Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

1391

S. Cambanis A. Weron (Eds.)

Probability Theory on Vector Spaces IV

Proceedings, Łańcut 1987

Springer-Verlag

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

1391

S. Cambanis A. Weron (Eds.)

Probability Theory on Vector Spaces IV

Proceedings of a Conference, held in Łańcut, Poland, June 10–17, 1987

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo Hong Kong

Editors

Stamatis Cambanis
Department of Statistics, University of North Carolina
Chapel Hill, NC 27599, USA

Aleksander Weron
Institute of Mathematics, Technical University of Wroclaw
50-370 Wroclaw, Poland

Mathematics Subject Classification: Primary 60 Bxx, 28 Cxx
Secondary 46 L 10, 60 E 07, 60 G 10, 60 G 15, 60 G 25, 60 G 46, 60 H 05, 81 C 20, 82 A 31

ISBN 3-540-51548-8 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-51548-8 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

Printed in Germany

Printing and binding: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstr.
2146/3140-543210 – Printed on acid-free paper

Lecture Notes in Mathematics

For information about Vols. 1–1173 please contact your bookseller or Springer-Verlag.

Vol. 1174: Categories in Continuum Physics, Buffalo 1982. Seminar. Edited by F.W. Lawvere and S.H. Schanuel. V, 126 pages. 1986.

Vol. 1175: K. Mathiak, Valuations of Skew Fields and Projective Hjelmslev Spaces. VII, 116 pages. 1986.

Vol. 1176: R.R. Bruner, J.P. May, J.E. McClure, M. Steinberger, H_∞ Ring Spectra and their Applications. VII, 388 pages. 1986.

Vol. 1177: Representation Theory I. Finite Dimensional Algebras. Proceedings, 1984. Edited by V. Dlab, P. Gabriel and G. Michler. XV, 340 pages. 1986.

Vol. 1178: Representation Theory II. Groups and Orders. Proceedings, 1984. Edited by V. Dlab, P. Gabriel and G. Michler. XV, 370 pages. 1986.

Vol. 1179: Shi J.-Y. The Kazhdan-Lusztig Cells in Certain Affine Weyl Groups. X, 307 pages. 1986.

Vol. 1180: R. Carmona, H. Kesten, J.B. Walsh, École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIV – 1984. Édité par P.L. Hennequin. X, 438 pages. 1986.

Vol. 1181: Buildings and the Geometry of Diagrams, Como 1984. Seminar. Edited by L. Rosati. VII, 277 pages. 1986.

Vol. 1182: S. Shelah, Around Classification Theory of Models. VII, 279 pages. 1986.

Vol. 1183: Algebra, Algebraic Topology and their Interactions. Proceedings, 1983. Edited by J.-E. Roos. XI, 396 pages. 1986.

Vol. 1184: W. Arendt, A. Grabosch, G. Greiner, U. Groh, H.P. Lotz, U. Moustakas, R. Nagel, F. Neubrander, U. Schlotterbeck, One-parameter Semigroups of Positive Operators. Edited by R. Nagel. X, 460 pages. 1986.

Vol. 1185: Group Theory, Beijing 1984. Proceedings. Edited by Tuan H.F. V, 403 pages. 1986.

Vol. 1186: Lyapunov Exponents. Proceedings, 1984. Edited by L. Arnold and V. Wihstutz. VI, 374 pages. 1986.

Vol. 1187: Y. Diers, Categories of Boolean Sheaves of Simple Algebras. VI, 168 pages. 1986.

Vol. 1188: Fonctions de Plusieurs Variables Complexes V. Séminaire, 1979–85. Edité par François Norguet. VI, 306 pages. 1986.

Vol. 1189: J. Lukeš, J. Malý, L. Zajíček, Fine Topology Methods in Real Analysis and Potential Theory. X, 472 pages. 1986.

Vol. 1190: Optimization and Related Fields. Proceedings, 1984. Edited by R. Conti, E. De Giorgi and F. Giannessi. VIII, 419 pages. 1986.

Vol. 1191: A.R. Its, V.Yu. Novokshenov, The Isomonodromic Deformation Method in the Theory of Painlevé Equations. IV, 313 pages. 1986.

Vol. 1192: Equadiff 6. Proceedings, 1985. Edited by J. Vosmansky and M. Zlámal. XXIII, 404 pages. 1986.

Vol. 1193: Geometrical and Statistical Aspects of Probability in Banach Spaces. Proceedings, 1985. Edited by X. Fernique, B. Heinkel, M.B. Marcus and P.A. Meyer. IV, 128 pages. 1986.

Vol. 1194: Complex Analysis and Algebraic Geometry. Proceedings, 1985. Edited by H. Grauert. VI, 235 pages. 1986.

Vol. 1195: J.M. Barbosa, A.G. Colares, Minimal Surfaces in $\mathbb{R}^3$. X, 124 pages. 1986.

