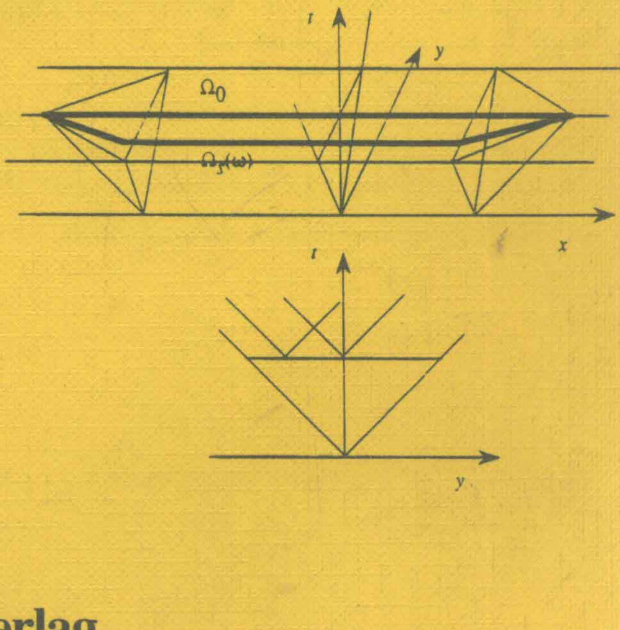
Lecture Notes in Mathematics
1495

J. M. Bony G. Grubb L. Hörmander
H. Komatsu J. Sjöstrand

Microlocal Analysis and Applications

Montecatini Terme, 1989

Editors: L. Cattabriga, L. Rodino



Springer-Verlag

J. M. Bony G. Grubb L. Hörmander
H. Komatsu J. Sjöstrand

Microlocal Analysis and Applications

Lectures given at the 2nd Session of the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.)
held at Montecatini Terme, Italy, July 3-11, 1989

Editors: L. Cattabriga, L. Rodino

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York
London Paris Tokyo
Hong Kong Barcelona
Budapest

Authors

Jean Michel Bony
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
F-91128 Palaiseau, France

Gerd Grubb
Department of Mathematics
University of Copenhagen
Universitetsparken 5
DK-2100 Copenhagen, Denmark

Lars Hörmander
Department of Mathematics
University of Lund, Box 118
S-221 00 Lund, Sweden

Hikosaburo Komatsu
Department of Mathematics
Faculty of Science
University of Tokyo
Hongo, Tokyo 113, Japan

Johannes Sjöstrand
Département de Mathématiques
Université de Paris-Sud
F-91405 Orsay, France

Editors

Lamberto Cattabriga †

Luigi Rodino
Dipartimento di Matematica
Università di Torino
Via Principe Amedeo, 8
10123 Torino, Italy

Mathematics Subject Classification (1980): 35S05

ISBN 3-540-54948-X Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-54948-X Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

Typesetting: Camera ready by author
Printing and binding: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstr.
46/3140-543210 - Printed on acid-free paper

FOREWORD

The present volume contains the texts of the lectures delivered at the Second 1989 C.I.M.E. Session "Microlocal Analysis and Applications", held in Montecatini (Italy), from July 3 to July 11.

The Session aimed at exposing the foundations of the Microlocal Analysis and presenting some new applications in different areas of the Mathematical Analysis: nonlinear partial differential equations, boundary value problems, Gevrey spaces, spectral theory, singularities of solutions of linear equations. Invited lecturers were Jean-Michel Bony, Gerd Grubb, Lars Hörmander, Hikosaburo Komatsu and Johannes Sjöstrand.

This volume is dedicated to the memory of Lamberto Cattabriga, scientific codirector of the Session, who died on August 1989; we hope the following pages will be an adequate tribute to this eminent research work and to his outstanding human qualities.

Luigi Rodino

TABLE OF CONTENTS

Foreword V

J. M. BONY, Analyse microlocale des équations aux dérivées partielles non linéaires 1

G. G. GRUBB, Parabolic pseudo-differential boundary problems and applications 46

L. HÖRMANDER, Quadratic hyperbolic operators 118

H. KOMATSU, Microlocal analysis in Gevrey classes and in complex domains 161

J. SJÖSTRAND, Microlocal analysis for the periodic magnetic Schrödinger equation and related questions 237

List of participants 333

ANALYSE MICROLOCALE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON LINÉAIRES

Jean-Michel BONY
Centre de Mathématiques
École Polytechnique
91128 Palaiseau (France)

Depuis une dizaine d'années, un grand nombre de résultats ont été obtenus sur l'analyse des singularités des équations aux dérivées partielles non linéaires, et les outils de l'analyse microlocale, initialement développés pour les équations linéaires y ont joué un rôle majeur. Deux points, sur lesquels nous aurons l'occasion d'insister, nous semblent importants.

D'une part, les singularités des solutions offrent une bien plus grande variété de comportement que dans le cas linéaire. Même en nous limitant aux singularités faibles, nous verrons que le phénomène de l'interaction des singularités a un contenu très riche, tant du point de vue de la géométrie que de celui de l'analyse.

D'autre part, contrairement à ce que l'on aurait pu penser a priori, les problèmes non linéaires exigent plus d'analyse microlocale que les linéaires. Des calculs symboliques inhabituels et variés (symboles peu réguliers, à régularité définie de manière inductive, calculs multilinéaires, microlocalisations d'ordre supérieur) sont apparus dans ce cadre pour résoudre des problèmes spécifiques alors que (à l'exception notable de la seconde microlocalisation) les problèmes linéaires n'exigent pas une telle variété.

Nous voudrions commencer, dans cette introduction, par illustrer ces deux points. Nous allons essayer de décrire (après un bref rappel sur la théorie de Littlewood-Paley) une des idées communes à l'introduction de ces calculs exotiques. Nous exposerons ensuite, au n°0.3 la problématique de la propagation des singularités non linéaires, et décrirons brièvement l'organisation du cours.

Nous nous sommes strictement limités aux singularités faibles. Les singularités fortes (ondes de choc, de rarefaction, soniques,...) présentent une variété de comportement encore plus grande et ont des rapports importants avec l'analyse microlocale, mais il est clair qu'un tel sujet mériterait un cours à lui seul.

