LINEARE ENTSCHEIDUNGSMODELLE

VON

DR. WILHELM KROMPHARDT

O. PROFESSOR DER VOLKSWIRTSCHAFTSLEHRE
UNIVERSITÄT HEIDELBERG

DR. RUDOLF HENN

PROFESSOR FÜR ÖKONOMETRIE
UND OPERATIONS RESEARCH
HANDELS-HOCHSCHULE
ST. GALLEN

DR. KARL FÖRSTNER

FORSCHUNGSSTELLE
FÜR OPERATIONS RESEARCH
UND ÖKONOMETRIE
HANDELS-HOCHSCHULE
ST. GALLEN

MIT 114 ABBILDUNGEN

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1962

Printed in Germany

Druck der Brühlschen Universitätsdruckerei Gießen

ENZYKLOPÄDIE DER RECHTS- UND STAATSWISSENSCHAFT

BEGRÜNDET VON

F. VON LISZT UND W. KASKEL

HERAUSGEGEBEN VON

W. KUNKEL · H. PETERS · E. PREISER

ABTEILUNG STAATSWISSENSCHAFT

LINEARE ENTSCHEIDUNGSMODELLE

VON

WILHELM KROMPHARDT

RUDOLF HENN KARL FÖRSTNER

SPRINGER-VERLAG

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

1962

Vorwort

Die Arbeit entstand aus Untersuchungen, die die ökonometrische Abteilung des Alfred-Weber-Instituts der Universität Heidelberg im Rahmen eines Schwerpunktprogramms der Deutschen Forschungsgemeinschaft durchführte. Die Erörterung der behandelten Fragen in einem Seminar, das der eine der Verfasser (KROMPHARDT) im Sommer-Semester 1958 an der Universität Heidelberg abhielt, gab Gelegenheit, insbesondere die wirtschaftlichen Anwendungen ausführlich zu diskutieren. Herr Professor E. PREISER (München) hatte als Mitherausgeber der „Enzyklopädie der Rechts- und Staatswissenschaft" die Liebenswürdigkeit, das Manuskript zu lesen und seine Aufnahme zu empfehlen. Großen Dank schulden die Verfasser Herrn Professor HORST SCHUBERT (Kiel), der sie mit vielen Ratschlägen und Anregungen unterstützt hat. Der Zusammenfassung von Notationen der Wahrscheinlichkeitsrechnung im 9. Kapitel wurde die Nachschrift einer Vorlesung von Professor H. SEIFERT (Heidelberg W. S. 1949/50 und S. S. 1950) zugrunde gelegt. Die Professoren W. A. JÖHR und E. KÜNG (St. Gallen) unterstützten das Zustandekommen der Arbeit sowohl durch Vermittlung finanzieller Beihilfen aus dem Fonds der Forschungsgemeinschaft für Nationalökonomie an der Handels-Hochschule St. Gallen und aus dem Schweizerischen Nationalfonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung als auch durch das Interesse, das sie, ebenso wie Herr Professor W. G. WAFFENSCHMIDT (Heidelberg) und seine Forschungsgruppe (Wirtschaftshochschule Mannheim), der Arbeit entgegenbrachten. Herr Dr. MERKWITZ (Mathematisches Institut der Universität Heidelberg) übernahm freundlicherweise eine Durchsicht des Manuskripts und ermöglichte den Verfassern eine Reihe wichtiger Verbesserungen. Fräulein dipl. rer. pol. LUITGARD SIEBER und die Herren Dr. W. KÖSTLIN, Dr. H. MANEVAL, Dr. K. U. SCHMIDT, Dr. M. WEGNER unterzogen sich der großen Mühe, die Beispiele durchzurechnen, die Figuren anzufertigen, Korrekturen zu lesen und das Literatur- und Sachverzeichnis zusammenzustellen. Fräulein G. BECK schrieb mit Gewissenhaftigkeit und Sorgfalt ein druckfertiges Manuskript.

Allen Genannten schulden die Verfasser aufrichtigen Dank und nicht zuletzt dem Springer-Verlag für die Berücksichtigung vieler Wünsche beim Druck des Buches und für dessen großzügige Ausstattung.

Heidelberg, St. Gallen, den 7. 1. 1962

WILHELM KROMPHARDT
RUDOLF HENN
KARL FÖRSTNER

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 1

1. Kapitel: Anwendungen der Simplex-Methode 8

§ 1. Geometrische Einführung 8
§ 2. Das Rechenverfahren 16
§ 3. Die Bestimmung aller Maxima 26
§ 4. Minimumaufgaben 31
§ 5. Ausgeartete Fälle 38
§ 6. Das Fehlen vorgegebener Eckschemata 42

2. Kapitel: Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen 55

§ 7. Relative Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeitsfelder 55
§ 8. Zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsfelder 63
§ 9. Abbildungen und Produkte von Wahrscheinlichkeitsfeldern 67
§ 10. Momente 82
§ 11. Die charakteristische Funktion und konvergente Folgen von Wahrscheinlichkeitsfeldern 93

