Research Notes in Mathematics 60

H Brezis & J L Lions (Editors)

Nonlinear partial differential equations and their applications Collège de France Seminar VOLUME II

Pitman Advanced Publishing Program
BOSTON · LONDON · MELBOURNE

H Brezis & J L Lions (Editors)
D Cioranescu (Coordinator)
Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

Nonlinear partial differential equations and their applications Collège de France Seminar VOLUME II

Pitman Advanced Publishing Program
BOSTON · LONDON · MELBOURNE

PITMAN BOOKS LIMITED
128 Long Acre, London WC2E 9AN

PITMAN PUBLISHING INC
1020 Plain Street, Marshfield, Massachusetts 02050

Associated Companies
Pitman Publishing Pty Ltd, Melbourne
Pitman Publishing New Zealand Ltd, Wellington
Copp Clark Pitman, Toronto

First published 1982

AMS Subject Classifications: 35-XX, 34-XX, 46-XX

British Library Cataloguing in Publication Data

Nonlinear partial differential equations and their
applications.—(Research notes in mathematics; 60)
Vol. 2
1. Differential equations, Partial
I. Brézis, H. II. Lions, J. L. III. Cioranescu, D.
IV. Series
515.3'53 QA374
ISBN 0-273-08541-7

Library of Congress Cataloging in Publication Data (Revised)
Main entry under title:

Nonlinear partial differential equations and their
applications.
(Research notes in mathematics; 53, 60)
Lectures presented at the Seminar on Partial
Differential Equations. Collège de France,
Paris, 1978–1979, 1979–1980.
English and French.
1. Differential equations, Partial—Congresses.
2. Differential equations, Nonlinear—Congresses.
I. Brézis, H. (Haim) II. Lions, Jacques Louis.
III. Seminar on Partial Differential Equations
(1978–1979, 1979–1980; Collège de France) IV. Series.
QA377.N67 515.3'53 81–4350
ISBN 0-273-08491-7 (v. 1) AACR2
ISBN 0-273-08541-7 (v. 2)

ISBN 0 273 08541 7

Reproduced and printed by photolithography
in Great Britain by Biddles Ltd, Guildford

Preface

The present volume consists of written versions of lectures held during the year 1979-1980 at the weekly Seminar on Applied Mathematics at the College de France. They mostly deal with various aspects of the theory of non linear partial differential equations.

We thank :

- the speakers who have kindly accepted to write up their lectures.
- Mme Doina Cioranescu who has coordinated the activities of the Seminar and prepared the material for publication; without her patience and determination this volume would never have appeared.
- Mme Force and Mlle Chaouche for their competent typing of the manuscripts.

Paris, July 1981

Haim BREZIS Jacques Louis LIONS

P.S. The Seminar is partially supported by a grant from the C.N.R.S.

Préface

Ce volume regroupe les textes des conférences données en 1979-1980 au Séminaire de Mathématiques Appliquées qui se réunit chaque semaine au Collège de France. Elles concernent principalement l'étude d'équations aux dérivées partielles non linéaires sous des éclairages variés.

Nous remercions vivement :

- les conférenciers qui ont bien voulu accepter de rédiger leurs exposés,
- Mme Doina Cioranescu qui s'est chargée de coordonner les activités du Séminaire et de la préparation matérielle de cet ouvrage; sans sa patience et sa persévérance cette publication n'aurait pas vu le jour,
- Mme Force, Melle Chaouche qui ont tapé avec compétence les manuscrits.

Paris, Juillet 1981

Haïm BREZIS Jacques Louis LIONS

P.S. Le séminaire était subventionné en partie par les crédits d'une CRP du C.N.R.S.

Contents

S ALINHAC

Forte unicité pour des inégalités différentielles

INTRODUCTION

Dans cet exposé, nous développerons deux aspects du problème de l'unicité forte pour des opérateurs différentiels.

D'une part, nous rappellerons les définitions et résultats classiques, ainsi que des résultats plus profonds récemment obtenus en collaboration avec M.S. Baouendi.

D'autre part, nous présenterons des inégalités de Carleman "abstraites" pour le problème de Cauchy caractéristique, qui semblent utiles dans des situations variées.

L'intérêt, la signification et l'optimalité de ces inégalités seront discutés à propos du problème de la forte unicité auquel elles s'appliquent.