0.1 Décomposition de Littlewood-Paley

Il s'agit d'une décomposition dyadique dans l'espace des fréquences, permettant de lire facilement la régularité des fonctions ou des distributions considérées. On se donne une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, à support dans une couronne $C = \{\xi \mid k^{-1} \leq |\xi| \leq 2k\}$ avec $k > 1$, de telle sorte que l'on ait

$$\sum_0^\infty \varphi(2^{-j}\xi) = 1 - \psi(\xi)\ ,$$

où ψ est de classe C^∞ et a son support dans la boule unité. On peut alors décomposer tout élément de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ sous la forme suivante

$$u = u_{-1} + \sum_0^\infty u_j = \psi(D)u + \sum_0^\infty \varphi(2^{-j}D)\ ,$$

où les u_j ont leur spectre (c'est-à-dire le support de leur transformée de Fourier) contenu dans les couronnes $C_j = \{\xi \mid k^{-1}2^j \leq |\xi| \leq k2^{j+1}\}$ On écrira parfois $\Delta_j u$ au lieu de u_j et on notera $S_j(u)$ les sommes partielles de la série

$$S_j(u) = \psi(2^{-j}D)u = \sum_{-1}^{j} u_l$$

La propriété importante pour nous sera la caractérisation des espaces de Sobolev H^s et des espaces de fonctions Höldériennes C^α (voir [23] [8] ainsi que [39] pour la caractérisation des espaces de Besov).

Théorème 0.1.1 (a) *Si* $u \in H^s$, $s \in \mathbf{R}$, *on a* $\|\Delta_j u\|_{L^2} \leq c_j 2^{-js}$ *où la suite* c_j *appartient à* l^2.

(b) *Réciproquement, pour* $s \in \mathbf{R}$ [*resp.* $s > 0$], *si des fonctions* u_j *ont leur spectre contenu dans les couronnes* C_j [*resp. dans les boules de rayon* $k2^j$] *et vérifient* $2^{js}\|u_j\|_{L^2} \in l^2$, *la somme* $\sum_0^\infty u_j$ *appartient à* H^s.

La caractérisation suivante des espaces de Hölder est valable pour α non entier, et est encore valable pour α entier à condition de désigner par C^α, ce que nous ferons désormais, non pas l'espace des fonctions α fois continument différentiables, mais les espaces de Zygmund correspondants (voir [39]).

Théorème 0.1.2 (a) *Si* $u \in C^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, *on a* $\|\Delta_j u\|_{L^\infty} \leq \mathrm{C^{te}} 2^{-j\alpha}$.

(b) *Réciproquement, pour* $\alpha \in \mathbf{R}$ [*resp.* $\alpha > 0$], *si des fonctions* u_j *ont leur spectre contenu dans les couronnes* C_j [*resp. dans les boules de rayon* $k2^j$] *et vérifient* $2^{j\alpha}\|u_j\|_{L^\infty} \leq \mathrm{C^{te}}$, *la somme* $\sum_0^\infty u_j$ *appartient à* C^α.

0.2 Un principe général

La remarque qui va suivre décrit l'idée qui, avec des variantes, sera commune aux divers calculs symboliques que nous introduirons. Nous nous donnerons une fonction φ comme précédemment, ainsi qu'une fonction θ de classe C^∞, égale à 1 sur la couronne C_0 et à support dans une couronne C_0' de même type (avec une constante $k' > k$).

Soit A un opérateur dont on suppose seulement qu'il est borné sur $L^2(\mathbf{R}^n)$. On peut alors lui associer l'opérateur $\widetilde{A}$ défini comme suit

$$\widetilde{A}u = \sum_0^\infty \theta(2^{-j}D) \circ A \circ \varphi(2^{-j}D)\, u\ .$$

Une conséquence immédiate du théorème 0.1.1 est que $\widetilde{A}$ applique continûment H^s dans H^s pour tout s. En particulier, $\widetilde{A}$ transforme toute distribution (à support compact par exemple) en une distribution, et toute fonction C^∞ (à support compact) en une fonction C^∞.

Bien entendu, une telle construction n'est pas toujours utile. Elle dépend des choix, pour une large part arbitraires, des fonctions φ et θ. On n'obtiendra des résultats intéressants que si une modification de ces choix ne modifie $\widetilde{A}$ que par un opérateur qui soit 'meilleur', ce qui exigera des propriétés de commutation entre A et les partitions dyadiques.

Supposons par exemple que pour tout opérateur pseudo-différentiel P d'ordre 1, le commutateur $[A, P]$ soit borné sur L^2. Les opérateurs $2^j\theta(2^{-j}D)$ constituent une famille bornée d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 1, et il résulte du théorème du graphe fermé que les $[A, \theta(2^{-j}D)]$ ont une norme d'opérateur dans L^2 majorée par $\mathrm{C^{te}}2^{-j}$. Si on se donne deux fonctions θ_1 et θ_2 égales à 1 dans une couronne contenant le support de φ et si on forme les opérateurs $\widetilde{A_1}$ et $\widetilde{A_2}$ associés, on a, la fonction $\theta_1 - \theta_2$ s'annulant sur le support de φ,

$$(\widetilde{A_1} - \widetilde{A_2})u = \sum \Big([\theta_1(2^{-j}D), A] - [\theta_2(2^{-j}D), A]\Big)\, \varphi(2^{-j}D)u\ .$$

Si u appartient à H^s le membre de droite est une somme de termes à spectre dans des couronnes dyadiques dont la norme dans L^2 est majorée par $c_j 2^{-j(s+1)}$ avec $(c_j) \in l^2$, et il en résulte que $\widetilde{A_1} - \widetilde{A_2}$ est 1-régularisant, c'est-à-dire qu'il applique continûment H^s dans H^{s+1} pour tout s.

Le lecteur pourra vérifier qu'une modification de la fonction φ ne modifie $\widetilde{A}$ que par un opérateur régularisant d'ordre 1. Il verra également que l'opérateur $A - \widetilde{A}$ applique L^2 dans H^1.

L'idée ci-dessus permettra d'associer aux opérateurs de multiplication (et, avec quelques modifications, aux opérateurs de composition) les paramultiplications (et paracompositions). Dans un cadre plus général, nous devrons abandonner les décompositions de Littlewood-Paley, mais l'idée de prendre des opérateur 'en sandwich' entre des famille d'opérateurs mutuellement (presque) orthogonaux (comme ici les $\varphi(2^{-j}D)$) jouera un rôle central dans les microlocalisations d'ordre supérieur.

