Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann
Subseries: Mathematisches Institut der Universität und
Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn – vol. 10
Adviser: F. Hirzebruch

1290

G. Wüstholz (Ed.)

Diophantine Approximation and Transcendence Theory

Seminar, Bonn 1985

Springer-Verlag

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann
Subseries: Mathematisches Institut der Universität und
Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn – vol. 10
Adviser: F. Hirzebruch

1290

G. Wüstholz (Ed.)

Diophantine Approximation and Transcendence Theory

Seminar, Bonn (FRG)
May – June 1985

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo

Editor

Gisbert Wüstholz
Mathematik, ETH Zentrum
8092 Zürich, Switzerland

Mathematics Subject Classification (1980): 10B10, 10B45, 10F05, 10F35, 10F37, 12C15, 14D99, 14K99

ISBN 3-540-18597-6 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-18597-6 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, re-use of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilms or in other ways, and storage in data banks. Duplication of this publication or parts thereof is only permitted under the provisions of the German Copyright Law of September 9, 1965, in its version of June 24, 1985, and a copyright fee must always be paid. Violations fall under the prosecution act of the German Copyright Law.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1987
Printed in Germany

Printing and binding: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstr.
2146/3140-543210

INTRODUCTION

In 1985 the traditional Arbeitstagung at Bonn was cancelled. Instead a number of workshops were organized during Spring and Summer 1985 by various organizers. One of these workshops was on number theory with special emphasis on diophantine problems and transcendence. It took place at the Max-Planck-Institut für Mathematik at Bonn in May - June 1985. A great number of leading mathematicians in the subject were invited for a certain period to discuss mathematics and problems. It seems that a very fruitful atmosphere was created which is reflected by quite a number of joint papers which were written during this time at Bonn or at least initiated there.

We are very happy to present in this volume a selection of papers that grew out of this workshop at Bonn. It consists entirely of research papers which cover various important aspects of the field and each of them presents a fundamental contribution to the subject.

In the first contribution by Colliot-Thélène, Kanevsky and Sansuc an effective algorithm for the calculation of the Manin obstruction for the Hasse principle for diagonal cubic surfaces is given.

Then in the next article by Masser on small values of heights on families of abelian varieties, an effective lower bound for the variation of the Néron-Tate height in families of abelian varieties is given.

In two further papers, one by Brownawell and another by Brownawell and Tubbs, questions on large transcendence degree are studied. The authors obtain very precise lower bounds for the transcendence degree of fields generated by values of elliptic or exponential functions.

In the next two contributions multiplicity estimates for group varieties are studied in the most simplest case. Here extremely sharp results are given and applied to Baker's theory of linear forms in logarithms.

In the last paper, by E. Bombieri, the number of solutions in integers in number fields of the so-called Thue equation is bounded effectively. This generalizes in one direction the earlier work of Bombieri and Schmidt on the Thue equation.

This workshop profited very much from the friendly atmosphere at the MPI. We are very grateful to its Director F. Hirzebruch for giving us the opportunity to organize this workshop and for keeping everything as unbureaucratic as possible. We have also to thank Ms. A. Franz for doing the very careful typing of most of the contributions at the Bergische - Universität - Gesamthochschule Wuppertal.

Zurich 1987

G. Wüstholz

TABLE OF CONTENTS

J.-L. Colliot-Thélène / D. Kanevsky / J.-J. Sansuc:
Arithmétique des Surfaces Cubiques Diagonales 1

D. W. Masser: Small Values of Heights on
Families of Abelian Varieties 109

W. D. Brownawell: Large Transcendence Degree Revisited
I. Exponential and Non - CM Cases 149

W. D. Brownawell / R. Tubbs: Large Transcendence Degree
Revisited
II. The CM - Case 175

G. Wüstholz: A new approach to Baker's Theorem on
Linear Forms in Logarithms I 189

G. Wüstholz: A new approach to Baker's Theorem on
Linear Forms in Logarithms II 203

E. Bombieri: On the Thue - Mahler Equation 213

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

ARITHMÉTIQUE DES SURFACES CUBIQUES DIAGONALES

par

Jean-Louis Colliot-Thélène
Dimitri Kanevsky
Jean-Jacques Sansuc

Etant donnée une surface cubique V d'équation homogène diagonale:

(1) $\quad ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0 \qquad\qquad a, b, c, d \in \mathbb{Q}^*$

peut-on décider si l'ensemble $V(\mathbb{Q})$ de ses points rationnels est non vide? Autrement dit, peut-on décider s'il existe une solution non triviale $(x,y,z,t) \in \mathbb{Q}^4$ de l'équation (1)?