I. LE PROBLEME DE LA FORTE UNICITE

Nous nous limiterons à l'aspect géométriquement simple suivant : Un opérateur différentiel $P(x,D_x)$ a la forte unicité en 0 si "$u \in C^\infty$, $Pu = 0$ et u plate en 0" implique "$u \equiv 0$ près de 0" (la fonction u est dite "plate" en 0 si $\forall\alpha$, $D^2u(0) = 0$).

Il s'agit d'une propriété locale en 0, plus forte que l'unicité de Cauchy ou la quasi-analyticité ; tout opérateur hypoelliptique-analytique la possède.

Le principal résultat classique est dû à Aronszajn et Cordes [4], [6], et il affirme que si P est elliptique d'ordre deux à coefficients (assez réguliers) réels, P a la forte unicité en tout point.

Le théorème suivant affine ce résultat (voir [3]).

Théorème 1 *Soit* $P(x,D_x) = \sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha(x)D_x^\alpha$ *un opérateur elliptique défini dans un voisinage* V *de* 0 *dans* $\mathbb{R}^n$. *On suppose* $a_\alpha \in C^\infty(V)$, *et* $a_\alpha(0) \in \mathbb{R}$ *pour* $|\alpha| = 2$. *Si* $u \in C^\infty(V)$ *est plate en* 0, *et vérifie*

$$|P(x,D_x)u(x)| \leq C|x|^\varepsilon \left(\frac{|u(x)|}{|x|^2} + \frac{|\nabla u(x)|}{|x|}\right)$$

(pour $C \geq 0$ *et* $\varepsilon > 0$*), alors* $u \equiv 0$ *près de* 0.

Pour des opérateurs d'ordre quatre, on a le

Théorème 2 *Soit* $P(x,D_x) = P_1(x,D_x)P_2(x,D_x) + R(x,D_x)$, *où* P_1 *et* P_2 *sont des opérateurs elliptiques d'ordre* 2, *et* R *un opérateur d'ordre* 3. *On suppose*

$$P_1(0,D_x) = P_2(0,D_x) = Q(D_x)$$

où Q *est homogène du second ordre à coefficients réels.*

Si $u \in C^\infty(V)$ *est plate en* 0 *et vérifie*

$$|P(x,D_x)u(x)| \leq C|x|^\varepsilon \left(\frac{|u(x)|}{|x|^4} + \frac{|\nabla u(x)|}{|x|^3}\right) + \sum_{|\alpha|=2} \frac{|D_x^\alpha u(x)|}{|x|^2}\Big)$$

(*pour* $C \geq 0$ *et* $\varepsilon > 0$), *alors* $u \equiv 0$ *près de* 0.

De façon générale, un opérateur $P(x,D_x)$ d'ordre m s'écrit, en coordonnées polaires (t,θ) ($t=|x|$, $\theta \in S^{n-1}$, $x = t\theta$), et après multiplication par t^m, sous la forme $P(t,\theta,t\frac{\partial}{\partial t},D_\theta) = \sum_{j=0}^{m} P_{m-j}(t,\theta,D_\theta)(t\frac{\partial}{\partial t})^j$; les opérateurs P_k sont d'ordre k, différentiels en θ. Le problème de la forte unicité en 0 pour $P(x,D_x)$ devient alors le problème de l'unicité de Cauchy par rapport à la surface $(t=0)$ pour $P(t,\theta,t\frac{\partial}{\partial t},D_\theta)$.

Dans ce cadre, on peut énoncer un résultat général d'unicité, dont les hypothèses sont parallèles à celles du théorème d'unicité de Calderon [5] pour le cas non-caractéristique, le "bloc" $t\frac{\partial}{\partial t}$ remplaçant ici le D_t usuel.

<u>Théorème 3</u> *Soit* $P(t,\theta,t\frac{\partial}{\partial t},D_\theta) = \sum_{j=0}^{m} P_{m-j}(t,\theta,D_\theta)(t\partial_t)^j$, *où les* P_k *sont des opérateurs pseudo-différentiels en* θ *sur une variété compacte* M $(\theta \in M)$, *dépendant de façon régulière de* $t \in [0,T_0]$, *et* $P_0 = 1$. *On fait les hypothèses suivantes :*

a) *Le symbole principal* $p(t,\theta,\rho,\eta) = \sum_{j=0}^{m} p_{m-j}(t,\theta,\eta)\rho^j$ *de* P *(où* p_k *est le symbole principal de* P_k*) peut être factorisé, globalement sur* $[0,T_0]\times\mathbb{R}\times(T^*M\backslash 0)$ *sous la forme*

$$p(t,\theta,\rho,\eta) = \prod_{i=1}^{m}(\rho-\ell_i(t,\theta,\eta)),$$

où les ℓ_i *sont* C^∞ *sur* $[0,T_0]\times(T^*M\backslash 0)$, *homogènes de degré* 1, *et vérifient :*