Vol. 1196: E. Casas-Alvero, S. Xambó-Descamps, The Enumerative Theory of Conics after Halphen. IX, 130 pages. 1986.

Vol. 1197: Ring Theory. Proceedings, 1985. Edited by F.M.J. van Oystaeyen. V, 231 pages. 1986.

Vol. 1198: Séminaire d'Analyse, P. Lelong – P. Dolbeault – H. Skoda. Seminar 1983/84. X, 260 pages. 1986.

Vol. 1199: Analytic Theory of Continued Fractions II. Proceedings, 1985. Edited by W.J. Thron. VI, 299 pages. 1986.

Vol. 1200: V.D. Milman, G. Schechtman, Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces. With an Appendix by M. Gromov. VIII, 156 pages. 1986.

Vol. 1201: Curvature and Topology of Riemannian Manifolds. Proceedings, 1985. Edited by K. Shiohama, T. Sakai and T. Sunada. VII, 336 pages. 1986.

Vol. 1202: A. Dür, Möbius Functions, Incidence Algebras and Power Series Representations. XI, 134 pages. 1986.

Vol. 1203: Stochastic Processes and Their Applications. Proceedings, 1985. Edited by K. Itô and T. Hida. VI, 222 pages. 1986.

Vol. 1204: Séminaire de Probabilités XX, 1984/85. Proceedings. Edité par J. Azéma et M. Yor. V, 639 pages. 1986.

Vol. 1205: B.Z. Moroz, Analytic Arithmetic in Algebraic Number Fields. VII, 177 pages. 1986.

Vol. 1206: Probability and Analysis, Varenna (Como) 1985. Seminar. Edited by G. Letta and M. Pratelli. VIII, 280 pages. 1986.

Vol. 1207: P.H. Bérard, Spectral Geometry: Direct and Inverse Problems. With an Appendix by G. Besson. XIII, 272 pages. 1986.

Vol. 1208: S. Kaijser, J.W. Pelletier, Interpolation Functors and Duality. IV, 167 pages. 1986.

Vol. 1209: Differential Geometry, Peñiscola 1985. Proceedings. Edited by A.M. Naveira, A. Ferrández and F. Mascaró. VIII, 306 pages. 1986.

Vol. 1210: Probability Measures on Groups VIII. Proceedings, 1985. Edited by H. Heyer. X, 386 pages. 1986.

Vol. 1211: M.B. Sevryuk, Reversible Systems. V, 319 pages. 1986.

Vol. 1212: Stochastic Spatial Processes. Proceedings, 1984. Edited by P. Tautu. VIII, 311 pages. 1986.

Vol. 1213: L.G. Lewis, Jr., J.P. May, M. Steinberger, Equivariant Stable Homotopy Theory. IX, 538 pages. 1986.

Vol. 1214: Global Analysis – Studies and Applications II. Edited by Yu.G. Borisovich and Yu.E. Gliklikh. V, 275 pages. 1986.

Vol. 1215: Lectures in Probability and Statistics. Edited by G. del Pino and R. Rebolledo. V, 491 pages. 1986.

Vol. 1216: J. Kogan, Bifurcation of Extremals in Optimal Control. VIII, 106 pages. 1986.

Vol. 1217: Transformation Groups. Proceedings, 1985. Edited by S. Jackowski and K. Pawalowski. X, 396 pages. 1986.

Vol. 1218: Schrödinger Operators, Aarhus 1985. Seminar. Edited by E. Balslev. V, 222 pages. 1986.

Vol. 1219: R. Weissauer, Stabile Modulformen und Eisensteinreihen. III, 147 Seiten. 1986.

Vol. 1220: Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin. Proceedings, 1985. Edité par M.-P. Malliavin. IV, 200 pages. 1986.

Vol. 1221: Probability and Banach Spaces. Proceedings, 1985. Edited by J. Bastero and M. San Miguel. XI, 222 pages. 1986.

Vol. 1222: A. Katok, J.-M. Strelcyn, with the collaboration of F. Ledrappier and F. Przytycki, Invariant Manifolds, Entropy and Billiards; Smooth Maps with Singularities. VIII, 283 pages. 1986.

Vol. 1223: Differential Equations in Banach Spaces. Proceedings, 1985. Edited by A. Favini and E. Obrecht. VIII, 299 pages. 1986.

Vol. 1224: Nonlinear Diffusion Problems, Montecatini Terme 1985. Seminar. Edited by A. Fasano and M. Primicerio. VIII, 188 pages. 1986.

Vol. 1225: Inverse Problems, Montecatini Terme 1986. Seminar. Edited by G. Talenti. VIII, 204 pages. 1986.

Vol. 1226: A. Buium, Differential Function Fields and Moduli of Algebraic Varieties. IX, 146 pages. 1986.

