi)$$

pour $\phi \in C_c^{\infty}(X)$, de type $(n-p,n+1)$, $N >> 0$ et $\mathrm{Re}(\lambda) >> 0$. Comme le membre de droite est méromorphe sur toute région $\mathrm{Re}(\lambda) > -a$ si N est assez grand, on obtient ainsi le prolongement méromorphe du membre de gauche. On constate ainsi que l'existence d'un pôle d'ordre $\geq k$ en $-m-u$ pour le prolongement du dit membre de gauche implique que l'inégalité $-u-m+\ell_0-1 \leq -\sigma-u$ est vérifiée : cette inégalité est une condition nécessaire (non suffisante, a priori au moins) puisque pour $N >> 0$

$$\int_X |f|^{2\lambda}\, \bar{f}^{\ell_0+N} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \widetilde{Q}_N(\phi)$$

sera holomorphe pour $\mathrm{Re}(\lambda) > -m-1$; le pôle d'ordre $\geq k$ en $-m-u$ du prolongement méromorphe du membre de gauche implique donc l'existence d'une racine d'ordre $\geq k$ en $-m-u$ pour le polynôme $b(\lambda+\ell_0-1)\, b(\lambda+\ell_0) \dots b(\lambda+\ell_0+N-1)$.

(*) On a $\ell_0 > -\infty$ d'après [1] ; on retrouvera ce fait plus loin.

On a donc obtenu l'inégalité suivante :

$$\sigma \leq m - \ell_0 + 1 \; . \tag{A}$$

Appliquons maintenant la proposition fondamentale de [1] aux formes w_a pour $a \in [1,k]$. On obtient des p-formes holomorphes w_a^* pour $a \in [-n,k]$ vérifiant :

1°) $dw_a^* = (m^*+v)\,\frac{df}{f} \wedge w_a^* + \frac{df}{f} \wedge w_{a-1}^*$
pour $a \in [-n,k]$ avec la convention $w_{-n-1}^* = 0$ où $m^* = \ell_0 - m + p - 1$ (rappelons que $v = 1 - u$) .

2°) Les $w_a^*|X(s_0)$ pour $a \in [1,k]$ induisent une base du sous-espace de $H^p(X(s_0),\mathbb{C})$ conjugué complexe(*) de celui engendré par les $w_a|X(s_0)$ pour $a \in [1,k]$.

3°) Les $w_a|X(s_0)$ induisent 0 dans $H^p(X(s_0),\mathbb{C})$ pour $a \leq 0$.

Nous nous proposons maintenant de montrer l'inégalité

$$\tau \leq m^* \; . \tag{B}$$

Pour cela, commençons par montrer que pour j entier assez grand le prolongement méromorphe du courant

$$\int_X |f|^{2\lambda}\, \bar{f}^{-j}\, \frac{df}{f} \wedge w_k^* \wedge \square$$

admet un pôle d'ordre $\geq k$ en $-m^* - v$.

En fait si pour $j = j_0$ donné, le prolongement du courant ci-dessus n'admet pas en $-m^* - v$ un pôle d'ordre $\geq k$, on va pouvoir appliquer la proposition fondamentale de [1] :

Ceci nécessite quelques changements de notations : posons $\tilde{k} = k + n + 1$ et pour $b \in [1,\tilde{k}]$

$$\omega_b = w_{b+n+1}^* \; .$$

On a alors

$$d\omega_b = (m^*+v)\,\frac{df}{f} \wedge \omega_b + \frac{df}{f} \wedge \omega_{b-1} \qquad \forall b \in [1,\tilde{k}]$$

avec la convention $\omega_0 = 0$ (qui correspond à $w_{-n-1}^* = 0$) .

(*) La conjugaison complexe de $H^p(X(s_0),\mathbb{C})$ vient de l'isomorphisme $H^p(X(s_0),\mathbb{C}) \simeq H^p(X(s_0),\mathbb{R}) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$.