3. Kapitel: Strategische Spiele (1. Teil) 104

§ 12. Vorbemerkungen 104
§ 13. Matrixspiele 111
§ 14. Lösungen von Matrixspielen 121

4. Kapitel: Der n-dimensionale Raum 143

§ 15. Gerade, Ebene und n-dimensionaler Raum 143
§ 16. Vektoren 145
§ 17. Lineare Unabhängigkeit 148
§ 18. Lineare Abbildungen 150
§ 19. Matrizen 156
§ 20. Strecken und Strahlen 168
§ 21. Punktmengen im R^n 169

5. Kapitel: Konvexe Polyeder 174

§ 22. Konvexe Punktmengen 174
§ 23. Erweiterung des R^n 176
§ 24. Konvexe polyedrale Bereiche 182
§ 25. Lineare Gleichungen und Ungleichungen 191
§ 26. Extrema von Linearformen und Eckpunkte 194

6. Kapitel: Die Simplex-Methode 198

§ 27. Die Aufgabenstellung 199
§ 28. Ecksysteme 200
§ 29. Das Verfahren 204
§ 30. Das Kriterium 207
§ 31. Polynome 215

§ 32. Ausgeartete Ecksysteme 218
§ 33. Die Lösungsmenge 223
§ 34. Der Dualitätssatz 224

7. Kapitel: Strategische Spiele (2. Teil) 227

§ 35. Extensivform und Normalform eines Spiels 227
§ 36. Das Minimax-Theorem 233
§ 37. Matrixspiele und lineare Programmierung 244

8. Kapitel: Spezielle Entscheidungsmodelle 248

§ 38. Lösungsmengen und Anwendung von Polynomen 248
§ 39. Stückweise linearer Maximand 262
§ 40. Konvexer, stückweise linearer Maximand 278
§ 41. Konkaver, stückweise linearer Maximand 287

9. Kapitel: Stochastische Modelle 291

§ 42. Wahrscheinlichkeitsfelder 291
§ 43. Präferenzen 300
§ 44. Stochastische Entscheidungsmodelle 305
§ 45. Modelle vom Tintnerschen Typ 313

10. Kapitel: Stochastische Prozesse 327

§ 46. Markowsche Prozesse 327
§ 47. Die Verteilungen von Zugängen und Abgängen 345
§ 48. Warteschlangen 375
§ 49. Die Überwachung von Maschinen 398
§ 50. Lagerhaltung 406
§ 51. Monte-Carlo-Methoden 418

11. Kapitel: Entscheidungsprozesse 424

§ 52. Eine deterministische Entscheidungsaufgabe 424
§ 53. Eine stochastische Entscheidungsaufgabe 430
§ 54. Deterministische Entscheidungsprozesse 439
§ 55. Stochastische Entscheidungsprozesse 445
§ 56. Approximation homogener Prozesse durch unendlichstufige 448

Literaturverzeichnis 455

Weitere Arbeiten, die mit dem behandelten Gegenstand in Zusammenhang stehen 460

Sachverzeichnis 462

Einleitung

Wie O. MORGENSTERN in seinem Aufsatz "Experiment and Large Scale Computation in Economics"[1] feststellt, "It is probably no exaggeration to say that in economics a new period is being ushered in. During the 1930's there came probably the last flowering of the type of static economics theory that had gradually evolved since the 1870's . . . But in the 1940's the crisis began to develop. New approaches to the economic problem the theory of games and, in its wake, linear programming were proposed and developed." Die Entwicklung hat eine Ursache in dem Aufkommen von Rechenanlagen während der vierziger Jahre. Den Anstoß dazu gab das Bedürfnis, umfangreiche rechnerische Probleme zu lösen, die im Zusammenhang mit Aufgabenstellungen aus dem Gebiet der Aero- und Hydromechanik entstanden.

In der Wirtschaftstheorie interessierte man sich schon in früherer Zeit für die numerische Auswertung von umfangreichen Gleichungssystemen. So konstruierte schon L. WALRAS[2] ein wirtschaftliches Gesamtmodell unter Voraussetzung vollständiger Konkurrenz und formulierte darin Bedingungen für ein statisches Gleichgewicht einer Volkswirtschaft. Das Walrasianische System war einer numerischen Behandlung nicht zugänglich, da es zu viele Variable enthielt. Als V. PARETO, der sich mit ähnlichen Problemen beschäftigte, 1905 die Frage nach der numerischen Auswertung stellt, kommt er zu dem Ergebnis, daß eine Wirtschaft mit 100 Personen, die 9700 Güter untereinander tauschen, durch 70699 Gleichungen zu beschreiben sei[3]. Die heute naheliegende Folgerung, die Walras-Paretoschen Gleichungssysteme durch geeignete Aggregation in numerisch auswertbare umzuwandeln, zog man zunächst nicht. Erst nachdem KEYNES in den dreißiger Jahren mit seinen einfachen makroökonomischen Modellen die Aufmerksamkeit auf das Aggregatbilden lenkte, ging W. LEONTIEF[4] in den vierziger Jahren daran, ein modifiziertes Walrasianisches Gleichungssystem für die US-Wirtschaft aufzustellen, dem statistisches Beobachtungsmaterial zugrunde lag.