Vol. 1227: H. Helson, The Spectral Theorem. VI, 104 pages. 1986.

Vol. 1228: Multigrid Methods II. Proceedings, 1985. Edited by W. Hackbusch and U. Trottenberg. VI, 336 pages. 1986.

Vol. 1229: O. Bratteli, Derivations, Dissipations and Group Actions on C*-algebras. IV, 277 pages. 1986.

Vol. 1230: Numerical Analysis. Proceedings, 1984. Edited by J.-P. Hennart. X, 234 pages. 1986.

Vol. 1231: E.-U. Gekeler, Drinfeld Modular Curves. XIV, 107 pages. 1986.

continued on page 427

Dedicated to the memory of

HUGO STEINHAUS (1887-1972)

on the occasion of his 100-th birthday

P R E F A C E

This volume consists of a selection of 34 contributions presented during the international conference PROBABILITY THEORY ON VECTOR SPACES IV held in Lancut (south-eastern Poland), June 10-17, 1987. The conference, the fourth of such meetings organized in Poland during the last decade, was aimed at bringing together a group of researchers to discuss their current work on functional analysis aspects of probability theory, to provide encouragement for further research through the lectures of invited scholars, and to introduce to younger colleagues the latest research techniques in infinite dimensional probability theory.

During the meeting the participants celebrated HUGO STEINHAUS's 100th birthday. The invited speakers on the special session were Z.Ciesielski and K. Urbanik. Professor Steinhaus had a world wide reputation. He was one of the founders of the internationally acknowledged "Lwow school" of functional analysis, and "Wroclaw school" of probability.

It has been the aim of the editors of these Proceedings to include new and significant results. We wish to express our deep gratitude to all the referees for their indispensable help. The selected papers tie together known results of the previous proceedings volumes: Springer-Verlag's Lecture Notes in Math. vol. 656 (1978), vol. 828 (1980), and vol. 1080 (1984), describe the underlying ideas, summarize the state-of-the-art, and state some open problems. Topics covered in this volume include: PROBABILITY MEASURES ON ALGEBRAIC AND TOPOLOGICAL STRUCTURES (A.Bartoszewicz, S.A.Chobanjan & G.J.Georgobiani, Ph.Feinsilver & R.Schott, W.Hazod, M.Lewandowski & W.Linde, A.Luczak, J.Misiewicz & C.Ryll-Nardzewski, and V.Tarieladze); LIMIT THEOREMS ON VECTOR SPACES (J.C.Alt, T. Byczkowski & P.Graczyk, E.Gine & J.Zinn, M.G.Hahn, J.Kuelbs & D.C.Weiner, E.Hensz, R.Jajte, and A.J.Rackauskas); INFINITELY DIVISIBLE (STABLE, GAUSSIAN) MEASURES AND PROCESSES (S.Csorgo, X.Fernique, R.LePage, A.Madrecki, M.Marques & S.Cambanis, G.Pap, M.Rybaczuk & K.Weron, W.Smolenski & R.Sztencel, and T.Zak); and STOCHASTIC INTEGRALS (J.Jurek, K.Podgorski, A.Russek, K.Samotij, Z.Suchanecki, and J.Wos).

The contribution of R.LePage includes, as an appendix, his very popular, never published earlier, Technical Report "Multidimensional infinitely divisible variables and processes: PartI: Stable case", Stanford Univ., 1980. Proceedings contain also two longer survey articles on recent developments in the integration theory of Banach space valued measures (P.Masani & H.Niemi), and in the prediction theory of infinite dimensional stationary sequences (A.Makagon & H.Salehi).

The conference took place in the Alfred Potocki palace in Lancut. The palace was built in an early Baroque style (1629-41) and set in a handsome park. It is ranked among the most superb stately homes to be seen in Eastern Europe. We wish to thank the authorities of the Lancut Museum for providing facilities which made it possible to hold our conference in so charming place. Cordial thanks are also due to M.Krol, T.Inglot, A.Makagon, and J.Misiewicz who helped in the organization of the meeting. The conference was made possible through the partial support of the Research Program CPBP 01.02. which is acknowledged with gratitude.