Pour $\tilde{h} = n+2$ et $\tilde{\ell}_0 = -j_0$, le prolongement méromorphe de

$$\int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{\tilde{\ell}_0} \frac{df}{f} \wedge \omega_{\tilde{k}} \wedge \square$$

n'a pas de pôle d'ordre strictement plus grand que $\tilde{k} - \tilde{h} = k-1$ en $\lambda = -m^* - v$. Il existe donc des p-formes holomorphes ω_b^* sur X pour $b \in [-n,-h]$ vérifiant sur X les conditions suivantes :

1°) $d\omega_b^* = (\tilde{\ell}_0 - m^* + p - v) \frac{df}{f} \wedge \omega_b^* + \frac{df}{f} \wedge \omega_{b-1}^*$
pour $b \in [-n,\tilde{h}]$ avec la convention $\omega_{-n-1}^* = 0$.

2°) Les $\omega_b^*|X(s_0)$ pour $b \in [1,c]$, où $c \in [1,\tilde{h}]$, engendrent le conjugué complexe du sous-espace complexe de $H^p(X(s_0),\mathbb{C})$ engendré par les $\omega_a|X(s_0)$ avec $a \in [1,c]$ (on utilise ici la remarque de [1] qui suit la preuve du théorème 1 : on obtient immédiatement cette "précision" dans la proposition fondamentale en remarquant que la relation (3) donne un système triangulaire !).

3°) Les $\omega_b^*|X(s_0)$ induisent 0 dans $H^p(X(s_0),\mathbb{C})$ pour $b \leq 0$.

Dans notre situation on sait au départ que les ω_a pour $a \in [1,n+1]$ induisent 0 dans $H^p(X(s_0),\mathbb{C})$ (ceci résulte de la condition 3°) sur les ω_a^*) . Donc la seule information intéressante résultant du 2°) est que $\omega_{n+2}^*|X(s_0)$ induit, à un facteur non nul près, la classe conjuguée de $\omega_{n+2}|X(s_0) = w_1^*|X(s_0)$ et que les ω_b^* pour $b \leq n+1$ induisent 0 dans $H^p(X(s_0),\mathbb{C})$.

Maintenant, dans la situation où le j_0 fixé $(\tilde{\ell}_0 = -j_0)$ est un entier assez grand, on obtient

$$d\omega_{n+2}^* = (\tilde{\ell}_0 - m^* + p - v) \frac{df}{f} \wedge \omega_{n+2}^* + \frac{df}{f} \wedge \omega_{n+1}^*$$

avec $\tilde{\ell}_0 - m^* + p - v < 0$ et $\omega_{n+2}^*|X(s_0)$ n'induisant pas 0 dans $H^p(X(s_0),\mathbb{C})$ alors que $\omega_{n+1}^*|X(s_0)$ induit 0 dans $H^p(X(s_0),\mathbb{C})$.

On obtient alors une contradiction grâce au théorème de positivité des exposants caractéristiques de B. Malgrange(*) comme dans la preuve du théorème 2 de [1] :

Considérons une famille horizontale multiforme $\gamma(s)$ de p-cycles vérifiant :

$$\int_{\gamma(s_0)} \omega_{n+2}^*|X(s_0) = 1$$

(*) Voir [M] ou l'appendice de [2].

(une telle famille existe car $\omega^*_{n+2}|X(s_0)$ n'induit pas 0 dans $H^p(X(s_0),\mathbb{C})$) et posons $F(s) = \int_{\gamma(s)} \omega^*_{n+2}$. Alors F est holomorphe multiforme et vérifie $s\frac{\partial}{\partial s} F(s) = (\tilde{\ell}_0 - m^* + p - v)\, F(s)$ puisque

$$f\,\frac{d\omega^*_{n+2}}{df} = (\ell_0 - m^* + p - v)\,\omega^*_{n+2} + \omega^*_{n+1}$$

et $\omega^*_{n+1}|X(s)$ induit 0 dans $H^p(X(s\ ),\mathbb{C})$ pour tout $s \in D - \{0\}$ (ceci s'obtient aisément pour tout ω^*_b avec $b \le n+1$ par récurrence sur b en utilisant la relation 1°) et le fait que pour tout $b \le n+1$ $\omega_b|X(s_0)$ induit 0 dans $H^p(X(s_0),\mathbb{C})$; cette récurrence est détaillée dans la preuve du corollaire 2 de la proposition fondamentale de [1]). On a donc

$$F(s) = \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\rho} \quad \text{où} \quad \rho = (\tilde{\ell}_0 - m^* - p - v)$$

ce qui contredit bien le théorème de Malgrange pour $\rho < 0$ puisque ω^*_{n+2} est une p-forme holomorphe sur X.

