

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

Subseries: Forschungsinstitut für Mathematik, ETH Zürich

1053

Peter J. Hilton

(Aufzeichnungen von Markus Pfenniger)

Nilpotente Gruppen
und nilpotente Räume



Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York Tokyo

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

Subseries: Forschungsinstitut für Mathematik, ETH Zürich

1053

Peter J. Hilton

(Aufzeichnungen von Markus Pfenniger)

Nilpotente Gruppen und nilpotente Räume

Nachdiplomvorlesung gehalten am
Mathematik-Departement ETH Zürich 1981/82



Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York Tokyo 1984

Autor

Peter J. Hilton
State University of New York
Division of Science and Mathematics
Department of Mathematical Sciences
Binghamton, New York 13901, USA

Markus Pfenniger
Mathematik-Departement
Eidgenössische Technische Hochschule
CH-8092 Zürich, Switzerland

AMS Subject Classifications (1980): 20D15, 55D10, 55D15

ISBN 3-540-12910-3 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo
ISBN 0-387-12910-3 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin Tokyo

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks. Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to "Verwertungsgesellschaft Wort", Munich.

© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1984
Printed in Germany

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2146/3140-543210

Lecture Notes in Mathematics

For information about Vols. 1–844, please contact your book-seller or Springer Verlag.

Vol. 845: A. Tannenbaum, Invariance and System Theory: Algebraic and Geometric Aspects. X, 161 pages. 1981.

Vol. 846: Ordinary and Partial Differential Equations, Proceedings. Edited by W. N. Everitt and B. D. Sleeman. XIV, 384 pages. 1981.

Vol. 847: U. Koschorke, Vector Fields and Other Vector Bundle Morphisms – A Singularity Approach. IV, 304 pages. 1981.

Vol. 848: Algebra, Carbondale 1980. Proceedings. Ed. by R. K. Amayo. VI, 298 pages. 1981.

Vol. 849: P. Major, Multiple Wiener-Itô Integrals. VII, 127 pages. 1981.

Vol. 850: Séminaire de Probabilités XV, 1979/80. Avec table générale des exposés de 1966/67 à 1978/79. Edited by J. Azéma and M. Yor. IV, 704 pages. 1981.

Vol. 851: Stochastic Integrals. Proceedings, 1980. Edited by D. Williams. IX, 540 pages. 1981.

Vol. 852: L. Schwartz, Geometry and Probability in Banach Spaces. X, 101 pages. 1981.

Vol. 853: N. Boboc, G. Bucur, A. Cornea, Order and Convexity in Potential Theory: H-Cones. IV, 286 pages. 1981.

Vol. 854: Algebraic K-Theory. Evanston 1980. Proceedings. Edited by E. M. Friedlander and M. R. Stein. V, 517 pages. 1981.

Vol. 855: Semigroups. Proceedings 1978. Edited by H. Jürgensen, M. Petrich and H. J. Weinert. V, 221 pages. 1981.

Vol. 856: R. Lascar, Propagation des Singularités des Solutions d'Equations Pseudo-Différentielles à Caractéristiques de Multiplicités Variables. VIII, 237 pages. 1981.

Vol. 857: M. Miyanishi, Non-complete Algebraic Surfaces. XVIII, 244 pages. 1981.

Vol. 858: E. A. Coddington, H. S. V. de Snoo: Regular Boundary Value Problems Associated with Pairs of Ordinary Differential Expressions. V, 225 pages. 1981.

Vol. 859: Logic Year 1979–80. Proceedings. Edited by M. Lerman, J. Schmerl and R. Soare. VIII, 326 pages. 1981.

Vol. 860: Probability in Banach Spaces III. Proceedings, 1980. Edited by A. Beck. VI, 329 pages. 1981.

Vol. 861: Analytical Methods in Probability Theory. Proceedings 1980. Edited by D. Dugué, E. Lukacs, V. K. Rohatgi. X, 183 pages. 1981.

Vol. 862: Algebraic Geometry. Proceedings 1980. Edited by A. Libgober and P. Wagreich. V, 281 pages. 1981.

Vol. 863: Processus Aléatoires à Deux Indices. Proceedings, 1980. Edited by H. Kozzioglu, G. Mazziotto and J. Szpirglas. V, 274 pages. 1981.