Aleksander Weron

CONTENTS

Probability Theory on Vector Spaces IV
Lancut, June'87, Springer's LNM 1391

UNE FORME GÉNÉRALE DE LA LOI FORTE DES GRANDS NOMBRES POUR DES VARIABLES ALÉATOIRES VECTORIELLES

Jean-Christian ALT
U.E.R de Mathématiques
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cédex

I. Introduction. — Cet article présente une forme générale de la loi forte des grands nombres (en abrégé : l. f. g. n) pour des variables aléatoires (v.a) à valeurs dans un espace de Banach. Etant données une suite $(X_n)_n$ de v.a. à valeurs dans un espace de Banach séparable $(B, \|\ \|)$, et une suite croissante de réels > 0 $(a_n)_n$ tendant vers l'infini, on cherche à caractériser la l.f.g.n., i.e. la convergence presque sûre (p.s) vers 0 de la suite des sommes partielles normalisées S_n/a_n (on a posé pour tout $n \geq 1$: $S_n = X_1 + \cdots + X_n$). On se fixe un réel $M > 1$; on sait qu'il existe alors (cf [13], lemme 3.3) une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que

$$\forall\, k \geq 1 \qquad M a_{n_k} \leq a_{n_{k+1}} \leq M^3 a_{(n_k)+1}.$$

Le principal objectif de ce travail est de montrer que si les variables $(X_n)_n$ sont convenablement bornées, il est possible de caractériser la l.f.g.n. au moyen de variances "faibles" similaires à celles déjà utilisées dans [2] et [3]. De façon précise, si les variables indépendantes et centrées $(X_n)_n$ vérifient l'hypothèse de bornitude

$$\forall\, n \geq 1 \qquad \|X_n\| \leq b_n \quad (p.s),$$

où $(b_n)_n$ est une suite croissante de réels > 0 telle que

$$\exists\, \gamma > 0 \quad \sum_{k\geq 1} \exp(-\gamma a_{n_k}/b_{n_k}) < \infty,$$

et si la loi faible des grands nombres est satisfaite, i.e. si S_n/a_n converge en probabilité vers 0, alors la l.f.g.n équivaut à la convergence pour tout $\epsilon > 0$ de la série $\Sigma_{k\geq 1} \exp(-\epsilon[a_{n_k}/\sigma_k]^2)$, où l'on a posé

$$\sigma_k^2 = \sup\Big\{ \sum_{n_{k-1} < i \leq n_k} E\langle X_i, x'\rangle^2 \ ; \quad \|x'\|_{B'} \leq 1 \Big\}.$$

Ce résultat tire son origine de la l.f.g.n de Prokhorov, dont il constitue une généralisation. Rappelons l'énoncé de ce théorème.

THÉORÈME 1 (YOU. V. PROKHOROV [9]). — *Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles (v.a.r) indépendantes et centrées satisfaisant la condition de bornitude*

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |X_n| \leq Cn/\log_2 n \quad (p.s)$$

(avec pour tout $x \in \mathbb{R}_+ : \log_2 x = ln[ln(xVe^e)]$).

La suite $(S_n/n)_n$ converge alors p.s. vers 0 si et seulement si

$$(CP) \qquad \forall\, \epsilon > 0 \quad \sum_{n \geq 1} \exp(-\epsilon l_n^{-1}) < \infty$$

où l'on a posé

$$l_n = 2^{-2n} \sum_{2^n < i \leq 2^{n+1}} EX_i^2.$$

Prokhorov a de plus montré que cet énoncé est optimal au sens suivant : étant donnée une suite $(C_n)_n$ de réels tendant vers l'infini, il existe 2 suites $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ de v.a.r. indépendantes et symétriques vérifiant

i) $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad |X_n| \leq C_n n/\log_2 n \quad$ et $\quad |Y_n| \leq C_n n/\log_2 n$
ii) $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad EX_n^2 = EY_n^2$
iii) $\forall\, \epsilon > 0 \quad \sum_{n\geq 1} \exp(-\epsilon l_n^{-1}) < \infty \quad$ (où $l_n = 2^{-2^n} \Sigma_{2^n < i \leq 2^{n+1}} EX_i^2$),

et telles que $(X_1 + \cdots + X_n/n)_n$ converge p.s. vers 0 et $(Y_1 + \cdots + Y_n/n)_n$ diverge p.s. Autrement dit l'hypothèse de bornitude du théorème 1 est la moins restrictive permettant de caractériser la l.f.g.n par la convergence d'une série exprimée à l'aide des moments d'ordre 2 des v.a.

Il est intéressant de comparer la l.f.g.n de Prokhorov avec celle de Kolmogorov qui concerne des v.a.r. indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) et qui a reçu très tôt l'extension suivante aux espaces de Banach.

THÉORÈME 2 (E. MOURIER [8]). — *Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans un espace de Banach séparable B. La suite $(S_n/n)_n$ converge p.s. vers un élément de B si et seulement si $E\|X_1\| < \infty$, la limite p.s s'identifiant dans ce cas à EX_1.*

On constate que le passage du cas réel au cas banachique s'effectue simplement en remplaçant les valeurs absolues par des normes.