0.3 La propagation des singularités non-linéaires

Nous considérerons des équations non linéaires d'ordre m, dont la forme générale est la suivante

$$F(x, u, \nabla u, \ldots, \nabla^m u) = 0 . \tag{0.1}$$

Si u est une solution suffisamment régulière de 0.1, on peut définir l'opérateur linéarisé le long de u (en notant u_α la variable de F correspondant à $\partial^\alpha u$)

$$\mathcal{L}_u \varphi = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\partial F}{\partial u_\alpha}(x, u, \ldots, \nabla^m u) \partial^\alpha \varphi ,$$

et son symbole principal

$$l(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} \frac{\partial f}{\partial u_\alpha}(x, u, \ldots, \nabla^m u) \xi^\alpha .$$

Ce symbole dépend en général non seulement de l'équation, mais de la solution u elle-même. Cela dit, il en est indépendant dans le cas important des équations *semi-linéaires* où la fonction F de (0.1) est linéaire (à coefficients ne dépendant que de x) par rapport aux dérivées d'ordre maximum de u. Dans tous les cas, on définit la variété caractéristique

$$\mathrm{Car}(\mathcal{L}_u) = \{(x, \xi) \mid l(x, \xi) = 0\} \tag{0.2}$$

et les bicaractéristiques à partir de $l(x, \xi)$.

Pour décrire le type de résultats obtenus, nous supposerons donnée une solution u appartenant à H^s dans un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ contenant l'origine. Nous supposerons que l'opérateur linéarisé est strictement hyperbolique par rapport à une direction t, et nous poserons $\Omega^\pm = \Omega \bigcap \{\pm t > 0\}$. Nous supposerons également que Ω^+ est inclus dans le domaine d'influence de Ω^- (c'est-à-dire que toute bicaractéristique nulle rétrograde partant d'un point de Ω^+ rencontre Ω^- avant de sortir de Ω), et que l'on connaît parfaitement la régularité de u dans Ω^-. Le problème posé est alors le suivant :

Étant donnés $x_0 \in \Omega^+$ et $\sigma > s$, peut on déterminer si u appartient ou non à H^σ au point x_0?

Nous n'étudierons ici que des solutions suffisamment régulières, c'est-à-dire que nous supposerons s supérieur à un indice critique s_0 qui dépend de l'équation. La valeur $s_0 = n/2 + m + 1$ convient toujours, et cette valeur s'abaisse pour des équations quasi- ou semi-linéaires, mais la régularité imposée exige toujours la continuité des termes non linéaires apparaissant dans (0.1) et exclut donc l'apparition de chocs.

La solution du problème posé ci-dessus dépend fortement des valeurs relatives de s et σ. Le §1 développe le calcul paradifférentiel et montre comment celui-ci permet d'obtenir des réponses essentiellement complètes dans le cas $\sigma \leq 2s - s_0$. Les singularités se propagent le long des bicaractéristiques, se réfléchissent, diffractent comme dans le cas linéaire.

Au §2, nous étudions un certain nombre de cas où σ dépasse $2s$ qui peuvent être traités à l'aide du calcul pseudodifférentiel usuel et d'extensions du calcul paradifférentiel. On y voit apparaître le phénomène important de l'interaction des singularités.

Il s'agit notamment du cas $\sigma \leq 3s - 2s_0$. On obtient une très bonne réponse au problème posé. Les singularités ne peuvent parvenir au point x_0 que par propagation directe, ou par une seule interaction de singularités propagées.

On y étudie également le cas où σ est arbitrairement grand, mais où les singularités sont conormales dans le passé. Pour des situations géométriques simples, on obtient une bonne description des singularités dans l'avenir.

Les §§3 et 4 introduisent les microlocalisations d'ordre supérieur. Il s'agit d'un calcul symbolique, où on associe des opérateurs à des classes de symboles ayant des singularités d'un type précisé. La situation est en fait décrite dans le cadre du calcul de Weyl de Hörmander, les singularités permises des symboles étant caractérisées avec précision en termes de métriques sur l'espace des phases. De très nombreuses classes de symboles ayant un comportement singulier au voisinage de sous-variétés (elles-mêmes éventuellement singulières) rentrent dans ce cadre.

Le §5 revient sur les microlocalisations d'ordre 2, pour lesquelles on dispose de résultats dont l'équivalent n'a pas encore été démontré dans le cas de microlocalisations d'ordre plus élevé : invariance par opérateurs intégraux de Fourier et propriétés multiplicatives. Cela permet d'étudier des cas d'interaction des singularités plus complexes, interaction de trois ondes notamment.

Nous donnerons également des indications sur d'autres méthodes, dues à Melrose-Ritter permettant d'aborder les interactions d'ondes conormales. Enfin, nous essaierons de donner une idée de la théorie de G. Lebeau. Celle-ci n'est applicable que pour des solutions ayant des singularités conormales le long d'hypersurfaces (sous) analytiques. En revanche, elle permet d'obtenir des résultats incomparablement plus complets, l'exemple le plus frappant étant celui des caustiques non linéaires.

1 Calcul paradifférentiel et singularités d'ordre 2s

1.1 Paramultiplications

Conformément au principe décrit au n°0.2, il s'agit de remplacer les opérateurs de multiplication par une fonction peu régulière par des opérateurs agissant dans tous les espaces de Sobolev.

Soit donc $a \in \mathcal{S}'$. On appellera opérateur de paramultiplication par a et on notera T_a l'un quelconque des opérateurs définis par (1.1), (1.2) ou (1.3).

$$u \longmapsto \sum_{j=0}^{\infty} \theta(2^{-j}D)\left(a\,\varphi(2^{-j}D)u\right) \tag{1.1}$$

où φ et θ sont comme au n°0.2.

$$u \longmapsto \sum_{j=N_0}^{\infty} S_{j-N_0}(a)\Delta_j(u) \tag{1.2}$$

où, avec les notations du n°0.2, N_0 est choisi suffisamment grand pour que $2k^2 < 2^{N_0}$, ce qui garantit que les termes de la série (1.2) ont leurs spectres contenus dans une famille de couronnes dyadiques.

$$u \longmapsto \mathcal{F}^{-1}\left\{\int \chi(\xi-\eta,\eta)\widehat{a}(\xi-\eta)\widehat{u}(\eta)\,d\eta/(2\pi)^n\right\} \tag{1.3}$$

où la fonction $\chi(\zeta,\eta)$ est de classe C^∞ dans $\mathbf{R}^{2n}$, est homogène en dehors d'un compact, est égale à 0 pour $|\zeta| > \varepsilon_2\,|\eta|$ et à 1 pour $|\zeta| < \varepsilon_1\,|\eta|$ et $|\eta| > 1$ avec $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ assez petits. On a noté $\mathcal{F}^{-1}$ la transformation de Fourier inverse.