Une première condition, évidente, est que (1) possède des solutions non triviales dans chaque complété p-adique $\mathbb{Q}_p$ de $\mathbb{Q}$ (le complété réel $\mathbb{R}$ ne pose pas de problème pour une surface cubique). Vérifier si ces *conditions locales* $V(\mathbb{Q}_p) \neq \emptyset$ sont satisfaites ne requiert, comme il est bien connu, qu'un nombre fini de vérifications faciles, cf. §4, pas n°0.

En 1949, Mordell conjecturait [15] que ce test suffisait pour assurer l'existence d'un point rationnel sur une surface cubique définie sur $\mathbb{Q}$. Dans le cas particulier des surfaces cubiques diagonales (1) telles que l'un des quotients ab/cd soit le cube d'un nombre rationnel, ceci fut établi par Selmer [17] en 1953, et de plus Selmer vérifia aussi que toutes les surfaces (1) avec a,b,c,d entiers et $|abcd| < 500$ ont un point rationnel dès que les conditions locales sont vérifiées. En d'autres termes, dans tous ces cas, le *principe de Hasse* est vérifié. Mais on sait, depuis 1962, que le test local ne suffit pas pour les surfaces cubiques générales (Swinnerton-Dyer [21], Mordell [16]), et, en 1966, Cassels et Guy [4] donnèrent le premier exemple de surface cubique diagonale ne satisfaisant pas le principe de Hasse:

(2) $\quad 5x^3 + 9y^3 + 10z^3 + 12t^3 = 0 .$

Leur ordinateur leur avait fourni une liste de quelques 250 équations du type (1) avec a,b,c,d entiers (petits), ayant des solutions dans chaque complété de $\mathbb{Q}$, mais n'ayant pas de solution rationnelle de petite hauteur (i.e. avec x,y,z,t entiers et petits en valeur absolue). Ce n'est qu'en 1978 que fut traité un second exemple (Bremner [3]), lui aussi pris dans la liste de Cassels et Guy:

(3) $\quad x^3 + 4y^3 + 10z^3 + 25t^3 = 0 .$

Chez Cassels et Guy comme chez Bremner, l'analyse qui mène à la conclusion $V(\mathbb{Q})=\emptyset$ est très élaborée. Elle nécessite la connaissance précise des groupes de classes et d'unités de diverses extensions cubiques et bicubiques de $\mathbb{Q}$, et elle ne semble pas se prêter à une généralisation systématique qui mènerait à un algorithme (au moins conjectural) permettant de décider si l'équation (1) a une solution rationnelle non triviale.

En 1970, Manin [13] proposa une interprétation générale de divers contre-exemples au principe de Hasse figurant dans la littérature, en termes du groupe de Brauer-Grothendieck, cf. §0 ci-après. Ce nouveau test pour l'existence (ou plutôt la non-existence) de points rationnels, qu'on peut voir aussi comme une obstruction au principe de Hasse - *l'obstruction de Manin au principe de Hasse* - n'est pas toujours facile à mettre en oeuvre. Dans son livre sur les *"formes cubiques"* paru en 1972, Manin [14] essaie en particulier d'interpréter l'exemple de Cassels et Guy au moyen de son obstruction, mais le calcul est peu convaincant. En outre, il s'appuie de façon essentielle sur les résultats de factorisation de Cassels et Guy, si bien qu'on ne voit pas comment généraliser les arguments à d'autres surfaces (1).

L'objet du présent article est de développer une méthode de calcul de l'obstruction de Manin dans le cas des surfaces cubiques diagonales définies sur $\mathbb{Q}$, méthode qui soit effective et relativement simple, au point d'aboutir à une exploitation systématique et à son calcul sur ordinateur.