$\ell_{2j-1}(0,\theta,\eta) = \ell_{2j}(0,\theta,\eta)$ *pour* $j=1,\dots,p$ $(0 \le 2p \le m)$,

$\ell_1,\ell_3,\dots,\ell_{2p-1},\ell_{2p+1},\ell_{2p+2},\dots,\ell_m$ *sont distincts pour*

$t=0$, $(\theta,\eta)\in T^*M\backslash 0$.

Chaque $\ell_i(i=1,\dots,m)$ *est de l'un des trois types suivants :*

i) $\ell_i(t,\theta,\eta)$ *imaginaire pur sur* $[0,T_0]\times(T^*M\backslash 0)$.

ii) $\mathrm{Re}\,\ell_i(0,\theta,\eta) < 0$ *sur* $T^*M\backslash 0$.

iii) $\mathrm{Re}\,\ell_i(0,\theta,\eta) > 0$ *sur* $T^*M\backslash 0$.

De plus, si $1 \leq i \leq 2p$, ℓ_i *doit être de type* ii) *ou* iii).

b) *L'opérateur* $P(0,\theta,\rho,D_\theta) = \sum_{j=0}^{m} P_{m-j}(0,\theta,D_\theta)\rho^j$ *admet la factorisation*

$$P(0,\theta,\rho,D_\theta) = \prod_{i=1}^{m} (\rho-\Lambda_i(\theta,D_\theta)),$$

où Λ_i *est d'ordre* 1, *de symbole principal* $\ell_i(0,\theta,\eta)$. *De plus, si* ℓ_i *est de type* iii), *on a* $[\Lambda_i,\Lambda_i^*] = 0$.

Enfin, si tous les ℓ_i *sont de type* i), *on peut ignorer la condition* b).

Alors il existe $T \in (0,T_0]$ *tel que si* $u \in C^\infty([0,T_0] \times M)$, *plate sur* $t = 0$, *vérifie* $Pu = 0$ *dans* $[0,T_0] \times M$, *alors* $u = 0$ *dans* $[0,T] \times M$.

On voit facilement que le théorème 3 contient la partie unicité des théorèmes 1 et 2 (en l'appliquant avec $M = S^{n-1}$). Le choix $M = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ conduit à des résultats d'unicité pour des fonctions périodiques en les variables tangentielles. Enfin, par le changement de variables $t = e^{-x}$, $t \frac{\partial}{\partial t}$ devient $-\partial_x$, et le théorème 3 peut être considéré comme un résultat d'unicité des solutions d'un opérateur, satisfaisant à l'infini des conditions de décroissance type exponentiel.

Pour démontrer le théorème 3, on factorise (modulo des restes convenables) l'opérateur P en un produit de facteurs du 1er ordre de la forme $t\partial_t - L_i(t,\theta,D_\theta)$; ensuite on applique à ces facteurs les inégalités de Carleman que l'on va maintenant présenter.

2. DES INEGALITES DE CARLEMAN ABSTRAITES POUR LE PROBLEME DE CAUCHY

Soient V et H deux espaces de Hilbert, V dense dans H, $\|v\|_H \leq \|v\|_V$. On identifie H avec son antidual, et V^* dénote l'antidual de V.

On a donc $V \subset H \subset V^*$. Le produit scalaire dans H sera noté simplement $(\, , \,)$.

Soit $T_0 > 0$; pour tout $t \in [0,T_0]$, soient $J(t)$ et $K(t) \in \mathcal{L}(V,V^*)$; plus précisément, on suppose

$$J,K \in C^\infty([0,T_0], \mathcal{L}(V,V^*)).$$

On suppose de plus $J^* = J$, $K^* = -K$, où $*$ désigne l'opérateur adjoint. Enfin, soit $D \subset V$ tel que $J,K \in C^\infty([0,T_0], \mathcal{L}(D,V))$.

On considère l'opérateur abstrait

$$L = t \frac{\partial}{\partial t} + J + K.$$

Dans le cadre de la partie 1, $H = L^2(M)$, $V = H^{1/2}(M)$, $D = H^2(M)$ (espaces de Sobolev d'ordre 1/2 et 2), et J et K sont les parties auto-adjointes et anti auto-adjointes de l'opérateur pseudo-différentiel du premier ordre $-L_i(t,\theta,D_\theta)$.