Donc pour j entier assez grand le prolongement méromorphe du courant

$$\int_X |f|^{2\lambda}\, \bar{f}^{-j}\, \frac{df}{f} \wedge w^*_k \wedge \square$$

a bien un pôle d'ordre $\ge k$ en $\lambda = -m^* - v$.

Maintenant en utilisant une identité de Bernstein

$$f^\lambda = \frac{1}{b(\lambda)\, b(\lambda+1) \ldots b(\lambda+N-1)}\, P_N(\lambda, z, \frac{\partial}{\partial z}) f^{\lambda+N}$$

on obtient, si P^*_N désigne l'adjoint de P_N

$$\int_X |f|^{2\lambda}\, \bar{f}^{-j}\, \frac{df}{f} \wedge w^*_k \wedge \phi = \frac{1}{b(\lambda)\, b(\lambda+1) \ldots b(\lambda+N-1)} \int_X |f|^{2\lambda} f^N \bar{f}^{-j}\, P^*_N\!\left(\frac{df}{f} \wedge w^*_k \wedge \phi\right)$$

pour $\phi \in C^\infty_c(X)$ de type $(n-p, n+1)$. En effet, comme $\frac{df}{f} \wedge w^*_{-n}$ est holomorphe car w^*_{-n} l'étant dw^*_{-n} l'est, on a, par une récurrence immédiate, $\frac{df}{f} \wedge w^*_k$ qui est holomorphe. En utilisant le lemme 2 de [1], on constate que pour $N = m^* + 1$

$$\int_X |f|^{2\lambda} f^N \bar{f}^{-j}\, P^*_N\!\left(\frac{df}{f} \wedge w^*_k \wedge \phi\right)$$

ne peut avoir (quel que soit j) de pôle pour $\lambda = -m^* - v$. Le polynôme $b(\lambda) \ldots b(\lambda+N-1)$ aura donc un zéro d'ordre $\ge k$ en $-m^* - v$ et on aura

$$-m^* - v \le -\tau - v$$

ce qui donne $\tau \le m^*$ c'est-à-dire l'inégalité (B) annoncée.

Maintenant on a donc obtenu

$$\ell_0 \leq m - \sigma + 1 \tag{A}$$

et

$$\tau \leq m^* = \ell_0 - m + p - 1 \tag{B}$$

on a donc $\tau \leq m - \sigma + 1 - m + p - 1$

ce qui donne $\sigma + \tau \leq p$.

Ceci achève la preuve du théorème.

2. En fait l'énoncé du théorème que l'on vient de démontrer ne donne pas la précision optimale sur les renseignements fournis par la preuve. Pour les énoncer il va être commode d'introduire deux définitions :

Définition 1 :

On dira que $\alpha \in \mathbb{C}$ est un semi-pôle d'ordre $\geq k$ du prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2\lambda} \square$ si pour $j \in \mathbb{N}$ assez grand le prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \square$ admet en $\lambda = \alpha$ un pôle d'ordre au moins égal à k . On dira que α est effectif en codimension p si la partie polaire d'ordre $\geq k$ de $\int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \square$ en $\lambda = \alpha$ pour $j >> 0$ n'est pas supporté par un sous-ensemble analytique de codimension $\geq p+1$ dans $\{f=0\}$.