Vol. 864: Complex Analysis and Spectral Theory. Proceedings, 1979/80. Edited by V. P. Havin and N. K. Nikol'skii. VI, 480 pages. 1981.

Vol. 865: R. W. Bruggeman, Fourier Coefficients of Automorphic Forms. III, 201 pages. 1981.

Vol. 866: J.-M. Bismut, Mécanique Aléatoire. XVI, 563 pages. 1981.

Vol. 867: Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin. Proceedings, 1980. Edited by M.-P. Malliavin. V, 476 pages. 1981.

Vol. 868: Surfaces Algébriques. Proceedings 1976–78. Edited by J. Giraud, L. Illusie et M. Raynaud. V, 314 pages. 1981.

Vol. 869: A. V. Zelevinsky, Representations of Finite Classical Groups. IV, 184 pages. 1981.

Vol. 870: Shape Theory and Geometric Topology. Proceedings, 1981. Edited by S. Mardešić and J. Segal. V, 265 pages. 1981.

Vol. 871: Continuous Lattices. Proceedings 1979. Edited by B. Banaschewski and R.-E. Hoffmann. X, 413 pages. 1981.

Vol. 872: Set Theory and Model Theory. Proceedings, 1979. Edited by R. B. Jensen and A. Prestel. V, 174 pages. 1981.

Vol. 873: Constructive Mathematics, Proceedings, 1980. Edited by F. Richman. VII, 347 pages. 1981.

Vol. 874: Abelian Group Theory. Proceedings, 1981. Edited by R. Göbel and E. Walker. XXI, 447 pages. 1981.

Vol. 875: H. Zieschang, Finite Groups of Mapping Classes of Surfaces. VIII, 340 pages. 1981.

Vol. 876: J. P. Bickel, N. El Karoui and M. Yor. Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour IX – 1979. Edited by P. L. Hennequin. XI, 280 pages. 1981.

Vol. 877: J. Erven, B.-J. Falkowski, Low Order Cohomology and Applications. VI, 126 pages. 1981.

Vol. 878: Numerical Solution of Nonlinear Equations. Proceedings, 1980. Edited by E. L. Allgower, K. Glashoff, and H.-O. Peitgen. XIV, 440 pages. 1981.

Vol. 879: V. V. Sazonov, Normal Approximation – Some Recent Advances. VII, 105 pages. 1981.

Vol. 880: Non Commutative Harmonic Analysis and Lie Groups. Proceedings, 1980. Edited by J. Carmona and M. Vergne. IV, 553 pages. 1981.

Vol. 881: R. Lutz, M. Goze, Nonstandard Analysis. XIV, 261 pages. 1981.

Vol. 882: Integral Representations and Applications. Proceedings, 1980. Edited by K. Roggenkamp. XII, 479 pages. 1981.

Vol. 883: Cylindric Set Algebras. By L. Henkin, J. D. Monk, A. Tarski, H. Andreka, and I. Nemeti. VII, 323 pages. 1981.

Vol. 884: Combinatorial Mathematics VIII. Proceedings, 1980. Edited by K. L. McAvaney. XIII, 359 pages. 1981.

Vol. 885: Combinatorics and Graph Theory. Edited by S. B. Rao. Proceedings, 1980. VII, 500 pages. 1981.

Vol. 886: Fixed Point Theory. Proceedings, 1980. Edited by E. Fadell and G. Fournier. XII, 511 pages. 1981.

Vol. 887: F. van Oystaeyen, A. Verschoren, Non-commutative Algebraic Geometry, VI, 404 pages. 1981.

Vol. 888: Padé Approximation and its Applications. Proceedings, 1980. Edited by M. G. de Bruin and H. van Rossum. VI, 383 pages. 1981.

Vol. 889: J. Bourgain, New Classes of L^p -Spaces. V, 143 pages. 1981.

Vol. 890: Model Theory and Arithmetic. Proceedings, 1979/80. Edited by C. Berline, K. McAloon, and J.-P. Ressayre. VI, 306 pages. 1981.

Vol. 891: Logic Symposia, Hakone, 1979, 1980. Proceedings, 1979, 1980. Edited by G. H. Müller, G. Takeuti, and T. Tugué. XI, 394 pages. 1981.

Vol. 892: H. Cajar, Billingsley Dimension in Probability Spaces. III, 106 pages. 1981.