Le lecteur aura reconnu en (1.1) le mécanisme décrit au n°0.2, et dans les trois cas le même principe : la 'partie' de u dont le spectre est localisé près de $|\xi| = R$ se trouve multipliée non pas par a mais (à peu près) par la partie de a dont le spectre est contenu dans une boule de rayon cR avec $c < 1$.

On a le résultat suivant (voir [8])

Théorème 1.1.1 (a) *Si a appartient à $L^\infty(\mathbf{R}^n)$, les opérateurs T_a définis par (1.1), (1.2) ou (1.3) appliquent continûment chaque espace H^s ou C^α dans lui-même.*
(b) *Si $a \in C^\rho(\mathbf{R}^n)$ avec $\rho > 0$, le passage d'une définition à l'autre, ou la modification de φ, θ, N_0 ou χ, ne modifie T_a que par l'addition d'un opérateur ρ-régularisant, c'est-à-dire appliquant H^s dans $H^{s+\rho}$ et C^α dans $C^{\alpha+\rho}$ quels que soient s et α.*

Les propriétés les plus importantes des opérateurs de paramultiplication sont résumées dans le théorème suivant que nous n'énonçons que pour les espaces de Sobolev. Le lecteur pourra se reporter à [8] pour les espaces de Hölder et plus généralement à [39] pour les espaces de Besov.

Théorème 1.1.2 *Soient $u \in H^s(\mathbf{R}^n)$ et $v \in H^t(\mathbf{R}^n)$*
(a) *Si $s+t > 0$, on a*

$$uv = T_u v + T_v u + R(u,v)$$

où R applique continûment $H^s \times H^t$ dans $H^{s+t-n/2}$.
(b) *Si $s = t > n/2$ et si F est de classe C^∞ dans $\mathbf{R}^{n+2}$, on a*

$$F(x,u(x),v(x)) = T_{\partial F/\partial u}u + T_{\partial F/\partial v}v + r$$

avec $r \in H^{2s-n/2}$.
(c) *Si a et b appartiennent à C^ρ avec $\rho > 0$, l'opérateur $T_{ab} - T_a \circ T_b$ est ρ-régularisant.*

1.2 Paracomposition

Ce concept, introduit par Alinhac [1], substitue à l'opérateur de composition par un difféomorphisme peu régulier un opérateur appliquant H^s dans lui-même pour tout s. Plus précisément, on se donne deux ouverts Ω_1 et Ω_2 de $\mathbf{R}^n$ et un difféomorphisme χ de classe $C^{1+\rho}$ de Ω_1 sur Ω_2.

On définit alors l'opérateur de paracomposition χ^*, d'abord pour des distributions à support dans un petit voisinage de $x_0 \in \Omega_2$ par la méthode du n°0.2

$$\chi^* u = \sum_j \theta(2^{-j}D)\,(\Delta_j u \circ \chi)$$

avec la restriction importante suivante : le spectre de $\Delta_j u$ étant contenu dans la couronne C_j, on a toutes les raisons de penser que la 'partie importante' du spectre de $\Delta_j u \circ \chi$ est contenue dans l'image par ${}^t\chi'(x_0)$ de cette couronne, et il faudra choisir la constante k' du second système de couronnes assez grande pour que l'image de C_0 par les ${}^t\chi'(x)$ (x voisin de x_0) soit contenue dans C'_0.

On définit ensuite un opérateur χ^* de $\mathcal{D}'(\Omega_2)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ à l'aide d'une partition de l'unité α_i dans Ω_2 et de fonctions β_i égales à 1 près de $\chi^{-1}(\mathrm{Supp}(\alpha_i))$ par

$$\chi^* u = \sum_i \beta_i \chi_i^*(\alpha_i u)$$

où les χ_i^* sont construites comme ci-dessus.

On a alors les résultats suivants, pour lesquels nous renvoyons à [1].

Théorème 1.2.1 *On suppose toujours $\chi \in C^{1+\rho}$ avec $\rho > 0$.*
(a) *L'opérateur χ^* applique $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega_2)$ dans $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega_1)$ pour tout $s \in \mathbf{R}$.*
(b) *Une modification des choix de φ, θ, α_i, β_i ne modifie χ^* que par l'addition d'un opérateur ρ-régularisant, c'est-à-dire appliquant $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega_2)$ dans $H^{s+\rho}_{\mathrm{loc}}(\Omega_1)$ pour tout s.*
(c) *Si χ_1 est un difféomorphisme de classe $C^{1+\rho}$ de Ω_2 sur un ouvert Ω_3, l'opérateur $(\chi_1 \circ \chi)^* - \chi^* \circ \chi_1^*$ est ρ-régularisant.*
(d) *Si $\chi \in H^{n/2+1+\rho}$ et si $u \in H^{n/2+1+\sigma}$, $\sigma > 0$, on a*

$$u \circ \chi = \chi^* u + \sum T_{\partial u/\partial y_i \circ \chi}\chi_i + r$$

où r appartient à $H^{n/2+t}$ avec $t = \min(\rho + \sigma + 1\,,\, 2\rho + 2)$.

1.3 Opérateurs paradifférentiels

Il s'agit de construire une algèbre d'opérateurs contenant à la fois les opérateurs pseudodifférentiels classiques et les paramultiplications. Nous avons donné dans [8] la construction d'une algèbre assez restreinte, correspondant aux symboles polyhomogènes, mais suffisante pour paralinéariser les équations aux dérivées partielles non linéaires. Des extensions successives sont dues à Meyer [40], Godin [26] et à Hörmander [28] à la suite de travaux de Bourdaud [17].

Les classes de symboles Σ^m_ρ, pour $m \in \mathbf{R}$ et $\rho > 0$ non entier, sont constituées de fonctions $a(x, \xi)$ du type suivant

$$a = \sum_{l=0}^{[\rho]} a_{m-l} \tag{1.4}$$

où les fonctions a_{m-l} sont homogènes de degré $m - l$ et de classe C^∞ par rapport à ξ et sont de classe $C^{\rho-l}$ par rapport à x.