Le calcul a été effectué par M. Vallino sur IBM 4341 pour toutes les équations (1) à coefficients entiers positifs <100 (ce qui couvre bien sûr très largement la liste originelle de Cassels et Guy). Ce calcul a donné, à équivalences élémentaires près, 245 contre-exemples au principe de Hasse, l'exemple de Bremner étant celui qui minimise le produit abcd. De plus, et c'est là sans doute le résultat le plus intéressant, on a trouvé une solution rationnelle non triviale pour toutes les équations ayant des solutions locales et sans obstruction de Manin. Ceci conforte, au moins pour les surfaces (1), la conjecture suivante: *pour les surfaces rationnelles définies sur un corps de nombres, l'obstruction de Manin est la seule obstruction au principe de Hasse.* Si tel était le cas, l'algorithme décrit dans notre article fournirait une méthode entièrement effective pour décider si une équation du type (1) a une solution non triviale.

Les grandes lignes de la méthode sont décrites au §0 ci-après. On y trouve aussi la description du contenu des autres paragraphes. Nous nous contentons de citer ici quelques résultats particulièrement simples (voir §5):

Proposition 2. *S'il existe un nombre premier* p *de mauvaise réduction pour la surface* V *d'équation* (1) *tel que* V *ne soit pas rationnelle sur* $\mathbb{Q}_p$, *alors il n'y a pas d'obstruction de Manin au principe de Hasse pour* V.

Dans un tel cas nous dirons plutôt: *l'obstruction de Manin est vide pour* V.

Corollaire. *S'il existe un nombre premier* p *qui divise un, et un seul, des coefficients de l'équation* (1), *supposés entiers sans facteur cubique, alors l'obstruction de Manin au principe de Hasse pour la surface* V *est vide.*

Conjecture. *Sous l'hypothèse du corollaire,* $\prod_{\ell} V(\mathbb{Q}_\ell) \neq \emptyset \Longrightarrow V(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$.

Il s'agit évidemment d'un cas particulier de la conjecture générale ci-dessus, compte tenu du corollaire précédent. Cette conjecture particulière suffirait à entraîner la validité du *principe de Hasse pour les hypersurfaces cubiques diagonales dans* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$ *pour* $n \geq 4$, *et l'existence de points rationnels sur celles-ci pour* $n \geq 6$ (voir §9).

Voici enfin une série infinie de contre-exemples au principe de Hasse (voir §7):

Proposition 5. *Les surfaces cubiques* V *d'équation homogène*

$$x^3 + p^2y^3 + pqz^3 + q^2t^3 = 0 \tag{4}$$

où $p \equiv 2$ *et* $q \equiv 5 \bmod 9$ *sont premiers, ont un point dans chaque complété de* $\mathbb{Q}$, *mais n'en ont pas dans* $\mathbb{Q}$.

Le plan de l'article est le suivant:

§0 Plan de la méthode
§1 Calcul du groupe de Brauer
§2 Cohomologie du groupe $(\mathbb{Z}/3)^2$
§3 L'algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$
§4 Le calcul de l'obstruction
§5 Le premier cas
§6 Le second cas
§7 Exemples
§8 La procédure
§9 Les hypersurfaces cubiques diagonales
§10 Variétés de descente

Les résultats de cet article ont été annoncés dans un exposé au Séminaire de théorie des nombres de Paris [7], auquel on peut aussi se reporter pour la description - sans justification - de l'algorithme établi dans le présent travail.

§0. Plan de la méthode

Soit V une variété projective et lisse définie sur le corps de nombres k. On suppose $V(k_v)\neq\emptyset$ pour chaque complété k_v de k. L'obstruction de Manin au principe de Hasse (Manin [13], [14]) est la condition suivante:

(5) pour tout $(x_v)\in\prod_v V(k_v)$, il existe $A\in Br(V)$ telle que $\sum_v inv_v A(x_v)\neq 0$.

Dans cette expression, $A(x_v)\in Br\, k_v$ désigne la fibre de A au point x_v et inv_v désigne l'invariant local $Br\, k_v \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. La formule de produit assure que cette condition (5) est une obstruction à l'existence d'un point rationnel pour V.

Si $\bar{k}$ désigne une clôture galoisienne de k et si $\overline{V}=V\times_k\bar{k}$, on dit que V est une variété rationnelle si $\overline{V}$ est birationnelle à l'espace projectif. C'est le cas des surfaces cubiques lisses. Pour une telle variété $Pic\,\overline{V}$ est un module galoisien $\mathbb{Z}$-libre de rang fini et on a une suite exacte naturelle:

(6) $$0 \longrightarrow Br(k) \longrightarrow Br(V) \longrightarrow H^1(k,Pic\,\overline{V}) \longrightarrow 0\,.$$

Le groupe de cohomologie galoisienne $H^1(k,Pic\,\overline{V})$ est fini et on peut se limiter dans la condition (5) à la considération d'un nombre fini d'algèbres A_i qui engendrent $Br(V)$ modulo $Br(k)$.

