Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

Subseries: Institut de Mathématiques, Université de Strasbourg

Adviser: P.A. Meyer

1247

Séminaire de Probabilités XXI

Edité par J. Azéma, P.A. Meyer et M. Yor

Springer-Verlag

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

Subseries: Institut de Mathématiques, Université de Strasbourg
Adviser: P. A. Meyer

1247

Séminaire de Probabilités XXI

Edité par J. Azéma, P. A. Meyer et M. Yor

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo

Editeurs

Jacques Azéma
Marc Yor
Laboratoire de Probabilités
4, Place Jussieu, Tour 56, 75230 Paris Cedex 05, France

Paul André Meyer
Département de Mathématique
7, rue René Des

Mathematics Subject Classification (1980): 60G, 60H, 60J

ISBN 3-540-17768-X Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-17768-X Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

Printed in Germany

Printing and binding: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstr.
2146/3140-543210

Lecture Notes in Mathematics

For information about Vols. 1–1034 please contact your bookseller or Springer-Verlag.

Vol. 1035: The Mathematics and Physics of Disordered Media. Proceedings, 1983. Edited by B.D. Hughes and B.W. Ninham. VII, 432 pages. 1983.

Vol. 1036: Combinatorial Mathematics X. Proceedings, 1982. Edited by L.R.A. Casse. XI, 419 pages. 1983.

Vol. 1037: Non-linear Partial Differential Operators and Quantization Procedures. Proceedings, 1981. Edited by S.I. Andersson and H.-D. Doebner. VII, 334 pages. 1983.

Vol. 1038: F. Borceux, G. Van den Bossche, Algebra in a Localic Topos with Applications to Ring Theory. IX, 240 pages. 1983.

Vol. 1039: Analytic Functions, Błażejewko 1982. Proceedings. Edited by J. Ławrynowicz. X, 494 pages. 1983

Vol. 1040: A. Good, Local Analysis of Selberg's Trace Formula. III, 128 pages. 1983.

Vol. 1041: Lie Group Representations II. Proceedings 1982–1983. Edited by R. Herb, S. Kudla, R. Lipsman and J. Rosenberg. IX, 340 pages. 1984.

Vol. 1042: A. Gut, K. D. Schmidt, Amarts and Set Function Processes. III, 258 pages. 1983.

Vol. 1043: Linear and Complex Analysis Problem Book. Edited by V.P. Havin, S.V. Hruščëv and N.K. Nikol'skii. XVIII, 721 pages. 1984.

Vol. 1044: E. Gekeler, Discretization Methods for Stable Initial Value Problems. VIII, 201 pages. 1984.

Vol. 1045: Differential Geometry. Proceedings, 1982. Edited by A.M. Naveira. VIII, 194 pages. 1984.

Vol. 1046: Algebraic K-Theory, Number Theory, Geometry and Analysis. Proceedings, 1982. Edited by A. Bak. IX, 464 pages. 1984.

Vol. 1047: Fluid Dynamics. Seminar, 1982. Edited by H. Beirão da Veiga. VII, 193 pages. 1984.

Vol. 1048: Kinetic Theories and the Boltzmann Equation. Seminar, 1981. Edited by C. Cercignani. VII, 248 pages. 1984.

Vol. 1049: B. Iochum, Cônes autopolaires et algèbres de Jordan. VI, 247 pages. 1984.

Vol. 1050: A. Prestel, P. Roquette, Formally p-adic Fields. V, 167 pages. 1984.

Vol. 1051: Algebraic Topology, Aarhus 1982. Proceedings. Edited by I. Madsen and B. Oliver. X, 665 pages. 1984.

Vol. 1052: Number Theory, New York 1982. Seminar. Edited by D.V. Chudnovsky, G.V. Chudnovsky, H. Cohn and M.B. Nathanson. V, 309 pages. 1984.

Vol. 1053: P. Hilton, Nilpotente Gruppen und nilpotente Räume. V, 221 pages. 1984.

Vol. 1054: V. Thomée, Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems. VII, 237 pages. 1984.

Vol. 1055: Quantum Probability and Applications to the Quantum Theory of Irreversible Processes. Proceedings, 1982. Edited by L. Accardi, A. Frigerio and V. Gorini. VI, 411 pages. 1984.

Vol. 1056: Algebraic Geometry. Bucharest 1982. Proceedings, 1982. Edited by L. Bădescu and D. Popescu. VII, 380 pages. 1984.

Vol. 1057: Bifurcation Theory and Applications. Seminar, 1983. Edited by L. Salvadori. VII, 233 pages. 1984.

Vol. 1058: B. Aulbach, Continuous and Discrete Dynamics near Manifolds of Equilibria. IX, 142 pages. 1984.

Vol. 1059: Séminaire de Probabilités XVIII, 1982/83. Proceedings. Edité par J. Azéma et M. Yor. IV, 518 pages. 1984.

Vol. 1060: Topology. Proceedings, 1982. Edited by L. D. Faddeev and A.A. Mal'cev. VI, 389 pages. 1984.