---

[1] Erschienen in: MORGENSTERN, O. (Herausg.): Economic activity analysis, S. 484. New York-London 1954.

[2] WALRAS, L.: Eléments d'économie politique pure, 1874.

[3] Vgl. hierzu O. MORGENSTERN, a. a. O. S. 490 und V. PARETO: Manuel d'économie politique, S. 227. Paris 1906.

[4] LEONTIEF, W.: Computational problems arising in connection with economic analysis of interindustrial relationships. In: Proceedings on large scale digital calculation machinery, 1948.— LEONTIEF, W.: The structure of American economy, 2. Aufl., New York 1951.

Eine andere Entwicklung wurde von J. v. NEUMANN und O. MORGENSTERN mit der 1944 erschienenen Arbeit "Theory of Games and Economic Behavior" eingeleitet, nachdem v. NEUMANN schon 1928 in einem Aufsatz „Zur Theorie der Gesellschaftsspiele" Konfliktsituationen untersucht hatte[1]. v. NEUMANN und MORGENSTERN benutzen zur Lösung von Spielproblemen lineare Ungleichungen. Diese erwiesen sich späterhin als geeignet, die Bedingungen für andere unternehmerische Entscheidungsaufgaben zu formulieren.

Ein neuer Abschnitt der Physik begann mit dem Aufkommen der Infinitesimalrechnung gegen Ende des 17. Jahrhunderts. Sie erhielt weitere Anregungen durch die darauf aufbauende Theorie der Differentialgleichungen. Erst bei LAGRANGE in seiner Analytischen Mechanik (1788) findet man ein abgeschlossenes System der Mechanik im klassischen Sinne. Nachdem sich die Nationalökonomie im 19. Jahrhundert eine tiefere Kenntnis von den Tatsachen der Wirtschaft verschafft hatte, lag es nahe, die in der Physik mit Erfolg benutzten formalen Hilfsmittel auf ihre Fragestellungen anzuwenden. Da man es in der Physik wie auch in der Nationalökonomie mit Geschehen zu tun hat, die sich nur unter Berücksichtigung des zeitlichen Nacheinander beschreiben lassen, wird es in beiden Wissenschaften Bereiche geben, denen gleiche Methoden adäquat sind. Unterschiede ergeben sich aus der Tatsache, daß in der Wirtschaft im Gegensatz zur klassischen Physik die Beziehungen zwischen den auftretenden Größen meist nicht eindeutig sind. Dies liegt u. a. daran, daß im wirtschaftlichen Geschehen eine gewisse Entscheidungsfreiheit der Wirtschaftssubjekte besteht.

Es ist eine Eigenschaft vieler wirtschaftlicher Variablen, daß sie keine negativen Werte annehmen können, d. h. für sie bestehen Bedingungen in Form von Ungleichungen. Beispiele hierfür sind Produktionseinsätze, Ausbringungen, Güterbestände im Besitz eines Wirtschaftssubjektes, Dienstleistungen usw. Auf der anderen Seite stehen alle die Wirtschaft interessierenden Güter nur in beschränktem Umfang zur Verfügung. Dies drückt sich ebenfalls in Ungleichungen aus. Häufig bestehen daher wirtschaftliche Planungsaufgaben, in denen nach optimalen Entscheidungen gefragt wird, im Aufsuchen von Maxima oder Minima unter Berücksichtigung von Ungleichungen.

Es ist insbesondere das Verdienst von G. B. DANTZIG[2], ein Verfahren, das unter dem Namen Simplex-Methode bekannt ist, ent-

[1] NEUMANN, J. v.: Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. Math. Ann. **100**, 295 (1928).

[2] DANTZIG, G. B.: A procedure for maximizing a linear function to linear inequalities. H. Q. USAF. Washington 1948. — DANTZIG, G. B.: Verschiedene Arbeiten im Monograph 13 der Cowles Commission. New York 1951.

wickelt zu haben, mit dem Aufgaben der oben genannten Art bei linearen Relationen gelöst werden können. Unter anderem sind in diesem Zusammenhang die Arbeiten von A. CHARNES, D. GALE, H. KNESER, T. C. KOOPMANS, H. W. KUHN, G. MORTON, G. TINTNER, A. W. TUCKER, M. K. WOOD und der Cowles Commission zu nennen[1].