Il n'est pas difficile alors de décomposer de tels symboles en harmoniques sphériques par rapport à ξ sous la forme

$$a(x, \xi) = \sum_\nu a_\nu(x) h_\nu(\xi)\,,$$

et de leur associer les opérateurs notés encore T_a par

$$T_a u = \sum_\nu T_{a_\nu}(sh_\nu)(D) \tag{1.5}$$

où s est une fonction de classe C^∞, égale à 1 en dehors d'un compact et nulle au voisinage de 0, et où les T_{a_ν} sont des paramultiplications.

A partir de l'expression (1.3) des paramultiplications, on peut donner la définition suivante de T_a, qui est équivalente modulo des opérateurs régularisants. On considère comme au n°1.1 une fonction $\chi(\zeta,\eta)$ de classe C^∞ dans $\mathbf{R}^{2n}$, homogène en dehors d'un compact, égale à 0 pour $|\zeta| > \varepsilon_2 |\eta|$ et à 1 pour $|\zeta| < \varepsilon_1 |\eta|$ et $|\eta| > 1$ avec $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ assez petits. On pose

$$T_a u = \mathcal{F}^{-1}\left\{\int \chi(\xi-\eta,\eta)\hat{a}(\xi-\eta,\eta)\hat{u}(\eta)\,d\eta/(2\pi)^n\right\},$$

en notant $\hat{a}$ la transformée de Fourier de a par rapport à la première variable.

Il en résulte que T_a peut également s'écrire comme un opérateur pseudo-différentiel

$$T_a u(x) = \int e^{ix\cdot\eta} a_\chi(x,\eta)\hat{u}(\eta)\,d\eta/(2\pi)^n$$

avec $\hat{a}_\chi(\zeta,\eta) = \chi(\zeta,\eta)\hat{a}(\zeta,\eta)$.

On voit facilement que a_χ appartient à la classe de symboles $S^m_{1,1}$ mais avec les améliorations suivantes :

$$\left|D^\alpha_\eta D^\beta_x a_\chi(x,\eta)\right| \le \begin{cases} \mathrm{C^{te}}(1+|\eta|)^{m-|\alpha|} & \text{pour } |\beta| < \rho \\ \mathrm{C^{te}}(1+|\eta|)^{m-|\alpha|+|\beta|-\rho} & \text{pour } |\beta| > \rho \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\hat{a}_\chi(\zeta,\eta) = 0 \qquad \text{pour } |\zeta| > \varepsilon_2 |\eta| \,. \tag{1.7}$$

Les résultats de Bourdaud [17] montrent que les opérateurs appartenant ainsi que leurs adjoints aux espaces $Op(S^m_{1,1})$ appliquent H^s dans H^{s-m} et constituent une algèbre graduée. Leurs symboles b ont été caractérisés par Hörmander [28] : on doit avoir $b \in S^m_{1,1}$, et $\hat{b}(\zeta,\eta)$ doit être 'plat' (en un sens convenable) près de $\zeta+\eta = 0$. Ce dernier point est garanti pour a_χ par (1.7) dès que $\varepsilon_2 < 1$.

Il devient alors possible de définir les opérateurs paradifférentiels d'ordre m et de régularité ρ comme les opérateurs $b(x,D)$, où $b \in S^m_{1,1}$, est tel que $\hat{b}$ est plat près de $\zeta+\eta = 0$ et vérifie les estimations (1.6). Les résultats du calcul symbolique (avec la règle standard de composition des symboles), sont valables dans ce cadre plus général, les développements asymptotiques du calcul pseudodifférentiel usuel devant être remplacés par des développements limités aux $[\rho]$ premiers termes.

Nous n'énoncerons les résultats du calcul paradifférentiel que dans le cadre plus restreint des classes Σ^m_ρ et de la quantification donnée par (1.5). L'avantage est qu'il est plus agréable, pour les applications au équations aux dérivées partielles non linéaires, de dire que le symbole d'une paramultiplication T_a est a et non a_χ. Cela dit, dans le cadre général, un passage au quotient *ad hoc* dans l'espace des symboles résoudrait aisément ce problème.

Enfin, si Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, on définit les classes $\Sigma^m_\rho(\Omega)$ comme les fonctions définies dans $\Omega\times\mathbf{R}^n$ coïncidant, localement en x, avec des fonctions de $\Sigma^m_\rho(\mathbf{R}^n)$. Il est facile d'associer à de tels symboles des opérateurs proprement supportés dans Ω par le procédé classique

$$T_a u = \sum_i \beta_i T_{\beta_i a}(\alpha_i u)$$

où les α_i constituent une partition de l'unité dans Ω, où les β_i valent 1 au voisinage de $\mathrm{Supp}(\alpha_i)$ et où $(\mathrm{Supp}(\beta_i))$ est une famille localement finie (les $T_{\beta_i a}$ étant définis par (1.5)).

On dira que $A \in \mathrm{Op}(\Sigma^m_\rho)$ si A est somme d'un opérateur T_a comme ci-dessus, avec $a \in \Sigma^m_\rho$, et d'un opérateur appliquant H^s_{loc} dans $H^{s-m+\rho}_{\mathrm{loc}}$. Le résultat fondamental est le suivant

Théorème 1.3.1
(a) *L'application (1.5) induit une bijection, indépendante des choix arbitraires que comporte sa définition, entre* Σ_ρ^m *et le quotient de* $\mathrm{Op}\Sigma_\rho^m$ *par l'espace des opérateurs appliquant* H^s_{loc} *dans* $H^{s-m+\rho}_{\mathrm{loc}}$ *pour tout* s. *On note* $A \mapsto \sigma(A)$ *l'application inverse de* $\mathrm{Op}\Sigma_\rho^m$ *dans* Σ_ρ^m.
(b) *Pour* $A \in \Sigma_\rho^m$ *et* $B \in \Sigma_\rho^{m'}$, *on a* $A \circ B \in \Sigma_\rho^{m+m'}$ *avec*

$$\sigma(A \circ B) = \sigma(A)\#\sigma(B) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \widetilde{\sum_\alpha} \partial_\eta^\alpha \sigma(A) D_x^\alpha \sigma(B)/\alpha!$$

où $\widetilde{\sum}$ *signifie que l'on ne garde dans la somme que les termes pour lesquels les dérivées ont un sens (c'est-à-dire que, pour le terme* a_{m-l} *de (1.4), on ne conserve que les dérivées d'ordre* $\leq [\rho] - l$*).*

Si $\rho > 1$, le commutateur $[A, B]$ appartient à $\mathrm{Op}\Sigma_\rho^{m+m'-1}$, et son symbole est donné par le développement habituel (tronqué) ; si $\rho < 1$, c'est un opérateur appliquant H^s_{loc} dans $H^{s-m-m'+\rho}_{\mathrm{loc}}$. Enfin l'adjoint de A appartient aussi à Σ_ρ^m avec un symbole donné par la formule habituelle (tronquée).