Vol. 893: Geometries and Groups. Proceedings. Edited by M. Aigner and D. Jungnickel. X, 250 pages. 1981.

Vol. 894: Geometry Symposium. Utrecht 1980, Proceedings. Edited by E. Looijenga, D. Siersma, and F. Takens. V, 153 pages. 1981.

Vol. 895: J.A. Hillman, Alexander Ideals of Links. V, 178 pages. 1981.

Vol. 896: B. Angéniol, Familles de Cycles Algébriques – Schéma de Chow. VI, 140 pages. 1981.

Vol. 897: W. Buchholz, S. Feferman, W. Pohlers, W. Sieg, Iterated Inductive Definitions and Subsystems of Analysis: Recent Proof-Theoretical Studies. V, 383 pages. 1981.

Vol. 898: Dynamical Systems and Turbulence, Warwick, 1980. Proceedings. Edited by D. Rand and L.-S. Young. VI, 390 pages. 1981.

Vol. 899: Analytic Number Theory. Proceedings, 1980. Edited by M.J. Knopp. X, 478 pages. 1981.

0. Einleitung.

This is a faithful record of a year-long course given as a Nachdiplom-Vorlesung at the ETH, Zürich, during the academic year 1981/82. The course was specifically aimed at students who might be contemplating research directly related to the ideas presented in the course or utilizing these ideas in an essential way. At the same time, these students could not be assumed to have a strong background in group theory, module theory or homotopy theory; indeed it was only reasonable to presuppose an acquaintance with the most basic ideas of group theory, abelian group theory, and the homology theory of cell-complexes. Thus while the talent and purpose of the students justified a fairly strenuous pace for the course, it was necessary to start at an elementary level and to be very detailed in the treatment.

It follows that, although the content of these notes overlaps very considerably with that of the monograph, Localization of Nilpotent Groups and Spaces, by P. Hilton, G. Mislin, and J. Roitberg [HMR], the style and manner of treatment are very different. For the monograph was addressed to the professional algebraic topologist, so that extremely substantial background was taken for granted in the reader. Moreover, the content of the notes also reflects certain changes of emphasis which have arisen since the publication of the monograph in 1975; in a few places, new results are included.

The course divided itself naturally into two semesters, the first of which was devoted to algebra and the second to homotopy theory. By deliberate intention the first part was more self-contained than the second. For the choice of material in the first part, being dictated by the subsequent topological applications, did not correspond to that of a standard treatment of group theory, module theory and homological algebra; whereas it was entirely appropriate to refer to standard texts for material on the homotopy theory of CW-complexes. Naturally, however, concepts and results specifically related to the homotopy theory of nilpotent spaces were discussed carefully with no assumption of any prior knowledge. As a purely practical matter, to treat the homotopy theory, in all its aspects, as systematically as the group theory would have required a course of double the length!

It is a pleasure to acknowledge my gratitude to my good friend Professor Beno Eckmann for inviting me to spend my sabbatical leave at the ETH and for arranging for me to give this course of lectures; I had long hoped for the opportunity to give such a course. It is also a pleasure to express my appreciation of the excellent work of Mr. Markus Pfenniger in preparing the notes with such care and attention to detail and such inexhaustible goodwill. Finally, I would like to thank the students whose enthusiastic response to the lectures afforded me so much encouragement.

Binghamton, May, 1983

Peter Hilton

Inhaltsverzeichnis

0.	Einleitung	III
1.	Endliche und nilpotente Gruppen	1
2.	Allgemeine Eigenschaften nilpotenter Gruppen	21
3.	Endlich erzeugte nilpotente Gruppen	40
4.	Lokalisierung abelscher Gruppen	62
5.	Lokalisierung nilpotenter Gruppen	88
6.	Lokalisierung einfach zusammenhängender CW-Komplexe	148
7.	Lokalisierung nilpotenter CW-Komplexe	164
	Literaturverzeichnis	221

1. Endliche und nilpotente Gruppen

1.1 Die Sylow'schen Sätze

In diesem Abschnitt führen wir den zentralen Begriff des "Operierens einer Gruppe auf einer Menge" ein. Mit seiner Hilfe stellen wir die Klassengleichung auf, welche ein Abzählverfahren für eine endliche Menge liefert. Dieses Verfahren wenden wir an, um die Sylow'schen Sätze zu beweisen. Sie geben Aufschluss über die Struktur endlicher Gruppen.