In vielen Bereichen der unternehmerischen Planung war die Unternehmungsleitung, insbesondere in solchen Fällen, in denen es sich um die gleichzeitige Erstellung einer größeren Anzahl von Gütern in einem Produktionsprozeß handelte, auf eine durch die Erfahrung unterstützte Intuition angewiesen. Denn die klassische Theorie lieferte keine für praktische Anwendungen geeigneten Verfahren, um umfangreiche Prozesse durchzurechnen. Wir wollen im folgenden einen Katalog von Anwendungsbeispielen für die Simplex-Methode geben. Da Linearität der Relationen Voraussetzung ist, spricht man hier auch von der Aufstellung linearer Programme (linear programming).

Eine Unternehmung erzeugt n Güter $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit m Produktionsfaktoren $V_1, V_2, \ldots, V_m$. Letztere stehen nur in begrenzter Menge zur Verfügung, sei es, daß es sich um festinstallierte Maschinen handelt, sei es, daß die in den Prozeß eingehenden Materialien nur bis zu einem gewissen Umfang beschafft werden können. Es sei bekannt, in welcher Weise die Faktoren in den Produktionsprozeß eingehen. Bei Kenntnis der Faktoren- und Güterpreise ist es dann möglich, die Güterkombinationen und entsprechend dazu die Faktorenkombinationen zu bestimmen, bei denen die Unternehmung ihr Gewinnmaximum erzielt. Solche Untersuchungen können auch für Teilbereiche angestellt werden.

In manchen Produktionszweigen geht die Lagerhaltung als ein wesentlicher Kostenfaktor ein. Dies ist insbesondere bei Handelsunternehmungen der Fall. Eine solche Unternehmung kaufe pro Monat

---

[1] Vgl. A. CHARNES: Optimality and degeneracy in linear programming. Econometrica **20**, 160 (1952). — CHARNES, A., W. W. COOPER and A. HENDERSON: An introduction to linear programming. New York 1953. — GALE, D., H. W. KUHN and A. W. TUCKER: Linear programming and the theory of games. In: Activity analysis of production and allocation. Cowles Commission Monograph 13. New York 1951. — KUHN, H. W., and A. W. TUCKER (Herausg.): Linear inequalities and related systems. Princeton 1956. — KNESER, H.: Mathematische Theorien des Wirtschaftslebens und der Soziologie. Math. Inst. Tübingen. Vorlesungsmanuskript W. S. 1952/53. — MORTON, G.: Notes on linear programming. Economica **18**, 397 (1951). — TINTNER, G.: Programmazione lineare stocastica con applicationi a problemi di economia agraria. Giornale degli Economisti **14**, 300 (1955). — DANTZIG, G. B., and M. K. WOOD: Programming of interdependent activities. I. General discussion. Econometrica **17**, 193 (1949). — KOOPMANS, T. C. (Herausg.): Activity analysis of production and allocation. Cowles Commission Monograph 13. New York 1951.

n Güter $X_1, X_2, \ldots, X_n$, es steht ein bestimmter Lagerraum zur Verfügung. Die Unternehmung interessiert sich bei bekannten Lagerkosten und Erwartungen über den Verkauf für die optimalen Lagerbestände.

In der Grundstoffindustrie, bei der Ölgewinnung, in Reedereibetrieben, bei Luftverkehrsgesellschaften und anderen Transportunternehmen möchte man die Beförderung der Güter optimal vornehmen. Eine Gesellschaft der Grundstoffindustrie besitze beispielsweise m Bergwerke $B_1, B_2, \ldots, B_m$ und n Hochöfen $H_1, \ldots, H_n$. Die Betriebe seien räumlich voneinander getrennt. Man kenne die maximalen Fördermengen der Bergwerke und die Kapazitäten der Hochöfen. Ebenso seien die Transportkosten von jedem Bergwerk zu jedem Hochofen bekannt. Mit Hilfe der Simplex-Methode lassen sich kostenminimale Transportpläne aufstellen[1].

Eine andere Art von Zuweisungsaufgaben hat man bei Fragen der Stellenbesetzung[2].

In technischen Mischprozessen werden oft die Mischungsverhältnisse für die einzelnen Stoffe nicht exakt angegeben, es werden nur Minimalforderungen an die Qualitäten der Gemische gestellt. Dabei ist es möglich, solche Gemische aus verschiedenen Qualitäten der Ausgangsstoffe zu erhalten, deren Herstellung bzw. Beschaffung verschieden hohe Kosten verursacht. Man möchte eine Entscheidung treffen, bei der die Mindestanforderungen an die zu erstellenden Produkte erfüllt sind und die Kosten minimiert werden[3].

In Kapitel 1 und 6 findet man die rechnerische Behandlung von linearen Programmieraufgaben. Zunächst werden an einfachen Beispielen verschiedene Möglichkeiten der Anwendung diskutiert und der Algorithmus erläutert.

Man hat es hierbei mit einer Linearform zu tun, deren Extremwerte unter Nebenbedingungen, die die Gestalt linearer Ungleichungen und linearer Gleichungen haben, aufzusuchen sind. Geometrisch bedeutet dies, in einer eben begrenzten konvexen Punktmenge diejenigen Punkte

[1] Vgl. F. L. Hitchcock: The distribution of a product from several sources to numerous localities. J. Math. and Phys. **20**, 224 (1941). — Koopmans, T. C., and St. Reiter: A model of transportation. In: T. C. Koopmans (Herausg.): Activity analysis of production and allocation. New York 1951.