1.4 Invariance

Un des résultats les plus importants de la théorie d'Alinhac [1] est que les opérateurs de paracomposition transforment les opérateurs paradifférentiels en eux-mêmes.

Théorème 1.4.1 *Soit* χ *un difféomorphisme de classe* $C^{1+\rho}$ *de* Ω_1 *sur* Ω_2 *et soit* $A \in \mathrm{Op}\Sigma_\rho^m(\Omega_2)$. *Alors, on a*

$$\widetilde{A} = \chi^* \circ A \circ (\chi^{-1})^* \in \Sigma_\rho^m(\Omega_1)\ ,$$

et le symbole principal de $\widetilde{A}$ *est égal à* $a_m(\chi(x), {}^t(\chi')^{-1}\xi)$

L'invariance sous l'effet des opérateurs intégraux de Fourier a été étudiée par Boulkhemair [16]. Il faut d'abord modifier les classes de symboles paradifférentiels en définissant $\overset{\circ}{\Sigma}_\rho{}^m$ comme l'espace des $a(x,\xi)$ appartenant localement à $H^{n+\rho}$ par rapport à l'ensemble des variables $(x,\xi) \in \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n \setminus 0)$ et vérifiant des estimations analogues à celles des fonctions homogènes en ξ de degré $\leq m$.

Théorème 1.4.2 *Soit* F *un opérateur intégral de Fourier elliptique associé à une transformation canonique* χ *d'inverse* F^{-1}, *et soit* $A \in \mathrm{Op}\ \overset{\circ}{\Sigma}_\rho{}^m$. *On a alors*

$$\widetilde{A} = F^{-1} \circ A \circ F \in \mathrm{Op}\ \overset{\circ}{\Sigma}{}_\rho^m\ .$$

En outre, pour $\rho > 2$, *si* a_m *est un symbole principal de* A, *il en résulte que* $a_m \circ \chi$ *est un symbole principal de* $\widetilde{A}$.

1.5 Paralinéarisation des équations non linéaires

Le résultat suivant joue un rôle capital. Les équations aux dérivées partielles non linéaires peuvent être ramenées à des équations paradifférentielles linéaires pour lesquelles il sera possible d'adapter, grâce au calcul symbolique, les arguments classiques relatifs aux équations linéaires.

Théorème 1.5.1 *Soit* $u \in H^s$, $s > n/2 + m$ *une solution réelle d'une équation non linéaire d'ordre* m

$$F(x, u, \dots, \nabla^m u) = 0\ , \tag{1.8}$$

où F *est une fonction réelle de classe* C^∞ *de ses arguments. On a*

$$Lu \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{|\alpha| \leq m} T_{\partial F/\partial u_\alpha} \partial^\alpha u = r \tag{1.9}$$

avec $r \in H^{2s-2m-n/2}_{\mathrm{loc}}$. *On a* $L \in \mathrm{Op}\Sigma_\rho^m$ *avec* $\rho = s - m - n/2$ *et son symbole principal est celui de l'opérateur linéarisé de (1.8) le long de* u.

Il suffit d' appliquer le théorème 1.1.2(b) (étendu au cas de plus de deux arguments) au membre de gauche de (1.8), les fonctions $\partial^\alpha u$ appartenant à H^{s-m}. D'autre part, l'opérateur linéarisée $\mathcal{L}_u$ étant défini par

$$\mathcal{L}_u \varphi = \sum_{|\alpha| \le m} \frac{\partial F}{\partial u_\alpha} \partial^\alpha \varphi ,$$

il est clair que les symboles principaux $\sum_{|\alpha|=m} \partial F / \partial u_\alpha \xi^\alpha$ (au i^m près) coïncident.

1.6 Applications

Les applications directes sont nombreuses et reposent essentiellement sur le théorème 1.5.1. Une solution $u \in H^s$ de l'équation non linéaire (1.8) est également solution de l'équation paradifférentielle linéaire (1.9) où on ne sait rien (dans cette première approche) du second membre r sinon qu'il appartient à $H^{2s-2m-n/2}$. Cela exclut d'en déduire des régularités (locales ou microlocales) de la solution supérieures à $H^{2s-m-n/2}$, mais permet de prouver des régularités comprises entre s et $2s - m - n/2$ (diminuée éventuellement de quelques unités selon la nature des problèmes). Bien entendu, cela exige $s > n/2 + m$ (qu'il faut éventuellement augmenter de quelques unités). En contrepartie, pour des équations qui ne sont pas totalement non linéaires, les régularité de r et de l'opérateur paradifférentiel L sont améliorées (voir [8] pour une analyse précise).

Par exemple, en adaptant à l'équation paradifférentielle $Lu = r$, les résultats de régularité microlocale aux points elliptiques (qui n'utilisent que le calcul symbolique), et la démonstration par inégalité d'énergie (voir [29]) de la propagation des singularités pour des équations de type principal réel (qui n'utilise que du calcul symbolique[1], directement ou via l'inégalité de Gårding précisée), on obtient les résultats suivants. On notera l_m le symbole principal de l'équation linéarisée.

Théorème 1.6.1 *Soit u une solution appartenant à H^s de l'équation (1.8).*
(a) *On suppose $s > n/2 + m$. Alors u appartient à $H^{2s-m-n/2}$ microlocalement en tout point (x_0, ξ_0) non caractéristique (c'est-à-dire tel que $l_m(x_0, \xi_0) \neq 0$).*
(b) *On suppose $s > n/2 + m + 1$. Soit (x_1, ξ_1) un point caractéristique. Supposons de plus qu'il existe une seule bicaractéristique de l issue de (x_1, ξ_1) (le théorème de Cauchy Lipschitz ne l'assure que si $s > n/2 + m + 2$), et soit $(x_2 \xi_2)$ un autre point de cette bicaractéristique. Pour tout $\sigma < 2s - m - n/2 - 1$, la solution u appartient microlocalement à H^σ en (x_2, ξ_2) si et seulement si elle appartient au même espace microlocalement en (x_1, ξ_1).*

1.6.2 Réflexion des singularités Un calcul paradifférentiel tangentiel a été construit par M. Sablé-Tougeron [48] pour étudier les problèmes aux limites non linéaires. Cela lui permet d'obtenir l'équivalent du théorème de Nirenberg sur la propagation des singularités.