Es sei G eine multiplikativ geschriebene Gruppe und X eine Menge.

Definition: Die Gruppe G operiert auf einer Menge X , falls eine Abbildung existiert

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

mit den folgenden beiden Eigenschaften:

- (1) $1 \cdot x = x$ für alle x aus X
- (2) $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$ für alle g_i aus G und x aus X .

Unter dem Stabilisator S_x eines Elementes x aus X verstehen wir die Menge der Elemente $g \in G$, für welche $g \cdot x = x$ gilt. Es ist klar, dass S_x eine Untergruppe von G ist.

Durch eine Gruppenoperation erhalten wir eine Zerlegung von X in

Bahnen, wobei wir unter der Bahn (Orbit) von $x \in X$ die Menge $Gx := \{g \cdot x \mid g \in G\}$ verstehen.

Die Kardinalität der Bahn Gx hängt wie folgt mit dem Index des Stabilisators S_x zusammen:

Lemma 1.1: $|Gx| = |G : S_x|$

Beweis: Die Zuordnung $g \cdot x \leftrightarrow gS_x$ vermittelt die behauptete Bijektion zwischen der Bahn Gx und der Restklassenmenge G/S_x . $\square$

Definition: Unter dem Zentrum Z von X bezüglich G verstehen wir jene Punkte x aus X , für die $g \cdot x = x$ für alle g aus G gilt. Es sind jene x aus X mit $|Gx| = 1$.

Operiert die endliche Gruppe G auf der endlichen Menge X , so erhalten wir eine Abzählung der Elemente von X : (Klassengleichung).

Satz 1.2: G operiere auf der Menge X . Dann gilt mit den obigen Bezeichnungen:

$$|X| = |Z| + \sum_{\substack{\text{nicht triviale} \\ \text{Bahnen}}} |G : S_x|$$

Für $h_x := |G : S_x|$ gilt ferner: $h_x > 1$ und h_x teilt die Gruppenordnung $|G|$. $\square$

Folgender Spezialfall ist für das Weitere wichtig:

Die endliche Gruppe G operiere auf sich selbst durch Konjugation, d.h. $g \cdot x := gxg^{-1}$ für alle g und x aus G . Das Zentrum von G bezüglich G ist genau das Zentrum $Z(G)$ der Gruppe G im Sinne der Gruppentheorie.

Der Stabilisator heisst in diesem Fall Normalisator von x ; die Bahnen heissen Konjugationsklassen. Die Klassengleichung nimmt die folgende Form an:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{\substack{\text{nicht triviale} \\ \text{Klassen}}} h_x, \text{ wobei } h_x > 1 \text{ und } h_x \text{ die Gruppenordnung teilt.}$$

Folgerung: Jede endliche Gruppe G , deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist, (p-Gruppe) hat nicht triviales Zentrum. Ist nämlich $|G| = p^n$ für $n \geq 1$, so teilt p die Gruppenordnung und ferner jedes h_x . Aus der Klassengleichung entnehmen wir, dass p die Ordnung des Zentrums teilt.

Wir beweisen nun folgenden Spezialfall des Sylow'schen Satzes:

Satz 1.3: (Cauchy) Es sei G eine endliche Gruppe der Ordnung pq , wobei p eine Primzahl bezeichne. Dann besitzt G ein Element der Ordnung p .

Beweis: Wir beweisen den Satz zuerst für abelsche Gruppen und spielen den allgemeinen Fall auf die kommutativen Gruppen zurück.

(i) Sei G abelsch: Der Satz ergibt sich aus dem Struktursatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen. Wir geben einen zusätzlichen Beweis mit vollständiger Induktion nach q . Die Verankerung ergibt

sich aus dem Umstand, dass für $q = 1$ die Gruppe G zyklisch ist. Für den Induktionsschritt wähle ein Element $x \neq 1$ aus G .

Teilt p die Ordnung von x , etwa $|x| = pr$, so ist x^r ein Element der Ordnung p .

Falls p die Ordnung von x nicht teilt, so betrachte die von x erzeugte Untergruppe $\langle x \rangle$ in G . Die Gruppe $H := G/\langle x \rangle$ mit Ordnung ps für $s < q$ besitzt nach Induktionsvoraussetzung ein Element y der Ordnung p . Es sei $z \in G$ ein Repräsentant der Klasse $y \in H$. Betrachte die kurze exakte Folge: $\langle x \rangle \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} H$, wobei $\pi(z) = y$. Die Ordnung von z ist teilbar durch p , da y Ordnung p hat. Es sei etwa $|z| = pt$. Somit ist z^t ein Element der Ordnung p .