Il était donc naturel d'adopter une démarche similaire pour la généralisation du théorème de Prokhorov aux espaces de Banach en remplaçant dans la condition (CP) du théorème 1 les quantités l_n par

$$\Lambda_n = 2^{-2n} \sum_{2^n < i \leq 2^{n-1}} E\|X_i\|^2.$$

Cette démarche a permis à Kuelbs et Zinn de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 3 (J. KUELBS ET J. ZINN [5], THÉORÈME 2). — *Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes à valeurs dans un espace de Banach séparable, vérifiant les conditions*

1) $\exists\, C>0 \quad \forall\, n \geq 1 \quad \|X_n\| \leq Cn/\log_2 n \quad (p.s)$
2) $\forall\, \epsilon > 0 \quad \sum_{n\geq 1} \exp\bigl(-\epsilon \Lambda_n^{-1}\bigr) < \infty$

On a alors l'équivalence suivante

$$\Bigl(S_n/n \xrightarrow{P} 0\Bigr) \Longleftrightarrow \Bigl(S_n/n \xrightarrow{p.s.} 0\Bigr)$$

Cet énoncé a l'avantage d'être vrai dans tout espace de Banach, mais nécessite une hypothèse 2) très restrictive. En effet, si dans le cas de v.a. équidistribuées les normes se comportent comme des équivalents naturels des valeurs absolues, leur utilisation pour des v.a non équidistribuées se traduit par contre par une perte d'information. Une seconde démarche consiste donc à rechercher des moments plus adéquats, permettant d'obtenir une condition (CP) moins forte, et, en contrepartie, à imposer des restrictions sur la nature de l'espace de Banach considéré. Cette démarche a été suivie par B. Heinkel qui a étendu le théorème de Prokhorov aux espaces de Banach p-uniformément lisses en employant une condition s'exprimant à l'aide des quantités

$$\tilde{\lambda}_n = 2^{-2n} \sum_{2^n < i \leq 2^{n+1}} \sup\Bigl\{E\langle X_i, x'\rangle^2; \quad \|x'\|_{B'} \leq 1\Bigr\}.$$

Rappelons qu'un espace de Banach B est dit p-uniformément lisse (pour $p \in]1,2]$) s'il existe une constante $K>0$ telle que pour tout couple (x,y) d'éléments de B on ait

$$\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leq 2\|x\|^p + K\|y\|^p.$$

Voici l'un des théorèmes obtenus, ayant pour cadre les espace 2-uniformément lisses.

THÉORÈME 4 (B. HEINKEL [4], THÉORÈME 2). — *Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes et centrées à valeurs dans un espace de Banach 2-uniformément lisse. Supposons vérifiées les 3 conditions :*

1) $\exists\, C>0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \|X_n\| \leq Cn/\log_2 n \quad (p.s)$
2) $\lim_{n\to\infty} n^{-2} \sum_{i=1}^{n} E\|X_i\|^2 = 0$
3) $\forall\, \epsilon > 0 \quad \sum_{n\geq 1} \exp\bigl(-\epsilon \tilde{\lambda}_n^{-1}\bigr) < \infty$.

Sous ces hypothèses la suite $(S_n/n)_n$ converge p.s. vers 0.

La condition 3) du théorème précédent n'est pas encore pleinement satisfaisante car on vérifie sans difficulté qu'elle n'est pas nécessaire. En fait nous avons démontré dans [2] que la condition de Prokhorov naturelle qui est nécessaire dans n'importe quel espace de Banach pour la l.f.g.n sous l'hypothèse 1) du théorème 4 s'exprime à l'aide des quantités

$$\lambda_n = 2^{-2n} \sup\Big\{ \sum_{2^n < i \leq 2^{n+1}} E\langle X_i, x'\rangle^2 \ ; \ \|x'\|_{B'} \leq 1 \Big\},$$

la condition de Prokhorov qui en résulte s'écrivant

$$(CP) \qquad \forall\, \epsilon > 0 \quad \sum_{n \geq 1} \exp(-\epsilon \lambda_n^{-1}) < \infty.$$

La suffisance de cette condition a, dans un premier temps, été prouvée pour des v.a. à valeurs dans un espace de Banach de type $p \in [1, 2]$. En adoptant une méthode de randomisation gaussienne mise au point par M. Ledoux pour l'étude de la loi du logarithme itéré équidistribuée dans les espaces de type 2 ([6]) nous avons pu démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 5 ([2], THÉORÈME 5). — *Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes et centrées à valeurs dans un espace de Banach de type $p \in]1, 2]$. Supposons vérifiées les deux conditions :*

1) *il existe une suite $(C_n)_n$ de réels tendant vers 0 telle que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \|X_n\| < C_n \; n / \log_2 n \quad (p.s)$$

2) $$\lim_{n \to \infty} \qquad n^{-p} \textstyle\sum_{i=1}^n E\|X_i\|^p = 0.$$

Sous ces hypothèses on a l'équivalence

$$\Big(S_n / n \xrightarrow{p.s} 0 \Big) \iff \Big(\forall\, \epsilon > 0 \quad \sum_{n \geq 1} \exp(-\epsilon \lambda_n^{-1}) < \infty \Big).$$

Finalement M. Ledoux et M. Talagrand ont réussi à s'affranchir des hypothèses restrictives de l'énoncé précédent, et à montrer que le théorème initial de Prokhorov est valable sans limitation dans tout espace de Banach. Leur énoncé est le suivant.