L'objet du §1 est précisément le calcul de $Br(V)/Br(k)$ pour une surface cubique diagonale. On trouve 0, $\mathbb{Z}/3$ ou $(\mathbb{Z}/3)^2$, mais pour notre problème on s'intéresse uniquement à des cas où il vaut $\mathbb{Z}/3$, car dans les autres cas la surface V a de façon "évidente" un point dans k.

Soit alors $\mathcal{A}$ une algèbre dont la classe engendre $Br(V)$ modulo $Br(k)$. D'après la discussion précédente, la condition (5) s'écrit alors simplement:

(7) pour tout $(x_v)\in\prod_v V(k_v)$ on a $\sum_v inv_v\mathcal{A}(x_v)\neq 0$.

Pour toute place v de bonne réduction pour V et $\mathcal{A}$, et pour tout $x_v\in V(k_v)$, on a (V est projective et $Br\,\mathcal{O}_v=0$ pour l'anneau des entiers $\mathcal{O}_v$ de k_v):

(8) $$inv_v\mathcal{A}(x_v)=0\,.$$

Il suffit donc de considérer les places v, en nombre fini, de mauvaise réduction.

Pour continuer le calcul il faut disposer d'une représentation commode de $\mathcal{A}$ qui permette d'évaluer effectivement les invariants locaux $\mathrm{inv}_v \mathcal{A}(x_v)$. Un cas a priori très favorable est celui où la variété V devient rationnelle sur une extension cyclique k' de k, ce qui est le cas des surfaces cubiques diagonales. On dispose en effet alors du diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & \longrightarrow & \mathrm{Br}(k,k') & \longrightarrow & \mathrm{Br}(V,k') & \longrightarrow & H^1(G,\mathrm{Pic}\, V_{k'}) \longrightarrow 0 \\
 & & & & \| & & \downarrow & & \downarrow \partial \\
(9) & & 0 & \longrightarrow & H^2(G,k'^*) & \longrightarrow & H^2(G,k'(V)^*) & \longrightarrow & H^2(G,k'(V)^*/k'^*) \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & & & H^2(G,\mathrm{Div}\, V_{k'}) & = & H^2(G,\mathrm{Div}\, V_{k'}).
\end{array}
$$

On note $\mathrm{Br}(V,k')$ le noyau de $\mathrm{Br}(V) \longrightarrow \mathrm{Br}(V_{k'})$ et G le groupe de Galois de k'/k. On peut donc prendre $\mathcal{A}$ dans $\mathrm{Br}(V,k')$ et la représenter par un élément du noyau de

$$k(V)^*/Nk'(V)^* \longrightarrow \mathrm{Div}\, V/N(\mathrm{Div}\, V_{k'})$$

puisque $H^2(G,M)=M^G/N_G M$. Le calcul de $\mathcal{A}(x)$ est alors très simple: si $\mathcal{A}$ est représentée par la fonction f, l'élément $\mathcal{A}(x)\in H^2(G,k'^*)\simeq k^*/Nk'^*$ n'est autre que la classe de $f(x)$ dans k^*/Nk'^* après modification éventuelle de f pour qu'elle soit inversible en x.

Dans le cas des surfaces de Châtelet cette méthode de calcul s'applique sans difficulté. Il n'en est pas de même pour les surfaces cubiques diagonales pour la simple raison suivante: dans le diagramme

$$
\begin{array}{ccc}
 & & H^{-1}(G,\mathrm{Pic}\, V_{k'}) \\
 & & \downarrow \partial \\
k(V)^*/Nk'(V)^* & \longrightarrow & k(V)^*/k^*Nk'(V)^*
\end{array}
$$

on sait trouver un générateur ζ du groupe $H^{-1}(G,\mathrm{Pic}\, V_{k'})$ mais on ne sait pas trouver simplement une fonction $\omega\in k(V)^*$ qui relève $\partial(\zeta)$. Il se trouve qu'on sait cependant le faire, de façon très simple, au niveau d'une extension bicyclique K/k de degré 9 contenant k'/k. Aussi a-t-on besoin de savoir calculer commodément la cohomologie des groupes bicycliques, ce qui est l'objet du §2.