(ii) Allgemeiner Fall: Wiederum führen wir den Beweis mit Induktion nach q .

Teilt p die Ordnung des Zentrums, so wenden wir (i) auf die abelsche Gruppe $Z(G)$ an.

Ist die Ordnung des Zentrums nicht durch p teilbar, so garantiert die Klassengleichung ein $x \in G$ mit $x \notin Z(G)$ und $p \nmid h_x$. Weil $|G| = h_x \cdot |S_x|$ und p die Ordnung von G teilt, ist p ein Teiler von $|S_x|$. Die Ordnung von S_x ist kleiner als jene von G , da x nicht im Zentrum liegt. Mit der Induktionsvoraussetzung besitzt S_x ein Element der Ordnung p . $\square$

Satz 1.4: (Sylow) Es sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $p^n q$, wobei $p \nmid q$ und p prim ist.

- (i) Es gibt eine Untergruppe P von G der Ordnung p^n .
- (ii) Jede p -Untergruppe von G ist in einem solchen P enthalten.
- (iii) Alle solchen Untergruppen P sind zueinander konjugiert.
- (iv) Es gibt k solche Untergruppen P , wobei $k \equiv 1 \pmod{p}$ und $k|q$.

Zusatz:

- (v) Ist H eine Untergruppe von G der Ordnung p^m mit $m < n$, so gibt es eine Untergruppe K von G der Ordnung p^{m+1} , und H ist Normalteiler in K .

Diesen Zusatz werden wir erst später beweisen.

Definition: Gruppen, deren Existenz in (i) behauptet wird, heißen maximale p -Untergruppen oder p -Sylow-Untergruppen. Sie werden mit $P(p)$ bezeichnet.

Beweis: Für $n \geq 1$ garantiert der Satz 1.3 ein Element der Ordnung p . Folglich existiert in G eine nichttriviale p -Untergruppe. Da die Gruppe G endlich ist, lässt sich eine maximale p -Untergruppe P finden. Sei $P =: P_1, P_2, \dots, P_k$ die Liste aller verschiedenen konjugierten Untergruppen von p . Da P maximal ist, sind auch die P_i mit $i \in \{1, \dots, k\}$ maximal. Die Gruppe P ope-

riert auf der Menge $X := \{P_1, \dots, P_k\}$ vermittelt

$g \cdot P_i := gP_i g^{-1}$ für $g \in P$. Für den Beweis des Sylow-Satzes benötigen wir folgendes Lemma:

Definition: Es sei H eine Untergruppe der Gruppe G . Unter dem Normalisator von H verstehen wir $N(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$. Es ist die grösste Untergruppe von G , welche H als Normalteiler besitzt.

Lemma 1.5: Es sei P eine maximale p -Untergruppe von G und $g \in G$ ein Element der Ordnung p^m , p prim. Falls g in $N(P)$ liegt, so ist $g \in P$.

Beweis: Es sei $g \notin P$. Die Gruppe P ist Normalteiler in der von P und g erzeugten Untergruppe $\langle P, g \rangle$, weil $g \in N(P)$. Betrachte die kurze exakte Folge $P \longrightarrow \langle P, g \rangle \xrightarrow{\pi} \langle P, g \rangle / P$. Die Faktorgruppe ist eine nichttriviale p -Gruppe, da $|g| = p^m$ ist und die Quotientengruppe von $\pi(g)$ erzeugt wird. Weil in obiger Folge die beiden äusseren Gruppen p -Gruppen sind, ist auch $\langle P, g \rangle$ eine p -Gruppe mit echt grösserer Ordnung als P . Dies widerspricht jedoch der Maximalität von P und zeigt, dass $g \in P$ ist. $\square$

Zum Beweis von Satz 1.4 zurückkehrend, betrachte den Fall, wo P_i unter der P -Operation fest bleibt. Nach Lemma 1.5 ist $g \in P_i$ für alle g in P . Es ist also $P \subset P_i$ und damit $P_i = P$. Nach der Wahl unserer Liste muss also $i = 1$ sein. Da P_1 im Zentrum von X unter P liegt, besteht dieses Zentrum aus $\{P_1\}$. Nach Satz

1.2 gilt: $k = 1 + \sum h_x$, wobei h_x die Ordnung von P teilt und $h_x > 1$. Also ist h_x eine positive p -Potenz und $k \equiv 1 \pmod p$, wie behauptet.