[2] Vgl. D. R. Votaw: Methods of solving some personnel classification problems. Psychometrica **17**, 255 (1952). — Kuhn, H. W.: The Hungarian method for the assignment problem. Naval Research Logistics Quarterly **2**, 83 (1955). — Motzkin, T. S.: The assignment problem. Proceedings of the Sixth Symposium in Applied Mathematics, 1956. — Friedman, L., and A. J. Yaspan: An analysis of stewardess requirements and scheduling for a major domestic airline, Annex A: Problem technique. Naval Research Logistics Quarterly **4**, 193 (1957).

[3] Symonds, G. H.: Application of linear programming to the solution of refinery problems. New York 1955.

aufzusuchen, für die eine einparametrische Schar von Hyperebenen (Indifferenzflächen) den höchsten bzw. niedrigsten Parameterwert hat. Eine Punktmenge heißt dabei konvex, wenn die Verbindungsstrecken von allen Paaren ihrer Punkte in ihr liegen. Durch die Nebenbedingungen werden konvexe Polyeder beschrieben (Kapitel 5). Solche Gebilde wurden schon 1901 von J. FARKAS[1] untersucht. 1935 erschien eine Arbeit von H. WEYL[2] über diesen Gegenstand.

Auf einem endlichen konvexen Polyeder nimmt eine Linearform ihre Extremwerte in Eckpunkten an. Die Menge der Extrempunkte ist wieder ein konvexes Polyeder, das von diesen Eckpunkten erzeugt wird. Das Lösungsgebilde ist, falls es nicht mit dem gegebenen Polyeder übereinstimmt, eines seiner Seitenpolyeder, eine Kante, ein Simplex oder eine Vereinigung von Simplexen. Im Falle eindeutiger Lösbarkeit besteht das Lösungsgebilde aus einem Eckpunkt des gegebenen Polyeders. Eine lineare Ungleichung bestimmt einen Halbraum, der durch die Hyperebene der zugehörigen linearen Gleichung begrenzt wird. Der Durchschnitt von Halbräumen und Hyperebenen ist entweder leer oder ein konvexes Polyeder. Dabei ist es zugelassen, daß dieses Polyeder unendlich ferne Eckpunkte hat. Wegen der Nichtnegativitätsbedingungen für die auftretenden Variablen beschränkt man sich auf den positiven Orthanden. Verbindungsstrecken von unendlich fernen Punkten lassen sich daher eindeutig definieren. Beim Auftreten unendlich ferner Eckpunkte kann es vorkommen, daß die Linearform auf dem konvexen Polyeder unbeschränkt ist. Dies bedeutet, daß keine Lösung existiert. Ist der Durchschnitt der Halbräume und Hyperebenen leer, so sind die Nebenbedingungen nicht miteinander verträglich.

Zur Bestimmung der Extrema könnte man so vorgehen, daß man alle Eckpunkte ermittelt und die Werte der Linearform in diesen vergleicht. Schon bei einfachen Aufgabenstellungen ist oft die Anzahl der Eckpunkte so groß, daß dieses Vorgehen nicht angemessen erscheint. Die Simplex-Methode gestattet es im allgemeinen, sich auf relativ wenig Eckpunkte zu beschränken. Das Rechenverfahren beginnt damit, daß man mit Hilfe der Nebenbedingungen einen Eckpunkt bestimmt. In einzelnen Schritten sucht man weitere Ecken auf, an denen die Linearform größere Werte annimmt.

Bei Entscheidungsmodellen hat man eine Anzahl von Personen, die als wollende und handelnde auftreten. Für jede Person gibt es eine

---

[1] FARKAS, J.: Über die Theorie der einfachen Ungleichungen. J. reine angew. Math. **124**, 1 (1901).

[2] WEYL, H.: Elementare Theorie der konvexen Polyeder. Comm. Math. Helv. **7**, 290 (1935). (Engl. Übersetzung in: Contributions to the theory of games, Vol. I, herausgegeben von H. W. KUHN and A. W. TUCKER. Princeton 1950.)

Menge zulässiger Entscheidungen. Für jede Kombination von Entscheidungen hat man ein Ergebnis (deterministische Modelle) oder eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für mögliche Ergebnisse (stochastische Modelle). Es wird gefordert, daß jede Person eine Präferenzenvorstellung zur Beurteilung der Resultate hat, das soll heißen, sind R_1 und R_2 zwei mögliche Resultate, dann kann jede Person angeben, welches der beiden sie vorzieht bzw. ob sie R_1 und R_2 als gleichwertig betrachtet. Vielfach benutzt man Präferenzenvorstellungen dazu, Präferenzen- oder Zielfunktionen zu konstruieren. Jede beteiligte Person möchte ihre Entscheidungen so treffen, daß ihre Präferenzenfunktion möglichst große Werte annimmt. Da die einzelnen Personen nicht alle Vorgänge kontrollieren, ist der Wert der Präferenzenfunktion nicht nur von den eigenen Entscheidungen abhängig, man hat Interessenkonflikte.