Ayant ainsi représenté au §3 l'algèbre $\mathcal{A}$ qui engendre Br(V)/Br(k), il reste à calculer $\mathrm{inv}_v\mathcal{A}(x_v)$ pour les divers x_v relatifs aux places de mauvaise réduction. Ces invariants sont à valeurs dans $\mathbb{Z}/3$. On suppose désormais $k=\mathbb{Q}(\theta)$ où $\theta^2+\theta+1=0$. Il se produit alors une alternative qui simplifie les calculs:

1er cas: il existe une place v_0 de mauvaise réduction en laquelle $\mathrm{inv}_{v_0}\mathcal{A}(x_{v_0})$ prend toutes les valeurs possibles dans $\mathbb{Z}/3$;

2ème cas: pour toute place v de mauvaise réduction la surface V est rationnelle sur k_v.

Il est immédiat que dans le premier cas l'obstruction de Manin est vide. Dans le second cas, si v est de mauvaise réduction, $\mathcal{A}(x_v)$ ne dépend pas du point x_v et on peut poser:

$$(10) \qquad i_v = \mathrm{inv}_v\mathcal{A}(x_v) \quad \text{et} \quad i = \sum_v i_v \,.$$

L'obstruction de Manin s'écrit alors simplement:

$$(11) \qquad i \neq 0 \,.$$

Le §4 expose les détails du calcul de l'obstruction de Manin sans aboutir immédiatement à une procédure facile à utiliser dans tous les cas. Le §5 traite le 1er cas comme indiqué ci-dessus. Le §6 indique comment procéder à l'achèvement du calcul dans le cas où V est rationnelle aux places de mauvaise réduction. On montre au §7 sur des exemples, dont ceux de Cassels et Guy et de Bremner, comment la méthode s'applique. Au §8, on résume les étapes du calcul sous la forme d'une procédure proche du programme pour ordinateur, et on décrit les résultats des calculs de M.Vallino sur ordinateur. En particulier, on donne la table des contre-exemples au principe de Hasse dans le domaine étudié. Le §9 contient l'application aux hypersurfaces cubiques diagonales de la conjecture sur l'obstruction de Manin mentionnée dans l'introduction. Enfin, au §10, on applique aux surfaces cubiques diagonales la méthode de la descente [8], ce qui ramène dans ce cas la conjecture sur l'obstruction de Manin au problème de la validité du principe de Hasse pour certaines intersections très particulières de deux hypersurfaces cubiques (proposition 11).

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

§1. Calcul du groupe de Brauer

Dans ce paragraphe k est un corps de nombres ou un complété d'un tel corps. On suppose que k contient θ vérifiant $\theta^2+\theta+1=0$. On veut calculer Br(V) pour la surface cubique d'équation homogène

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0 \qquad a, b, c, d \in k^* . \tag{1}$$

Vu les hypothèses sur k, on a la suite exacte:

$$\mathrm{Br}(k) \longrightarrow \mathrm{Br}(V) \longrightarrow H^1(k, \mathrm{Pic}\,\overline{V}) \longrightarrow 0$$

avec même une injection au début si V a un point dans k ou dans chaque complété. L'objet de ce paragraphe est d'établir la proposition suivante:

Proposition 1. *Soit* V *la surface cubique diagonale d'équation* (1) *définie sur le corps* k. *On fait les hypothèses ci-dessus sur* k. *On trouve:*

$$H^1(k, \mathrm{Pic}\,\overline{V}) = \begin{cases} 0 & \text{si l'un des } ab/cd \text{ est un cube,} \\ (\mathbb{Z}/3)^2 & \text{pour } x^3 + y^3 + z^3 + dt^3 = 0 \text{ si } d \text{ n'est pas un cube,} \\ \mathbb{Z}/3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce dernier cas est le cas générique. Dans le second cas il y a évidemment un point rationnel, dans le premier aussi lorsque k est un corps de nombres et que V a un point dans chaque complété de k. On a en effet le lemme suivant:

Lemme 1. *Soit* V *une surface cubique diagonale telle que* ad/bc *soit un cube. On a l'équivalence:*

$$V(k) \neq \emptyset \iff V \text{ est k-rationnelle.}$$

Si k *est un corps de nombres, une telle surface vérifie le principe de Hasse.*

En effet, on peut mettre l'équation de V sous la forme:

$$x^3 + \lambda y^3 + \mu(z^3 + \lambda t^3) = 0$$

ou encore, en considérant l'extension galoisienne $k'=k(\sqrt[3]{\lambda})$, sous la forme affine:

$$N_{k'/k}(\xi) = \mu .$$

Ainsi, V contient un ouvert qui est un torseur sous le k-tore $R^1_{k'/k}\mathbb{G}_m$, et ce tore, de dimension 2, est une variété affine rationnelle sur k, cf. [25]. On a donc:

$$V(k) \neq \emptyset \iff \mu \in N_{k'/k}k'^* \iff V \text{ est k-rationnelle.}$$

D'autre part, on sait bien que le tore $R^1_{k'/k}\mathbb{G}_m$ vérifie le principe de Hasse pour k'/k de degré 3. C'est là le résultat de Selmer [17] évoqué dans l'introduction.

Avant de prouver la proposition 1, il nous faut introduire un certain nombre de notations qui serviront très souvent dans la suite.

On peut écrire l'équation de V sous la forme:

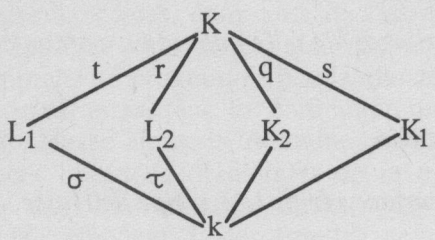
$$x^3 + \lambda y^3 + \mu z^3 + \lambda\mu\nu t^3 = 0 \qquad (1')$$
$$\lambda = b/a\,,\quad \mu = c/a\,,\quad \nu = ad/bc\,.$$

On pose alors:

$$\alpha = \sqrt[3]{\lambda} \qquad \gamma = \sqrt[3]{\nu} \qquad (12)$$
$$\beta = \alpha\gamma = \sqrt[3]{d/c} \qquad \delta = \alpha/\gamma \sim \sqrt[3]{ac/bd}\,,$$

où le signe $\sim$ veut dire "à un élément de k^* près". Dans le cas générique, le corps $K=k(\alpha,\gamma)$ est une extension de degré 9, de groupe de Galois $\simeq(\mathbb{Z}/3)^2$. On a alors le diagramme de corps suivant, où les notations sont claires:

(13)



$L_1 = k(\gamma)$ $L_2 = k(\delta)$ $K_2 = k(\beta)$ $K_1 = k(\alpha)$

s engendre $Gal(K/K_1)$
t engendre $Gal(K/L_1)$
$q = st^2$ $r = st$
σ est la restriction de q, r ou s à L_1
τ est la restriction de q, t ou s^2 à L_2.

La surface V étant donnée, il y a 3 choix possibles pour K, suivant la façon d'écrire l'équation de V sous la forme (1'). Pour le calcul du groupe de Brauer il nous faut encore considérer l'extension

$$K' = K(\gamma') \text{ où } \gamma' = \sqrt[3]{ab/cd}$$

non triviale dans le cas générique. On prolonge s,t,q,r à Gal(K'/k) en les faisant agir trivialement sur γ'. On introduit:

$$\alpha' = \sqrt[3]{\mu} = \sqrt[3]{c/a} \sim \gamma\gamma'$$
$$\beta' = \sqrt[3]{\mu\nu} = \sqrt[3]{d/b} \sim \gamma'/\gamma .$$

On choisit les générateurs s,t,w de telle sorte qu'ils agissent suivant le tableau ci-dessous:

(14)

$u \rightarrow$	α	β	γ	δ	α'	β'	γ'
$^s u/u$	1	θ	θ	θ^2	θ	θ^2	1
$^t u/u$	θ	θ	1	θ	1	1	1
$^w u/u$	1	1	1	1	θ	θ	θ