Es sei Q eine maximale p -Untergruppe von G , die mit keinem der P_i übereinstimmt. Dann operiert Q auf der Menge X via inneren Automorphismus. Falls P_i unter dieser Operation fest bleibt, so folgt mit Lemma 1.5, dass $Q \subset P_i$. Ist diese Inklusion echt, so widerspricht dies der Maximalität von Q . Gilt $Q = P_i$, so widerspricht dies der Annahme, dass Q mit keinem der P_i übereinstimmt. Das Zentrum von X unter Q ist leer und die Klassengleichung liefert: $k = 0 + \sum h'_x$ mit $h'_x > 1$ und $h'_x \mid |Q|$. Jedes h'_x ist eine positive Potenz von p und somit $k \equiv 0 \pmod p$ - im Widerspruch zu (iv). Es kann also kein solches Q geben und somit ist (iii) bewiesen.

Für den Rest des Beweises benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 1.6: Es sei H ein Normalteiler der endlichen Gruppe G und p eine Primzahl, die $|G : H|$ teilt. Dann existiert in $G - H$ ein Element z , dessen Ordnung eine Potenz von p ist.

Bemerkung: Es ist nicht notwendig, H als normale Untergruppe vor auszusetzen. Um aber diese Verschärfung zu erhalten, müssen wir zuerst die Sylow-Sätze beweisen.

Beweis: Nach Voraussetzung teilt p die Ordnung von G/H . Gemäss 1.3 gibt es ein Element y in G/H der Ordnung p , welches durch $x \in G$ repräsentiert werde. Die Ordnung von x ist $p^r t$ mit $p \nmid t$. Das Element $z := x^t$ hat Ordnung p^r . Ferner liegt x^t nicht in H , da sonst $y^t = 1$ in G/H gelten würde, was aber der Wahl von t widerspricht. $\square$

Zum Beweis von 1.4 zurückkehrend bemerken wir, dass $|N(P) : P|$ zu p teilerfremd ist. Würde p den Index $|N(P) : P|$ teilen, so gäbe es mit Lemma 1.6 ein Element $g \in N(P) - P$, dessen Ordnung eine Potenz von p ist, was dem Lemma 1.5 widerspräche.

Betrachte nun die Gleichung $|G| = |G : N(P)| \cdot |N(P) : P| \cdot |P|$. Aus ihr ergibt sich mit der Voraussetzung $|G| = p^n q$ und obiger Bemerkung sowie aus $|G : N(P)| = k \equiv 1 \pmod{p}$, dass $|P| = p^n$ und ferner, dass $k|q$. Damit ist der Sylow-Satz bewiesen. $\square$

Anwendung: Bestimme alle Isomorphieklassen von Gruppen der Ordnung 15. Es ist $|G| = 3 \cdot 5$. Es bezeichne k_p die Anzahl der p -Sylow-Untergruppen von G . Nach 1.4 gilt: $k_3 \equiv 1 \pmod{3}$ und $k_3|5$. Also ist $k_3 = 1$, d.h. G besitzt eine einzige Untergruppe $P(3)$ der Ordnung 3. Analog ist $k_5 = 1$, und G hat eine einzige Untergruppe $P(5)$. Da $k_3 = k_5 = 1$ gilt, sind $P(3)$ und $P(5)$ sogar Normalteiler in G mit $P(3) \cap P(5) = \{1\}$. Es sei a ein Erzeugendes von $P(3) \cong \mathbb{Z}|3\mathbb{Z}$ und b ein Erzeugendes von $P(5) \cong \mathbb{Z}|5\mathbb{Z}$. Dann ist $aba^{-1}b^{-1} \in P(3)$, da $P(3)$ Normalteiler ist, und analog für $P(5)$. Folglich ist $aba^{-1}b^{-1} = 1$. Das heisst, dass $P(3) \times P(5)$ eine Untergruppe in G der Ordnung 15, und damit $G \cong P(3) \times P(5) \cong \mathbb{Z}|3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}|5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}|15\mathbb{Z}$. Alle Gruppen der Ordnung 15 sind isomorph zur zyklischen.