THÉORÈME 6 (M. LEDOUX, M. TALAGRAND [7], THÉORÈME 13). — *Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes et centrées à valeurs dans un espace de Banach séparable. On suppose vérifiées les deux conditions :*

1) $\exists\, C > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \|X_n\| \leq C n / \log_2 n \quad (p.s)$

2) $S_n / n \xrightarrow{P} 0.$

Sous ces hypothèses on a l'équivalence

$$\Big(S_n / n \xrightarrow{p.s} 0 \Big) \iff \Big(\forall\, \epsilon > 0 \ \sum_{n \geq 1} \exp(-\epsilon \lambda_n^{-1}{}_n) < \infty \Big).$$

M. Ledoux et M. Talagrand ont énoncé le théorème précédent dans le langage des processus empiriques. Ils ont imaginé pour sa démonstration une méthode de randomisation par des variables de Rademacher. En utilisant cette méthode, nous avons été à même de prouver le résultat exposé au début de cette introduction; ce résultat constitue la forme définitive d'un énoncé qui figurait déjà dans [3] ([3], théorème 7). Rappelons en le cadre, qui est le plus général possible autorisant une caractérisation de la l.f.g.n au moyen des variances faibles des v.a. : on se donne 2 suites croissantes $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ de réels > 0 et une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_k$ satisfaisant les hypothèses :

$$H \begin{cases} 1)\exists\ M > 1 \quad \forall\ k \geq 1 \quad M a_{n_k} \leq a_{n_{k+1}} \leq M^3 a_{(n_k)+1} \\ 2)\exists\ \gamma > 0 \quad \sum_{k\geq 1} \exp(-\gamma a_{n_k}/b_{n_k}) < \infty\ . \end{cases}$$

Il est évident de constater que le théorème 6 correspond au cas particulier $a_n = n$, $b_n = Cn/\log_2 n$ et $n_k = 2^k$. Etant donnée une suite $(X_n)_n$ de v.a. à valeurs dans B on posera :

$$I_k =]n_{k-1}, n_k] \qquad \text{et} \qquad \sigma_k^2 = \sup\Big\{\sum_{i\in I_k} E\langle X_i, x'\rangle^2\ ; \quad \|x'\|_{B'} \leq 1\Big\}\ .$$

Avec ces notations voici l'énoncé précis du résultat annoncé.

THÉORÈME 7. — *Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes et centrées à valeurs dans un espace de Banach séparable $(B, \|\ \|)$; et soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites croissantes de réels > 0, et $(n_k)_k$ une suite strictement croissante d'entiers vérifiant les hypothèses H. On suppose satisfaites les conditions :*

1) $\forall\ n \geq 1 \quad \|X_n\| \leq b_n \quad (p.s)$
2) $S_n/a_n \xrightarrow{P} 0$.

Sous ces hypothèses $(S_n/a_n)_n$ converge p.s. vers 0 si et seulement si

$$\forall\ \epsilon > 0 \quad \sum_{k\geq 1} \exp\Big(-\epsilon[a_{n_k}/\sigma_k]^2\Big) < \infty.$$

Remarque 1. — Le théorème 7 admet le corollaire suivant. On se donne d'une part une suite $(X_n)_n$ de v.a. indépendantes et symétriques à valeurs dans un espace de Banach séparable B; et d'autre part une suite croissante de réels > 0 $(a_n)_n$ et une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_k$ telles que l'hypothèse $H1)$ soit satisfaite. On suppose vérifiées les trois conditions suivantes, dont les deux premières sont nécessaires pour la l.f.g.n.:

1) $\forall\ \epsilon > 0 \quad \sum_{n\geq 1} P\{\|X_n\| \geq \epsilon a_n\} < \infty$
2) $S_n/a_n \xrightarrow{P} 0$
3) $\forall\ \epsilon > 0 \quad \sum_{k\geq 1} \exp(-\epsilon[a_{n_k}/\sigma_k]^2) < \infty$

où l'on a posé

$$\sigma_k^2 = \sup\Big\{ \sum_{n_{k-1}<i\le n_k} E\langle X_i, x'\rangle^2 \ ; \quad \|x'\|_{B'} \le 1\Big\} .$$

Pour toute suite croissante $(b_n)_n$ de réels > 0 vérifiant $H2$) on a alors l'équivalence :

$$\Big(S_n/a_n \xrightarrow{p.s.} 0\Big) \iff \Big(a_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i 1_{\{b_i\le\|X_i\|\le a_i\}} \xrightarrow{p.s.} 0\Big) .$$