On considère alors les droites suivantes sur $V_{K'}$:

$$L(i) \begin{cases} x + \theta^i \alpha y = 0 \\ z + \theta^i \beta t = 0 \end{cases} \qquad L'(i) \begin{cases} x + \theta^i \alpha y = 0 \\ z + \theta^{i+1} \beta t = 0 \end{cases} \qquad L''(i) \begin{cases} x + \theta^i \alpha y = 0 \\ z + \theta^{i+2} \beta t = 0 \end{cases}$$

$$M(i) \begin{cases} x + \theta^i \alpha' z = 0 \\ y + \theta^{i+1} \beta' t = 0 \end{cases} \qquad M'(i) \begin{cases} x + \theta^i \alpha' z = 0 \\ y + \theta^{i+2} \beta' t = 0 \end{cases} \qquad M''(i) \begin{cases} x + \theta^i \alpha' z = 0 \\ y + \theta^i \beta' t = 0 . \end{cases}$$

On pose:

$$L = L(0) + L(1) + L(2)$$
$$M = M(0) + M(1) + M(2)$$

et, si H est le diviseur d'une section hyperplane, on définit ℓ dans Pic $V_{K'}$ par:

(15) $$H = 3\ell - L - M .$$

On a:

$$\text{(16)} \qquad \operatorname{Pic} \overline{V} = \operatorname{Pic} V_{K'} = \mathbb{Z}\ell \oplus \bigoplus_{i=0}^{2} \mathbb{Z}.L(i) \oplus \bigoplus_{i=0}^{2} \mathbb{Z}.M(i)\,.$$

L'action du groupe de Galois de K'/k est donnée, toujours dans le cas générique, par:

(17)

$g \rightarrow$	w	t	s	r	q
${}^{g}L(i)$	L(i)	L(i+1)	L'(i)	L'(i+1)	L'(i+2)
${}^{g}M(i)$	M(i+1)	M(i)	M'(i+1)	M'(i+1)	M'(i+1)
${}^{g}L'(i)$	L'(i)	L'(i+1)	L''(i)	L''(i+1)	L(i)
${}^{g}M'(i)$	M'(i+1)	M'(i)	M''(i+1)	M''(i+1)	M''(i+1)
${}^{g}L''(i)$	L''(i)	L''(i+1)	L(i)	L(i+1)	L(i+2)
${}^{g}M''(i)$	M''(i+1)	M''(i)	M(i+1)	M(i+1)	M(i+1)

D'après le lemme 1, la variété V est K-rationnelle, d'où:

$$\text{(18)} \qquad \operatorname{Pic} V_K = (\operatorname{Pic} V_{K'})^{w} = \mathbb{Z}.\ell \oplus \mathbb{Z}.L(0) \oplus \mathbb{Z}.L(1) \oplus \mathbb{Z}.L(2) \oplus \mathbb{Z}.M\,,$$

puisque w agit trivialement sur L(i) et que ${}^{w}M(i)=M(i+1)$. D'après le tableau précédent, t permute les L(i) et agit trivialement sur L, M et donc sur ℓ d'après (15). Comme t-module, Pic V_K est donc de permutation:

$$\operatorname{Pic} V_K = \mathbb{Z}.\ell \oplus \mathbb{Z}[t].L(0) \oplus \mathbb{Z}.M \simeq \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}[t]$$

d'où:

$$H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{V}) = H^1(\sigma, \operatorname{Pic} V_K)^t)$$

et:

$$(\operatorname{Pic} V_K)^t = \mathbb{Z}.\ell \oplus \mathbb{Z}.L \oplus \mathbb{Z}.M$$

comme groupe abélien. Pour obtenir les structures galoisiennes il est bon d'écrire un certain nombre de relations dans Pic $\overline{V}$, relations obtenues par de simples calculs d'intersections:

$$\text{(19)} \qquad \begin{aligned} L'(i) &= 2\ell - L(i) - L(i+1) - M \\ L''(i) &= \ell - L(i) - L(i+2) \\ M'(i) &= \ell - M(i) - M(i+1) \\ M''(i) &= 2\ell - M(i) - M(i+2) - L\,. \end{aligned}$$

On trouve ainsi que l'action de σ sur ℓ, L et M est donnée par:

$$(20)\qquad \begin{aligned} {}^{\sigma}\ell &= 4\ell - L - 2M \\ {}^{\sigma}L &= 6\ell - 2L - 3M \\ {}^{\sigma}M &= 3\ell - 2M \end{aligned}$$

et on note que:

$$^{\sigma}(\ell - M) = \ell - L\,.$$

Comme σ-module, on a donc la décomposition suivante:

$$(21)\qquad (\mathrm{Pic}\ V_K)^t = \mathbb{Z}.H \oplus (\mathbb{Z}[\sigma]/N_\sigma).(\ell - L) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}[\sigma]/N_\sigma$$

dont le second facteur est formé des $a\ell+bL+cM$ avec $a+b+c=0$.