Vol. 1061: Séminaire de Théorie du Potentiel. Paris, No. 7. Proceedings. Directeurs: M. Brelot, G. Choquet et J. Deny. Rédacteurs: F. Hirsch et G. Mokobodzki. IV, 281 pages. 1984.

Vol. 1062: J. Jost, Harmonic Maps Between Surfaces. X, 133 pages. 1984.

Vol. 1063: Orienting Polymers. Proceedings, 1983. Edited by J.L. Ericksen. VII, 166 pages. 1984.

Vol. 1064: Probability Measures on Groups VII. Proceedings, 1983. Edited by H. Heyer. X, 588 pages. 1984.

Vol. 1065: A. Cuyt, Padé Approximants for Operators: Theory and Applications. IX, 138 pages. 1984.

Vol. 1066: Numerical Analysis. Proceedings, 1983. Edited by D.F. Griffiths. XI, 275 pages. 1984.

Vol. 1067: Yasuo Okuyama, Absolute Summability of Fourier Series and Orthogonal Series. VI, 118 pages. 1984.

Vol. 1068: Number Theory, Noordwijkerhout 1983. Proceedings. Edited by H. Jager. V, 296 pages. 1984.

Vol. 1069: M. Kreck, Bordism of Diffeomorphisms and Related Topics. III, 144 pages. 1984.

Vol. 1070: Interpolation Spaces and Allied Topics in Analysis. Proceedings, 1983. Edited by M. Cwikel and J. Peetre. III, 239 pages. 1984.

Vol. 1071: Padé Approximation and its Applications, Bad Honnef 1983. Prodeedings. Edited by H. Werner and H.J. Bünger. VI, 264 pages. 1984.

Vol. 1072: F. Rothe, Global Solutions of Reaction-Diffusion Systems. V, 216 pages. 1984.

Vol. 1073: Graph Theory, Singapore 1983. Proceedings. Edited by K.M. Koh and H.P. Yap. XIII, 335 pages. 1984.

Vol. 1074: E.W. Stredulinsky, Weighted Inequalities and Degenerate Elliptic Partial Differential Equations. III, 143 pages. 1984.

Vol. 1075: H. Majima, Asymptotic Analysis for Integrable Connections with Irregular Singular Points. IX, 159 pages. 1984.

Vol. 1076: Infinite-Dimensional Systems. Proceedings, 1983. Edited by F. Kappel and W. Schappacher. VII, 278 pages. 1984.

Vol. 1077: Lie Group Representations III. Proceedings, 1982–1983. Edited by R. Herb, R. Johnson, R. Lipsman, J. Rosenberg. XI, 454 pages. 1984.

Vol. 1078: A.J.E.M. Janssen, P. van der Steen, Integration Theory. V, 224 pages. 1984.

Vol. 1079: W. Ruppert. Compact Semitopological Semigroups: An Intrinsic Theory. V, 260 pages. 1984

Vol. 1080: Probability Theory on Vector Spaces III. Proceedings, 1983. Edited by D. Szynal and A. Weron. V, 373 pages. 1984.

Vol. 1081: D. Benson, Modular Representation Theory: New Trends and Methods. XI, 231 pages. 1984.

Vol. 1082: C.-G. Schmidt, Arithmetik Abelscher Varietäten mit komplexer Multiplikation. X, 96 Seiten. 1984.

Vol. 1083: D. Bump, Automorphic Forms on GL (3,IR). XI, 184 pages. 1984.

Vol. 1084: D. Kletzing, Structure and Representations of Q-Groups. VI, 290 pages. 1984.

Vol. 1085: G.K. Immink, Asymptotics of Analytic Difference Equations. V, 134 pages. 1984.

Vol. 1086: Sensitivity of Functionals with Applications to Engineering Sciences. Proceedings, 1983. Edited by V. Komkov. V, 130 pages. 1984

Vol. 1087: W. Narkiewicz, Uniform Distribution of Sequences of Integers in Residue Classes. VIII, 125 pages. 1984.

Vol. 1088: A.V. Kakosyan, L.B. Klebanov, J.A. Melamed, Characterization of Distributions by the Method of Intensively Monotone Operators. X, 175 pages. 1984.

Vol. 1089: Measure Theory, Oberwolfach 1983. Proceedings. Edited by D. Kölzow and D. Maharam-Stone. XIII, 327 pages. 1984.