Anstelle von Entscheidungsmodell verwendet man auch die Vokabel strategisches Spiel, wobei man bei strategischen Spielen besonders auf solche Situationen abhebt, in denen mindestens zwei Personen auftreten. Im 3. und 7. Kapitel werden sog. Matrixspiele (endliche 2-Personen-Nullsummenspiele) betrachtet. Dabei zeigt es sich, daß ein Zusammenhang zwischen solchen Spielen und Aufgaben der linearen Programmierung besteht; er ermöglicht die Bestimmung von Lösungen.

Wird die Anzahl der Personen nicht erwähnt, dann soll es sich im folgenden um Entscheidungsmodelle handeln, in denen nur eine Person auftritt. Hier hat man es mit Extremalaufgaben zu tun. Man sucht die Extremwerte einer Abbildung f bzgl. einer Menge M; es wird die Menge $\mathcal{L}(f, M)$ der maximalen (bzw. minimalen) Punkte von M bestimmt. Im 8. Kapitel sind Eigenschaften der Lösungsmenge $\mathcal{L}(f, M)$ untersucht. In gewissen Fällen lassen sich lineare Programmieraufgaben durch Verwenden von Polynomen vereinfachen. Man benutzt hierbei Eigenschaften von Lösungsmengen. Ebenfalls im 8. Kapitel findet man die Methode von CHARNES-COOPER[1] für stückweise lineare Maximanden.

Ein näheres Eingehen auf stochastische Entscheidungsmodelle findet man im 9. Kapitel. Es werden zunächst die Eigenschaften von Präferenzenskalen und ihrer Darstellung durch Zielfunktionen untersucht. Durch eine Zielfunktion wird einem stochastischen Entscheidungsmodell eine Extremumaufgabe zugeordnet. Man hat eine Menge X möglicher Entscheidungen. Zu jeder Entscheidung x aus X hat man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Ergebnis. Für diese Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist eine Präferenzenskala gegeben. Sie wird durch eine Zielfunktion, die jeder Verteilung des Ergebnisses eine reelle Zahl zuordnet, charakterisiert. Eine Entscheidung heißt optimal, wenn das Wahrscheinlichkeitsfeld ihres Ergebnisses bzgl. der Präferenzen-

[1] Vgl. A. CHARNES u. W. W. COOPER: Nonlinear power of adjacent extreme point methods in linear programming. Econometrica **25**, 132 (1957).

skala vor den anderen möglichen vorgezogen oder als gleichwertig betrachtet wird. Ist eine Zielfunktion gegeben, dann ist ihr Wert bei einer optimalen Entscheidung größer oder gleich den Werten der Zielfunktion für alle möglichen Entscheidungen. Stochastische Entscheidungsmodelle sind ein geeignetes Hilfsmittel zur Beschreibung zahlreicher wirtschaftlicher Situationen. Die betrachteten Beispiele behandeln Fragestellungen der Lagerhaltung und des Aktienkaufes, weiterhin wird auf Modelle eingegangen, die G. TINTNER[1] untersucht hat.

Hieran schließt sich im 10. Kapitel die Behandlung von stochastischen Prozessen an. Einen Spezialfall stochastischer Prozesse hat man in den sog. Markowschen Prozessen. Man bezeichnet sie auch als stochastische Prozesse ohne Nachwirkung. Anwendungen liefern Warteschlangen und Lagerhaltungsprobleme. Gelegentlich erweist es sich als vorteilhaft, numerische Rechnungen durch stochastische Simulationen (Monte-Carlo-Methoden) zu ersetzen, dies gilt insbesondere für Warteschlangen.

Multitemporale Entscheidungsmodelle oder, wie man auch sagt, Entscheidungsprozesse, werden im 11. Kapitel betrachtet. Man hat eine Folge von Zeitpunkten, in jedem Zeitpunkt steht man einer bestimmten Situation gegenüber und hat eine Entscheidung zu treffen. Durch eine gegebene Situation und eine Entscheidung in einem Zeitpunkt wird eine Wahrscheinlichkeitsverteilung im nachfolgenden Zeitpunkt bestimmt. Bei der Entscheidung im nachfolgenden Zeitpunkt weiß man, welche Situation dann realisiert ist. Es ist eine Präferenzenskala für die Wahrscheinlichkeitsfelder der Situationen in den verschiedenen Zeitpunkten gegeben. Im ersten Zeitpunkt kann man nicht sagen, welche Entscheidungen man zu den späteren Zeitpunkten treffen wird, da nicht bekannt ist, welche Situationen im einzelnen eintreten werden. Es läßt sich aber eine Vorschrift angeben, die für jeden Zeitpunkt angibt, was in den verschiedenen möglichen Situationen zu tun ist. Eine solche Vorschrift bezeichnet man als einen Plan. Ein Plan ist also eine Folge von Zuordnungen, die für jeden Zeitpunkt angibt, welche mögliche Entscheidung in Abhängigkeit vom Zustand in diesem Zeitpunkt zu treffen ist. Durch den Zustand im ersten Zeitpunkt und einen Plan ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zustände in den einzelnen Zeitpunkten bestimmt. Man interessiert sich für Eigenschaften optimaler Pläne. Dabei gilt das sog. Optimalitätsprinzip[2]. Die Anwendungen sind nicht auf zeitliche Abläufe beschränkt, anstelle der Zeit wird vielfach eine andere das Modell charakterisierende Größe verwendet.