Remarque 2. — Il est connu que la loi du logarithme itéré (l.l.i.) apparaît sous bien des aspects comme une forme limite de la l.f.g.n. Il n'est donc pas surprenant que le théorème 7 admette une "version l.l.i.". Cette version s'obtient en remplaçant l'hypothèse 2) par

2′) $\qquad (S_n/a_n)_n$ est bornée en probabilité,

la conclusion se transformant alors en :

$$((S_n/a_n)_n \text{ est p.s. bornée}) \iff \Big(\exists\ \epsilon > 0 \quad \sum_{k\ge1} \exp(-\epsilon[a_{n_k}/\sigma_k]^2) < \infty\Big).$$

Nous donnerons en cas particulier de cette version l.l.i. une généralisation banachique de la l.l.i. de Kolmogorov, qui, comme le théorème 7, était déjà énoncée sous une forme partielle dans [3], ([3] théorème 6).

THÉORÈME 8. — *Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes et centrées à valeurs dans un espace de Banach séparable B. On pose pour tout entier n*

$$\sigma_n^2 = \sup\big\{E\langle S_n, x'\rangle^2 \ ; \quad \|x'\|_{B'} \le 1\big\}.$$

Soit $(s_n)_n$ une suite croissante de réels > 0 tendant vers $+\infty$. On suppose vérifiées les 3 conditions :

1) $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \|X_n\| \le s_n\big(\log_2 s_n\big)^{-1/2}$ (p.s)
2) *la suite* $\big(S_n/s_n(\log_2 s_n)^{1/2}\big)_n$ *est bornée en probabilité*
3) $\exists\ c > 0 \quad \forall\ n \ge 1 \quad \sigma_n \le cs_n$.

La suite $\big(S_n/s_n(\log_n s_n)^{1/2}\big)_n$ est alors p.s. bornée.

II. Démonstration du théorème 7.

A. Nécessité. Comme pour le théorème de Prokhorov dans le cas réel, elle repose sur le lemme suivant (cf. [10], théorème 5.2.2).

LEMME 9. — *Il existe 2 constantes strictement positives c_1 et c_2 telles que pour toute suite $Y_1, \dots, Y_n$ de v.a.r indépendantes et centrées vérifiant*

$$\exists\, c > 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n \quad |Y_i| \leq c s_n \quad (p.s)\ ,$$

où

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} EY_i^2\ ,$$

on ait pour tout réel $\epsilon > 0$ *satisfaisant les inégalités*

$$\epsilon \geq c_1 \quad \text{et} \quad \epsilon c \leq c_2$$

la minoration

$$P\{Y_1 + \cdots + Y_n \geq \epsilon s_n\} \geq \exp(-\epsilon^2).$$

On vérifie aisément que, sans perte de généralité, les variables $(X_n)_n$ peuvent être supposées symétriques.
Des hypothèses H résulte l'égalité

(2.1)
$$\lim_{n\to\infty} b_n/a_n = 0.$$

Les conditions 1) et 2) du théorème 7 permettent donc d'affirmer, en vertu d'un théorème de De Acosta ([1], lemme 3.1) :

$$\lim_{n\to\infty} E\big\|S_n/a_n\big\|^2 = 0.$$

Posons pour tout $k \geq 1$: $T_k = \sum_{i\in I_k} X_i$; on a aussi

(2.2)
$$\lim_{k\to\infty} E\big\|T_k/a_{n_k}\big\|^2 = 0.$$

Fixons nous un réel $\epsilon > 0$; et choisissons un réel $\delta > 0$ tel que

(2.3)
$$2\gamma\delta \leq c_2 \qquad \text{et} \qquad 2\epsilon\delta^2 \leq 1.$$

La suite de v.a indépendantes $(T_k/a_{n_k})_k$ convergeant p.s. vers 0 d'après les hypothèses, on a

(2.4)
$$\sum_{k\geq 1} P\Big\{\|T_k/a_{n_k}\| \geq \epsilon\delta\Big\} < \infty.$$

Par définition de σ_k, il existe un élément f_k de B' tel que $\|f_k\| \leq 1$ et

(2.5)
$$s_k^2 = E\langle T_k/a_{n_k}, f_k\rangle^2 \leq \sigma_k^2/a_{n_k}^2 \leq 2s_k^2$$

D'où, en conséquence de (2.2) :

$$\lim_{k\to\infty} s_k^2 = 0. \tag{2.6}$$

Définissons

$$A = \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \epsilon a_{n_k} b_{n_k} \leq \gamma \sigma_k^2 \right\}.$$