Etant donné un groupe $\simeq \mathbb{Z}/3$ dont on a choisi un générateur σ, et un σ-module R, le groupe de cohomologie $H^1(\sigma,R)$ s'identifie au quotient $_{N_\sigma}R/\Delta_\sigma R$ du noyau de la norme

$$N_\sigma = 1 + \sigma + \sigma^2$$

par l'image de

$$\Delta_\sigma = 1 - \sigma\,.$$

D'où le lemme suivant qui résume cette discussion:

Lemme 2. *Dans le cas générique,*

$$H^1(k,\mathrm{Pic}\ \overline{V}) = H^{-1}(\sigma,(\mathrm{Pic}\ V_K)^t) \simeq \mathbb{Z}/3$$

avec pour générateur ℓ–L *ou* ℓ–M.

Traitons ensuite le cas où K/k est de degré 9, mais $\sqrt[3]{\mu} \in K$. Autrement dit: K'=K. Il faut alors "oublier" w. En particulier: Pic V_K=Pic $\overline{V}$. Les actions de s,t,q,r sont encore données par (14) pour $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ et par (17) pour L(i), L'(i) et L"(i). Si

$$\alpha' = \sqrt[3]{\mu} \sim \alpha^m\gamma^n \qquad\qquad m\,,\ n \in \mathbb{Z}/3$$

il faut modifier (14) et (17) comme suit:

$u \to$	α'	β'	γ'
$^{s}u/u$	θ^{n}	θ^{n+1}	θ^{n+2}
$^{t}u/u$	θ^{m}	θ^{m}	θ^{m}

puis:

$g \to$	t	s
$^{g}M(i)$	M(i+m)	M'(i+n)
$^{g}M'(i)$	M'(i+m)	M''(i+n)
$^{g}M''(i)$	M''(i+m)	M(i+n)

Comme t-module:

$$\text{Pic } V_K = \mathbb{Z}\ell \oplus \mathbb{Z}[t].L(0) \oplus \mathbb{Z}.M(0) \oplus \mathbb{Z}.M(1) \oplus \mathbb{Z}.M(2) \simeq \mathbb{Z}^4 \oplus \mathbb{Z}[t]$$

est encore de permutation, et comme groupe abélien:

$$(\text{Pic } V_K)^t = \mathbb{Z}\ell \oplus \mathbb{Z}\cdot L \oplus \mathbb{Z}\cdot M \qquad \text{si } m \neq 0$$
$$(\text{Pic } V_K)^t = \mathbb{Z}\ell \oplus \mathbb{Z}\cdot L \oplus \mathbb{Z}\cdot M(0) \oplus \mathbb{Z}\cdot M(1) \oplus \mathbb{Z}\cdot M(2) \qquad \text{si } m = 0\,.$$

Si $m \neq 0$, on a:

$$^{s}L = L' = 6\ell - 2L - 3M \quad \text{et} \quad ^{s}M = M' = 3\ell - 2M\,.$$

La situation est donc identique au cas générique, et la conclusion est la même. Si $m=0$, l'action de σ est donnée par les formules:

$$^{\sigma}M(i) = M'(i+n) \quad ^{\sigma}L = L' \quad ^{\sigma}M = M' \quad ^{\sigma}(\ell - M) = \ell - L\,.$$

Traitons d'abord le cas $n=0$, autrement dit, $\sqrt[3]{\mu} \in k$. La structure galoisienne de $(\text{Pic } V_K)^t$ est alors donnée par:

$$(22) \qquad (\text{Pic } V_K)^t = \mathbb{Z}[\sigma].M(0) \oplus (\mathbb{Z}[\sigma]/N_\sigma)\cdot(\ell - L) \simeq \mathbb{Z}[\sigma] \oplus \mathbb{Z}[\sigma]/N_\sigma\,.$$

Autrement dit, la structure galoisienne est différente du cas générique, mais rien ne change pour le H^1 et le lemme 2 vaut encore dans ce cas. Pour établir (22), on note que:

需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com