---

[1] TINTNER, G.: Stochastic linear programming with applications to agricultural economics. Second Symposium in linear programming, Vol. I, 197, National Bureau of Standards. Washington 1955.

[2] Vgl. R. BELLMAN: Dynamic programming, S. 83 u. 291. Princeton 1957.

Erstes Kapitel

Anwendungen der Simplex-Methode

Bei der Darstellung der Simplex-Methode und der dabei auftretenden Spezialfälle soll schrittweise vorgegangen werden. Es scheint angebracht, mit einer anschaulichen Betrachtung zu beginnen, die bereits einen Einblick in die Zusammenhänge erlaubt.

§ 1. Geometrische Einführung

1. Die Entscheidung für ein Produktionssortiment. Betrachten wir als Beispiel einen Betrieb, in dem zwei Produkte X_1 und X_2 zur Fertigung drei Maschinen A, B, C passieren müssen. Die Maschinenzeit bei A sei für X_1 doppelt so groß wie für X_2, bei B seien die Maschinenzeiten gleich und bei C sei die Maschinenzeit für X_2 dreimal so groß wie für X_1. Auf A können in der Woche maximal 120 Stück von X_2 oder 60 Stück von X_1 bearbeitet werden; auf B können wöchentlich maximal 70 Stück von X_1 oder X_2 durchlaufen; auf C habe man einen maximalen Durchgang von 150 Stück X_1 oder 50 Stück X_2 je Woche.

Dies bedeutet, daß man mit den Maschinen A, B, C bestenfalls z. B. folgende Kombinationen bearbeiten kann:

auf A		auf B		auf C	
Stück X_1	Stück X_2	Stück X_1	Stück X_2	Stück X_1	Stück X_2
0	120	0	70	0	50
10	100	10	60	30	40
20	80	20	50	45	35
30	60	30	40	60	30
40	40	40	30	90	20
50	20	50	20	120	10
60	0	70	0	150	0

Natürlich ist es auch möglich, solche Kombinationen zu bearbeiten, die unterhalb des wöchentlichen Durchlaufmaximums liegen. Die oben tabellarisch aufgeführten Maximalkombinationen gelten jeweils nur für die isolierte Betrachtung einer Maschine. Für den Gesamtbetrieb kommen jedoch nur solche Kombinationen in Frage, die simultan auf allen drei Maschinen realisierbar sind.

Um einen Überblick über die in einer Woche gleichzeitig realisierbaren Kombinationen zu erhalten, sollen die Möglichkeiten graphisch aufgezeigt werden. Dazu werden die wöchentliche Stückzahl von X_1 mit x_1 bezeichnet und die von X_2 mit x_2. Da man auf A beispielsweise 60 Stück X_1 oder 120 Stück X_2 je Woche maximal bearbeiten kann, lassen sich die maximalen Kombinationen (x_1, x_2) der für sich betrachteten Maschine A durch die Gleichung charakterisieren:

$$2x_1 + x_2 = 120 \qquad (x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0)\,. \tag{1.1}$$

Die Summe der Maschinenzeiten für X_1 und X_2 ergibt die maximale wöchentliche Betriebszeit. Treten für die Maschine A Leerzeiten auf, dann bedeutet dies, daß die Summe $2x_1 + x_2$ kleiner als 120 ist. Man erhält somit alle denkbaren Kombinationen (x_1, x_2) für A durch die Ungleichung

$$2x_1 + x_2 \leqq 120 \tag{1.2}$$

mit $x_1 \geqq 0$ und $x_2 \geqq 0$. Die graphische Interpretation findet man in der Fig. 1. In einem (x_1, x_2)-Koordinatensystem sind die Kombinationen der Güter X_1 und X_2 aufgetragen. Die maximalen Kombinationen von A liegen auf der Strecke $\overline{P_1 P_2}$, die der Gl. (1.1) entspricht. So bedeutet z. B. der Punkt Q_1 auf dieser Strecke mit den Koordinaten $x_1 = 20$, $x_2 = 80$ die Bearbeitung von 20 Stück des Produktes X_1 und 80 Stück des Produktes X_2. Da auch eine Nicht-Vollausnutzung der Maschine möglich ist, sind alle mit A realisierbaren Kombinationen durch die Punkte des schraffierten Dreiecks $O P_1 P_2$ dargestellt. Der Punkt Q_2 entspricht der Kombination $x_1 = 40$, $x_2 = 30$; sie ist auf A durchführbar, es entstehen dabei aber Leerzeiten, denn bei $x_1 = 40$ Stück je Woche könnte man bis zu $x_2 = 40$ Stück je Woche bearbeiten.