Le théorème fondamental est le suivant (cf. [3]).

Théorème 4 1) *Supposons qu'il existe* $C \geq 0$, $C_1 \geq 0$ *telles que* $\forall v \in D$, $\forall t \in [0,T_0]$,

$$(J(t)v,v) \geq -C\|v\|_H^2 + C_1\|v\|_V^2.$$

alors pour tout $M \geq 0$, *il existe* $T \in (0,T_0]$, *et* $\gamma_0 > 0$ *tels que pour* $u \in C^\infty([0,T],D)$, u *plate sur* $t = 0$, *et* $\gamma \geq \gamma_0$, *on a l'inégalité*

$$\frac{\gamma}{2} \|t^{-\gamma}|\log t|^{-M\gamma} u\|_{L^2(0,T;H)} + C_1 \|t^{-\gamma}|\log t|^{-M\gamma} u\|_{L^2(0,T;V)}$$

$$\leq \|t^{-\gamma} |\log t|^{-M\gamma} Lu\|_{L^2(0,T;H)}.$$

2) *Supposons qu'il existe* $\lambda \geq 0$, $C \geq 0$, $C_1 \geq 0$ *telles que* $\forall v \in D$, $\forall t \in (0,T_0]$,

$$((2\lambda J(t) + J_t'(t) + \frac{1}{t} [K,J])v,v) \leq C\|v\|_H^2 - C_1\|v\|_V^2.$$

Alors pour tout $M > 0$, *il existe* $T \in (0,T_0]$, *et* $\gamma_0 > 0$ *tels que pour* $u \in C^\infty([0,T],D)$, u *plate sur* $t = 0$ *et* $t = T$, $\gamma \geq \gamma_0$, *on a l'inégalité*

$$\frac{\gamma M}{2}\|t^{-\gamma-1/2}|\log t|^{-M\gamma-1} u\|^2_{L^2(0,T;H)} + C_1 \|t^{-\gamma}|\log t|^{-M\gamma} u\|^2_{L^2(0,T;V)}$$

$$\leq e^{2\lambda T} \|t^{-\gamma-1/2}|\log t|^{-M\gamma} Lu\|^2_{L^2(0,T;H)}.$$

3) *Supposons qu'il existe* $C \geq 0$ *telle que* $\forall v \in D$, $\forall t \in [0,T_0]$,

$$\|(J_t' + \frac{1}{t}[K,J])v\|_H \leq C(\|Jv\|_H + \|v\|_H).$$

Alors pour tout $M > 0$, *il existe* $T \in (0,T_0]$ *et* $\gamma_0 > 0$ *tels que pour* $u \in C^\infty([0,T];D)$, u *plate en* $t = 0$ *et* $t = T$, $\gamma \geq \gamma_0$, *on a l'inégalité*

$$\frac{\gamma M}{2} \|t^{-\gamma-1/2}|\log t|^{-M\gamma-1}u\|^2_{L^2(0,T;H)} \leq \|t^{-\gamma-1/2}|\log t|^{-M\gamma} Lu\|^2_{L^2(0,T;H)}$$

Bien entendu, le théorème 4 implique l'unicité de Cauchy pour des opérateurs abstraits L vérifiant les hypothèses d'un des points 1), 2) ou 3).

Nous allons maintenant discuter le sens des hypothèses 1), 2) ou 3), en rapport avec le problème concret de la forte unicité :

A) Le cas 1) du théorème 4 apparait en particulier, dans le cadre des théorèmes 3, lorsque ℓ_i est de type i) (J est alors d'ordre zéro) ou ii) (à cause de l'inégalité de Gårding) ; c'est-à-dire lorsqu'on considère un facteur hyperbolique (type i)), ou elliptique avec "J positif" (type ii)). C'est le cas facile du théorème, où le contrôle de u par Lu s'effectue "sans perte de poids". Malheureusement, dans les cas concrets, le type ii) n'apparaît jamais tout seul : Par exemple, pour le laplacien dans le plan, $P = (\partial_t)^2 + \partial_\theta^2 = (t\partial_t - |D_\theta|)(t\partial_t + |D_\theta|)$, et les types ii) et iii) apparaissent simultanément (si l'on factorise de façon différentielle $(t\partial_t - i\partial_\theta)(t\partial_t + i\partial_\theta)$, les opérateurs $\pm i\partial_\theta$ ont leurs symboles principaux $\mp\eta$ "sans signe", et on doit microlocaliser en distinguant $\eta > 0$ et $\eta < 0$, avec le même problème).