Satz 1.7: Es sei G eine endliche Gruppe und P eine p -Sylow-Untergruppe. Dann ist $N(N(P)) = N(P)$.

Beweis: Sicher ist $N(P)$ Untergruppe von $N(N(P))$. Es sei $x \in N(N(P))$, d.h. $xN(P)x^{-1} = N(P)$. Es ist $xPx^{-1} \subset N(P)$, weil $P \subset N(P)$. Die beiden p -Sylow-Untergruppen P und xPx^{-1} von $N(P)$ sind konjugiert in $N(P)$, d.h. es gibt ein $y \in N(P)$ mit $xPx^{-1} = yPy^{-1}$, also $(y^{-1}x)P(x^{-1}y) = P$. Damit ist $y^{-1}x$ in $N(P)$, und weil y aus $N(P)$ stammt, liegt auch x in $N(P)$. $\square$

Als weitere Anwendung des Sylow-Satzes beweisen wir den versprochenen Zusatz zu Lemma 1.6.

Zusatz: Es sei H eine Untergruppe der endlichen Gruppe G und p eine Primzahl, die $|G : H|$ teilt. Dann existiert in $G - H$ ein Element x , dessen Ordnung eine Potenz von p ist.

Beweis: Es sei $|G| = p^n q$, wobei $p \nmid q$ und $P(H)$ eine p -Sylow-Untergruppe von H . Sie lässt sich nach 1.4 in eine p -Sylow-Untergruppe $P(G)$ der Ordnung p^n von G einbetten. Die Ordnung von H ist $p^m s$ mit $m < n$, da p den Index teilt. Also hat $P(H)$ die Ordnung p^m , und damit ist $P(H)$ eine echte Untergruppe von $P(G)$. Es sei $x \in P(G) - P(H)$ ein Element, dessen Ordnung eine p -Potenz ist. Es ist $\langle P(H), x \rangle$ als Untergruppe der p -Gruppe $P(G)$ eine p -Gruppe. Läge x in H , so wäre $\langle P(H), x \rangle$ eine p -Untergruppe von H , welche $P(H)$ enthält. Wegen der Maximalität von $P(H)$ müsste also $\langle P(H), x \rangle = P(H)$ und somit $x \in P(H)$ gelten, was der Wahl von x widerspräche. $\square$

1.2 Nilpotente Gruppen

Als natürliche Verallgemeinerung der abelschen Gruppen definieren wir in diesem Abschnitt nilpotente Gruppen und beweisen einige ihrer grundlegenden Eigenschaften. Die neuen Konzepte werden an Hand von Beispielen erläutert.

Es sei G eine (nicht notwendigerweise endliche) Gruppe. Sind H und K zwei Untergruppen von G , verstehen wir unter $[H, K]$ jene Untergruppe von G , welche von den Kommutatoren $[h, k] := hkh^{-1}k^{-1}$ erzeugt wird. ($h \in H, k \in K$)

Definition: Die absteigende Zentralreihe von G definieren wir rekursiv wie folgt:

$$\Gamma^0(G) := G; \quad \Gamma^i(G) := [G, \Gamma^{i-1}(G)] \quad \text{für } i \geq 1.$$

Die $\Gamma^i(G)$ sind Normalteiler in G , und $\Gamma^1(G)$ ist die Kommutatorenuntergruppe. Mit Hilfe der absteigenden Zentralreihe formulieren wir die für uns wichtige Idee der nilpotenten Gruppe:

Definition: Eine Gruppe G heisst nilpotent der Klasse $\leq c$, falls $\Gamma^c(G) = \{1\}$. Wir schreiben: $\text{nil}(G) \leq c$.

Sie heisst nilpotent der Klasse c , falls G nilpotent der Klasse $\leq c$, nicht aber der Klasse $\leq c-1$ ist, d.h. $\Gamma^c(G) = \{1\}$, aber $\Gamma^{c-1}(G) \neq \{1\}$. Die Zahl c nennen wir auch Nilpotenzgrad von G .

Die einzige nilpotente Gruppe der Klasse 0 ist die triviale Gruppe. Die nilpotenten Gruppen der Klasse ≤ 1 sind genau die abelschen Gruppen.