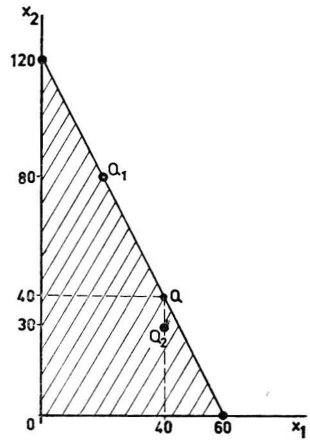

Fig. 1

Bei den Maschinen B und C hat man als Bedingungen für die Vollausnutzung die Gleichungen

$$x_1 + x_2 = 70 \quad \text{(B)}$$
$$x_1 + 3x_2 = 150 \quad \text{(C)}\,.$$

In Fig. 2 entsprechen diesen Gleichungen gemäß den vorstehenden Erläuterungen die Strecken $\overline{P_3 P_4}$ und $\overline{P_5 P_6}$, wenn man noch $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$ berücksichtigt. Die mit der Maschine B bzw. C realisierbaren Kombinationen (x_1, x_2) entsprechen den Punkten des Dreiecks $O P_3 P_4$ bzw. des Dreiecks $O P_5 P_6$. Diese Dreiecke lassen sich durch die Ungleichungen

$$x_1 + x_2 \leqq 70 \quad \text{(B)} \tag{1.3}$$

und

$$x_1 + 3x_2 \leqq 150 \quad \text{(C)} \tag{1.4}$$

charakterisieren, jeweils mit den Bedingungen

(1.5) $$x_1 \geqq 0\,, \quad x_2 \geqq 0\,.$$

Da jedoch der Betrieb nur ein solches Produktionsprogramm verwirklichen kann, dessen Kombination auf den drei Maschinen gleichzeitig bearbeitbar ist, so ist seine realisierbare Produktion auf jene

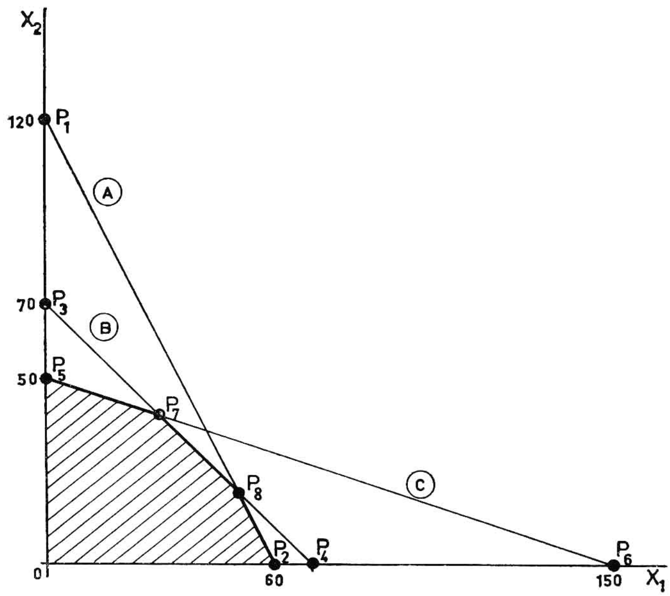

Fig. 2

Punkte im (x_1, x_2)-Koordinatensystem beschränkt, die sowohl im Dreieck $O\,P_1\,P_2$ als auch in den Dreiecken $O\,P_3\,P_4$ und $O\,P_5\,P_6$ liegen. Die den drei Dreiecken gemeinsamen Punkte bilden das in Fig. 2 schraffierte Fünfeck $O\,P_5\,P_7\,P_8\,P_2$. Analytisch wird es durch das System der Ungleichungen (1.2), (1.3), (1.4) und (1.5) beschrieben.

Die technischen Möglichkeiten des betrachteten Betriebes sind damit graphisch und analytisch beschrieben. Der Inhaber dieses Betriebes, die Unternehmung also, steht jedoch vor der Frage, für welche der zahlreichen technischen Möglichkeiten er sich bei seinem Produktionsprogramm entscheiden soll. Unterstellt man als Ziel der Unternehmung, den maximalen Gewinn zu realisieren, so müssen ihr die „Stückgewinne“ p_1 und p_2 (worunter hier die Differenz zwischen gegebenen Absatzpreisen und Materialkosten je Stück verstanden sei und die übrigen Kosten als konstant unterstellt werden) bekannt sein. Sei etwa $p_1 = 10$ DM