On se donne une solution $u \in H^s$ de (1.8) dans un ouvert à frontière régulière Ω, avec $s > n/2 + m + 2$. Pour $\sigma < 2s - m - n/2 - 1$, on suppose que u appartient microlocalement à H^σ le long de certaines bicaractéristiques arrivant en un point (x_0', ξ_0') de la frontière. On suppose également que un nombre convenable de conditions aux limites non linéaires sont satisfaites. Alors sous des conditions algébriques (du type Lopatinski-Shapiro) portant sur les équations linéarisées, la solution appartient à H^σ le long des autres bicaractéristiques arrivant au même point et appartient au même espace microlocalement jusqu'au bord près de (x_0', ξ_0').

La réflexion des singularités de type conormal (voir n°2.2) a été étudié par M. Beals et Métivier [6] [7].

[1]Nous profitons de l'occasion pour rectifier une erreur qui s'est glissée dans la démonstration du théorème 6.2 de [8]. Il y est affirmé que les commutateurs figurant dans les relations (6.9) et (6.17) forment une famille bornée d'opérateurs paradifférentiels, ce qui est vrai pour toute définition raisonnable des familles bornées, mais pas pour celle donnée dans [8]. Il est plus simple de remarquer que ces commutateurs s'écrivent comme composés d'un opérateur paradifférentiel fixe, et de familles bornées d'opérateurs pseudodifférentiels.

1.6.3 Diffraction des singularités Des travaux de Leichtnam [35] et de Xu [53] (voir aussi [24]) sont consacrés à ce sujet pour une équation non linéaire du second ordre avec condition de Dirichlet. Dans [53], on obtient l'équivalent des résultats de propagation de Melrose-Sjöstrand sous une condition géométrique garantissant l'unicité de l'arc de bicaractéristique généralisée. Les démonstration font appel, notamment, à une 'paracomposition tangentielle'.

Des résultats de Williams [49] [50] montrent que, dans le cas semi-linéaire, des singularités qui n'apparaissent pas dans le cas linéaire (d'ordre $\simeq 2s$) peuvent naître de l'interaction de singularités avec la frontière.

1.6.4 Hypoellipticité non linéaire Plusieurs articles de Xu [51] [52] sont consacrés à ce sujet. Etant donnée une solution u de classe C^4 d'une équation non linéaire du second ordre, pour prouver que $u \in C^\infty$, il suffit de montrer que l'équation linéarisée satisfait une inégalité sous elliptique

$$\|\varphi\|^2_{H^\epsilon} \leq \mathrm{C^{te}} \left\{ |(\mathcal{L}_u\varphi \mid \varphi)| + \|\varphi\|^2_{L^2} \right\} . \tag{1.10}$$

Diverses conditions permettent de garantir cette inégalité : condition de Hörmander ou d'Oleinik-Radkevitch sur $\mathcal{L}_u$ (qui demande souvent plus de régularité initiale sur u); condition sur les volumes des boules non euclidiennes associées à $\mathcal{L}_u$ en dimension 2; problèmes issus de minimum en calcul des variations. L'une des idées est que l'inégalité (1.10) peut être transférée à l'opérateur paradifférentiel L, et que l'on peut ensuite utiliser des arguments classiques de régularisations, commutations, ...

2 Premiers résultats sur l'interaction

2.1 Contrôle 'jusqu'à $3s$'

Il est assez facile de comprendre pourquoi, à la différence des équations linéaires, de nouvelles singularités peuvent (et même doivent le plus souvent) naître de l'interaction. Considérons par exemple la situation du n°0.3 en supposant l'équation (0.1) semi-linéaire, c'est à dire de la forme

$$P(x, D)u = G(x, u, \dots , \nabla^{m-1}u)$$

où P est un opérateur différentiel linéaire strictement hyperbolique d'ordre m. Supposons que deux singularités d'ordre σ_1 et σ_2 respectivement, provenant du passé et se propageant conformément au théorème 1.6.1 sur deux bicaractéristiques arrivent respectivement en (x_0, ξ_1) et (x_0, ξ_2). Dans le cas le plus simple où $G(\dots) = u^2$, il n'est pas difficile de voir (en regardant la décroissance du produit de convolution de $\hat{u}$ par lui-même) que (sauf annulations très improbables) le terme u^2 aura une singularité d'ordre σ avec

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 - n/2 \tag{2.1}$$

microlocalement en les points du type (x_0, ξ) avec $\xi = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2$. Si l'un de ces points (x_0, ξ) se trouve être caractéristique, il y a toutes les chances pour que cette singularité d'ordre σ se propage sur la bicaractéristique issue de ce point.

Des résultats dus à M. Beals [4] [5] pour les équations semi-linéaires du second ordre, et à Chemin [19] dans le cas général assurent que, jusqu'à (grosso modo) $3s$ seul ce phénomène se produit.

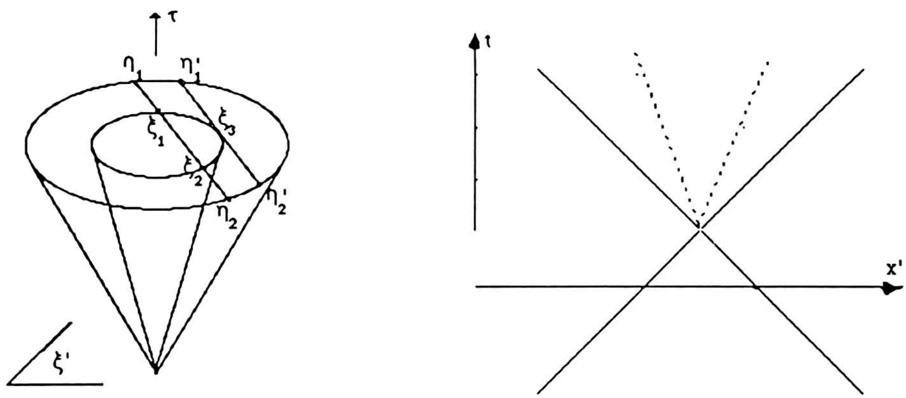


Figure 1: Pour une équation d'ondes non linéaires à deux vitesses $(\partial_t^2 - c_1^2\Delta)(\partial_t^2 - c_2^2\Delta) = f(u)$ deux bicaractéristiques de F_1, porteuses de singularités 'd'ordre s ', peuvent se croiser en arrivant en (x, ξ_1) et (x, ξ_2). Le point (x, η_1) appartient alors à G_1 et la bicaractéristique issue de ce point, incluse dans F_2 est en général porteuse d'une singularité 'd'ordre $2s$'