B) Dans le cas 2) du théorème 4, deux points sont décisifs :

α) le rôle joué par le terme de commutation $\frac{1}{t}[K,J]$, qui doit avoir "le bon signe".

β) le fait que u n'est contrôlé par Lu qu'avec une "perte de poids" de $\dfrac{1}{|\log t|}$.

Commençons par α) : il est possible de construire (cf. [21]) une fonction $a(t,\theta)$, continue, $a(0,\theta) = 0$, et une fonction C^∞ non triviale u, plate sur $t = 0$, telles que $(t\partial_t - |D_\theta| + a\partial_\theta)u = 0$. Si a était C^1, elle s'annulerait comme t et les hypothèses de 2) du théorème 4) seraient vérifiées pour λ assez grand . Cela montre l'importance essentielle du terme en $\frac{1}{t}[K,J]$. De façon générale, si $[K,J] = 0$ pour $t = 0$, il suffit, lorsque J est négatif, de prendre λ assez grand pour obtenir l'hypothèse de 2) ; C'est ce qui explique la curieuse hypothèse du théorème 3, b), demandant $[\Lambda_i,\Lambda_i^*] = 0$ lorsque ℓ_i est de type iii). Comme on le voit facilement en passant en coordonnées polaires, cette hypothèse rend nécessaires les hypothèses des théorèmes 1 et 2 où l'on demande que les coefficients des opérateurs considérés soient réels en 0. Bien entendu, on pourrait objecter que, si importante que soit l'hypothèse sur $[K,J]$ au niveau du théorème 4, les hypothèses correspondantes des théorèmes 1 et 2 n'ont pas de sens géométrique, et sont liées à la méthode employée (passage en coordonnées polaires et factorisation).

En fait, un récent travail [1] montre qu'il n'en est rien : Dans la situation du théorème 1, par exemple, si les $a_\alpha(0)$ ($|\alpha| = 2$) ne sont pas réels, il existe une fonction $a \in C^\infty$, plate en 0, telle que P+a n'a pas la forte unicité en 0. La situation dans le théorème 2 est plus complexe, et limitons nous à l'exemple

$$P = (\partial_x^2 + \partial_y^2)\ (\partial_x^2 + \alpha\partial_y^2), \qquad \alpha \neq 0$$

complexe non négatif. Si α est non réel, ou si α est réel différent de 1, il existe une fonction $a \in C^\infty$, plate en 0, telle que P+a n'a pas la forte unicité en 0.

Discutons maintenant β) : il est possible de construire (cf. [2]) une fonction bornée a, et une fonction C^∞ non triviale u, plate en t = 0, telles que $[(t\partial_t - |D_\theta|)^2+a]u = 0$. Cela montre qu'il est impossible de contrôler u par Lu "sans perte de poids" lorsque J est négatif (cas 2) du théorème 4). Cette impossibilité rend nécessaire l'hypothèse b) du théorème 3, dont le but est de permettre une factorisation de P modulo des restes nuls pour $t = 0$ (donc "absorbables" à l'aide de nos inégalités). A son tour, cette hypothèse se reflète au niveau des théorèmes 1 et 2 dans la condition "$\varepsilon > 0$". Comme précédemment, cette hypothèse a un sens géométrique indépendant de la méthode choisie ; on peut en effet construire (cf. [2]) des fonctions bornées a,b,c et des fonctions C^∞ plates u telles que

$$[\Delta + \frac{1}{r}(a\partial_x + b\partial_y)]u = 0, \text{ ou}$$

$$[\Delta^2 + \frac{1}{r^2}(a\partial_x^2 + 2b\partial_x\partial_y + c\partial_y^2)]u = 0,$$ ce qui montre qu'on ne peut pas prendre $\varepsilon = 0$ dans les hypothèses des théorèmes 1 et 2.

REFERENCES

1. S. Alinhac, Non-unicité pour des opérateurs à caractéristiques simples. Séminaires Goulaouic-Schwartz 1979-80, exposé n°4, Ecole Polytechnique, Paris. Article à paraître.

2. S. Alinhac et M.S. Baouendi, Counter-examples to strong uniqueness for elliptic operators. A paraître.

3. S. Alinhac et M.S. Baouendi, Uniqueness for the characteristic Cauchy problem and strong unique continuation for higher order partial differential inequalities. A paraître dans Amer. J. of Maths. 1980.

4. N. Aronszajn, A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or