Pour tout élément k de A on a

$$\begin{aligned} P\left\{ \|T_k/a_{n_k}\| \geq \epsilon\delta \right\} &\geq P\left\{ f_k(T_k/a_{n_k}) \geq \epsilon\delta \right\} \\ &= P\left\{ f_k(T_k)/a_{n_k}s_k \geq \epsilon\delta/s_k \right\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

En vue d'appliquer le lemme 9 posons pour tout $i \in I_k$

$$Y_i = f_k(X_i/a_{n_k}).$$

Par la condition 1) du théorème, ces variables vérifient :

$$\begin{aligned} |Y_i| \leq \|X_i\|/a_{n_k} &\leq b_{n_k}/a_{n_k} \qquad (p.s) \\ &= s_k(b_{n_k}/a_{n_k}s_k) \end{aligned}.$$

Posons $c_k = b_{n_k}/a_{n_k}s_k$; remarquons que par (2.6) on a pour k assez grand $\epsilon\delta/s_k \geq c_1$; d'autre part :

$$\begin{aligned} (\epsilon\delta/s_k)c_k &\leq \epsilon\delta b_{n_k}/a_{n_k}s_k^2 \\ &\leq 2\epsilon\delta a_{n_k}b_{n_k}/\sigma_k^2 && \text{(par (2.5))} \\ &\leq 2\gamma\delta && \text{(car } k \in A) \\ &\leq c_2 && \text{(par (2.3))} \end{aligned}$$

Le lemme 9 s'applique par conséquent pour k assez grand et donne :

$$\begin{aligned} P\left\{ f_k(T_k)/a_{n_k}s_k \geq \epsilon\delta/s_k \right\} &\geq \exp(-\epsilon^2\delta^2/s_k^2) \\ &\geq \exp(-2\epsilon^2\delta^2 a_{n_k}^2/\sigma_k^2) && \text{(par (2.5))} \\ &\geq \exp(-\epsilon[a_{n_k}/\sigma_k]^2) && \text{(par (2.3))} \end{aligned}$$

On déduit alors de (2.4) et (2.7) :

$$\sum_{k\in A} \exp\left(-\epsilon[a_{n_k}/\sigma_k]^2 \right) < \infty.$$

Pour $k \notin A$ on a

$$a_{n_k}^2/\sigma_k^2 \geq \gamma a_{n_k}/\epsilon b_{n_k}.$$

D'où, grâce à l'hypothèse $H2$)

$$\sum_{k\notin A} \exp\Big(-\epsilon[a_{n_k}/\sigma_k]^2\Big) < \infty.$$

ce qui achève la démonstration de la nécessité.

B. Suffisance. Supposant satisfaite la condition

$$\forall\ \epsilon > 0 \quad \sum_{k\geq 1} \exp\Big(-\epsilon[a_{n_k}/\sigma_k]^2\Big) < \infty\ ,$$

nous voulons montrer que la suite $(S_n/a_n)_n$ est p.s. convergente vers 0.

La condition 2) du théorème 7 permet d'utiliser un argument usuel de symétrisation (cf [5], lemme 2.1); les v.a. $(X_n)_n$ seront donc supposées symétriques dans toute la suite de la démonstration.

Tenant compte de l'hypothèse $H1$), il est connu (cf. [5] lemme 2.2) que la convergence p.s. vers 0 de $(S_n/a_n)_n$ équivaut à la convergence p.s. vers 0 de la suite $(T_k/a_{n_k})_k$. Les variables $(T_k/a_{n_k})_k$ étant indépendantes, cette dernière convergence équivaut à

$$\forall\ \eta > 0 \quad \sum_{k\geq 1} P\Big\{\|T_k\|/a_{n_k}\| \geq \eta\Big\} < \infty.$$

Pour toute suite $(\epsilon_n)_n$ de variables de Rademacher indépendantes, indépendante de la suite $(X_n)_n$, l'affirmation précédente équivaut à la propriété suivante, que l'on se propose de démontrer :

$$\forall\ \eta > 0 \quad \sum_{k\geq 1} P\Big\{\|\tilde{T}_k\| \geq \eta a_{n_k}\Big\} < \infty\,, \tag{2.8}$$

où l'on a posé pour tout entier k

$$\tilde{T}_k = \sum_{i\in I_k} \epsilon_i X_i.$$

Fixons un réel $\eta > 0$; et soit $\epsilon > 0$ un réel qui sera précisé ultérieurement. Remarquons que d'après (2.1) et la condition 1) du théorème 7, on a pour n assez grand

$$\|X_n\| \leq a_n \quad (p.s).$$

Comme de plus $(S_n/a_n)_n$ converge en probabilité vers 0 par hypothèse, un théorème de De Acosta ([1], lemme 3.1) permet d'affirmer l'existence d'un entier k_0 tel que

$$\forall\ k \geq k_0 \quad E a_{n_k}^{-1}\|T_k\| \leq \epsilon. \tag{2.9}$$