On considère, toujours avec les hypothèses du n°0.3 une solution de (0.1) qui appartient à $H^s(\Omega)$ pour $s > n/2 + m + 1$. A partir des ensembles $\mathrm{WF}_\sigma^- = (\Omega^- \times \mathbf{R}^n) \cap \mathrm{WF}_\sigma u$ constitués des points du passé où u n'appartient pas microlocalement à H^σ, on définit les ensembles suivants.

$$F_\sigma^1 = \left\{ (x, \xi) \in \mathrm{Car}(\mathcal{L}_u) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{il existe une bicaractéristique orientée vers} \\ \text{l'avenir joignant un point de } \mathrm{WF}_\sigma^- \text{ à } (x, \xi) \end{array} \right\}.$$

L'ensemble G_σ^1 est la 'somme fibre à fibre' des F_σ^1 et d'eux-mêmes, en tenant compte de la loi (2.1) et en y incluant le cas limite décrit par $\widetilde{G}_\sigma^1$.

$$G_\sigma^1 = \left\{ (x, \xi) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{il existe } \sigma_1,\ \sigma_2,\ \xi_1 \text{ et } \xi_2 \text{ avec } \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 - n/2, \\ \xi = \xi_1 + \xi_2, \text{ tels que } (x, \xi_1) \in F_{\sigma_1}^1 \text{ et } (x, \xi_2) \in F_{\sigma_2}^1 \end{array} \right\} \bigcup \widetilde{G}_\sigma^1$$

où $\widetilde{G}^1_\sigma$ est défini par

$$\widetilde{G}^1_\sigma = \left\{(x,\xi) \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{il existe } \xi_3 \text{ tel que } (x,\xi_3) \text{ appartienne à } F_{\sigma/2+n/4} \text{ et} \\ \text{que } (\xi-\xi_3) \text{ soit tangent à } \mathrm{Car}(\mathcal{L}_u)_x \text{ en } \xi_3\end{array}\right\} .$$

On a noté $\mathrm{Car}(\mathcal{L}_u)_x$ l'ensemble des ξ tels que (x,ξ) appartienne à la variété caractéristique $\mathrm{Car}(\mathcal{L}_u)$ (voir (0.2)).

Conformément à ce que nous avons dit ci-dessus, des singularités d'ordre σ ont toutes les chances d'arriver aux points de F^1_σ par propagation caractéristique, et de se créer aux points de G^1_σ à cause de la non-linéarité. Il reste à décrire la propagation de ces dernières.

$$F^2_\sigma = \left\{(x,\xi) \in \mathrm{Car}(\mathcal{L}_u) \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{il existe une bicaractéristique orientée vers l'avenir} \\ \text{joignant un point de } G^1_\sigma \cap \mathrm{Car}(\mathcal{L}_u) \text{ à } (x,\xi)\end{array}\right\} .$$

Le théorème général est le suivant [19]

Théorème 2.1.1 *Avec les notations précédentes, pour tout $\sigma \leq 3s-n-2m-2$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\mathrm{WF}_\sigma(u) \cap \mathrm{Car}(\mathcal{L}_u) \subset F^1_\sigma \cup F^2_{\sigma+m+1+\varepsilon}$$
$$\mathrm{WF}_\sigma(u) \cap (\mathrm{Car}(\mathcal{L}_u))^c \subset G^1_{\sigma+m+1+\varepsilon}$$

Le lecteur trouvera des applications de ce théorème dans [19]. En particulier, pour une équation d'ondes d'ordre 4 'à deux vitesses', il apparaît une dissymétrie dans la manière dont interagissent les ondes lentes et les ondes rapides.

La démonstration repose sur la construction d'un calcul symbolique bilinéaire de type paradifférentiel, qui associe à des symboles $a(x,\xi,\eta)$ un opérateur B_a défini par

$$B_a(u,v) = \iint \chi(\zeta-\xi-\eta)\widehat{a}(\zeta-\xi-\eta,\xi,\eta)\widehat{u}(\xi)\widehat{v}(\eta)\, d\xi\, d\eta/(2\pi)^{2n} .$$

Le théorème 1.1.2(b) peut alors être précisé comme suit, pour $u \in H^s$, $s > n/2$

$$F(u) = T_{F'(u)}u + B_a(u,u) + r$$

pour a convenable (essentiellement égal à $F''(u)$), avec $r \in H^{3s-n}$. Les équations aux dérivées partielles non linéaires se transforment donc, modulo un terme de l'ordre de $3s$, en équations paradifférentielles bilinéaires, et c'est pour celles-ci que le calcul symbolique permet d'étudier la propagation des singularités.

Le théorème 2.1.1 pourrait laisser espérer la construction d'une suite infinie $F^1_\sigma, G^1_\sigma, F^2_\sigma, G^2_\sigma, \dots, F^k_\sigma$ de sous-ensembles de l'espace des phases, exprimables à partir des singularités de u dans le passé, et prenant en compte la possibilité de $1,2,\dots,k-1$ interaction successives, tels que les singularités de u soient contenues dans ces ensembles jusqu'à *grosso modo* $\sigma = ks$. Malheureusement, il n'est pas possible d'obtenir de tels résultats en général, comme le montrent des contre-exemples de M. Beals [4] et de Chemin [19].

Par exemple (voir [4]), pour une équation $\Box u + \beta u^3 = 0$, où β est une fonction de classe C^∞, il existe des solutions $u \in H^s$ dont les données de Cauchy sont C^∞ hors de l'origine, alors que u est singulière non seulement à la surface du cône d'onde, mais aussi à l'intérieur de ce cône (où elle n'est *grosso modo* que de classe H^{3s}). Un tel contre-exemple semble complètement ruiner l'idée de décrire la propagation des singularités 'au-delà de $3s$' à partir de la propagation sur les bicaractéristique, et de l'interaction.

Toutefois, il est possible d'obtenir un contrôle des singularités jusqu'à des valeurs élevées de σ (y compris $\sigma = \infty$), dans les trois cas suivants :