Définition 2 :

Soit $e = \{e_1, \dots, e_k\}$ un bloc de Jordan(*) de la monodromie T agissant sur $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$, le p-ième groupe de cohomologie de la fibre de Milnor de f , pour la valeur propre $e^{-2i\pi u}$, où $0 \leq u < 1$.

On dira que e est de profondeur $\leq m$ (**) s'il existe $\kappa \in \mathbb{Z}$, $\kappa \leq 0$ des p-formes holomorphes $w_\kappa \dots w_0\ w_1 \dots w_k$ sur X qui vérifient

1°) $dw_a = (m+u) \frac{df}{f} \wedge w_a + \frac{df}{f} \wedge w_{a-1} \quad \forall a \in [\kappa, k]$ avec la convention $w_{\kappa-1} = 0$.

(*) Ceci signifie que $Te_j = e^{-2i\pi u} e_j + e_{j-1}$ avec la convention $e_0 = 0$, et $e_1 \neq 0$.

(**) $m \in \mathbb{N}$; le lemme A de [0] donne $m < +\infty$; la profondeur est définie comme l'inf. des $m \in \mathbb{N}$ tels que...

2°) $w_a|X(s_0)$ induit 0 pour $a \leq 0$ dans $H^p(X(s_0),\mathbb{C})$.

3°) Le sous-espace engendré par $\{e_1,\dots,e_h\}$ dans $H^p(X(s_0),\mathbb{C})$ coïncide avec le sous-espace engendré par les $w_a|X(s_0)$ pour $a \in [1,h]$, et cela pour tout $h \in [1,k]$.

Faisons quelques remarques sur ces définitions.

1°) Soit $u \in [0,1[$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que $-q-u$ soit semi-pôle d'ordre $\geq k$ pour $\int_X |f|^{2\lambda} \square$. Alors il existe au moins k racines du polynôme de Bernstein-Sato de f (en comptant les multiplicités) qui sont de la forme $-q'-u$ avec $q' \in \mathbb{N} \cap [0,q]$.

2°) Le résultat clef qui donne l'existence de pôles pour $\int_X |f|^{2\lambda} \square$ dans [0] et [1] s'énonce comme suit :

<u>Théorème</u> (contribution effective) :

Si la monodromie en degré p admet un bloc de Jordan de taille (k,k) et de profondeur $\leq m$ pour la valeur propre $e^{-2i\pi u}$ avec $0 \leq u < 1$ alors $-m-u$ est semi-pôle effectif en codimension p pour $\int_X |f|^{2\lambda} \square$.

3°) Le théorème 1 de [1] s'exprime alors en disant que la profondeur d'un bloc de Jordan en degré p est toujours inférieur ou égal à p .

Donnons maintenant la forme précise de théorème démontré plus haut.

<u>Théorème précisé</u> :

Soit $f : X \to D$ un représentant de Milnor d'un germe non constant de fonction holomorphe. Supposons que pour $0 \leq u < 1$ la monodromie agissant sur le p-ième groupe de cohomologie de la fibre de Milnor de f , admette un bloc de Jordan (k,k) e . Notons par m et $\bar{m}$ les profondeurs respectives des blocs de Jordan e et $\bar{e}$.

Notons par $-\hat{\sigma}-u$ (resp. $-\hat{\tau}-v$) le plus grand semi-pôle d'ordre k effectif en codimension p congru à $-u$ modulo $\mathbb{Z}$ (resp. à $-v$ modulo $\mathbb{Z}$; on a posé comme plus haut $v = 1-u$) .

Alors on a les inégalités :

1°) $\hat{\sigma}+\hat{\tau} \leq p$.

2°) $\hat{\tau}+m \leq p$ et $\hat{\sigma}+\bar{m} \leq p$.

<u>Remarques</u> :

3°) On a $m \geq \hat{\sigma}$ et $\bar{m} \geq \hat{\tau}$ donc les inégalités du 2°) impliquent celle du 1°).

4°) Les σ et τ introduits dans l'énoncé du théorème "non précisé" vérifient $\sigma \leq \hat{\sigma}$ et $\tau \leq \hat{\tau}$ d'après la remarque 1°) ci-dessus.