continued on page 587

SEMINAIRE DE PROBABILITES XXI

TABLE DES MATIÈRES

HOMOGENEOUS CHAOS REVISITED

Daniel W. Stroock*

Let $(\Theta, H, \mathcal{W})$ be an abstract Wiener space. That is: Θ is a separable real Banach space with norm $\|\cdot\|_\Theta$; H is a separable real Hilbert space with norm $\|\cdot\|_H$; $H \subseteq \Theta$, $\|h\|_\Theta \leq C\|h\|_H$ for some $C < \infty$ and all $h \in H$, and H is $\|\cdot\|_\Theta$ - dense in Θ; and $\mathcal{W}$ is the probability measure on $(\Theta, \mathcal{B}_\Theta)$ with the property that, for each $\ell \in \Theta^*$, $\theta \in \Theta \to \langle \ell, \theta\rangle$ under $\mathcal{W}$ is a Gaussian random variable with mean zero and variance $\|\ell\|_H^2 \equiv \sup\{\langle \ell, h\rangle^2 : h \in H \text{ with } \|h\|_H = 1\}$.
Let $\{\ell^k : k \in Z^+\} \subseteq \Theta^*$ be an orthonormal basis in H; set $\mathcal{A} = \{\alpha \in \mathcal{N}^{Z^+} : |\alpha| = \sum_{k\in Z^+} \alpha_K < \infty\}$; and for $\alpha \in \mathcal{A}$, define

$$\mathcal{H}_\alpha(\theta) = \prod_{k\in Z^+} H_{\alpha_k}(\langle \ell^k, \theta\rangle),\ \theta \in \Theta\ ,$$

where

$$H_m(\xi) = (-1)^m e^{\xi^2/2} \frac{d^m}{d\xi^m} (e^{-\xi^2/2}), \quad m \in \mathcal{N} \text{ and } \xi \in R^1\ .$$

Then, $\{(\alpha!)^{-1/2} \mathcal{H}_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ is an orthonormal basis in $L^2(\mathcal{W})$.
Moreover, if, for $m \in \mathcal{N}$,

$$Z^{(m)} \equiv \overline{\text{span}\{\mathcal{H}_\alpha : |\alpha| = m\}}^{L^2(\mathcal{W})}\ ,$$

then: $Z^{(m)}$ is independent of the particular choice of the orthonormal basis $\{\ell^k : k \in Z^+\}$; $Z^{(m)} \perp Z^{(n)}$ for $m \neq n$; and $L^2(\mathcal{W}) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} Z^{(m)}$. These facts were first proved by N. Wiener [6] and constitute the foundations on which his theory of homogeneous chaos is based.

The purpose of the present article is to explain how, for given $\Phi \in L^2(\mathcal{W})$, one can compute the orthogonal projection $\Pi_{Z^{(m)}}\Phi$ of Φ onto $Z^{(m)}$. In order to describe the procedure, it will be necessary to describe the elementary Sobolev theory associated with $(\Theta, H, \mathcal{W})$.

---

*During the period of this research, the author was partially supported by NSF DMS-8415211 and ARO DAAG29-84-K-0005.

To this end, let Y be a separable real Hilbert space and set $\mathcal{P}(Y) = \operatorname{span}\{\mathcal{H}_\alpha y : \alpha \in \mathcal{A} \text{ and } y \in Y\}$. Then $\mathcal{P}(Y)$ is dense in $L^2(\mathcal{W}; Y)$. Next, for $m \in \mathcal{N}$ and $\Phi \in \mathcal{P}(Y)$, define $\theta \to D^m\Phi(\theta) \in H^{\otimes^m} \otimes Y$ by

$$(D^m\Phi(\theta), h^1 \otimes \ldots \otimes h^m \otimes y)_{H^{\otimes^m} \otimes Y} = \frac{\partial^m}{\partial t_1 \ldots \partial t_m} (\Phi(\theta + \sum_{j=1}^m t_j h^j), y)_Y \Big|_{t_1=\ldots=t_m=0}$$

for $h^1, \ldots, h^m \in H$ and $y \in Y$. Then D^m maps $\mathcal{P}(Y)$ into $\mathcal{P}(H^{\otimes^m} \otimes Y)$ and $D^n = D^m \circ D^{n-m}$ for $0 \le m \le n$. Associated with the operator $D^m : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(H^{\otimes^m} \otimes Y)$ is its adjoint operator ∂^m. Using the Cameron-Martin formula [1], one can easily prove the following lemma.

(1) <u>Lemma</u>: The operator ∂^m does not depend on the choice of orthonormal basis $\{\ell^k : k \in Z^+\}$, $\mathcal{P}(H^{\otimes^m} \otimes Y) \subseteq \operatorname{Dom}(\partial^m)$, and $\partial^m : \mathcal{P}(H^{\otimes^m} \otimes Y) \to \mathcal{P}(Y)$. Moreover, if $m \in Z^+$, $K = (k_1, \ldots, k_m)$ $(Z^+)^m$, and $\ell^K = \ell^{k_1} \otimes \ldots \otimes \ell^{k_m}$, then

(2) $$\partial^m \ell^K = \mathcal{H}_{\alpha(K)}$$

where $\alpha(K)$ is the element of $\mathcal{A}$ defined by

$$(\alpha(K))_k = \operatorname{card}\{1 \le j \le m : k_j = k\}, \; k \in Z^+.$$

In particular, $H^{\otimes^m} \subseteq \operatorname{Dom}(\partial^m)$.

Since ∂^m is densely defined, it has a well-defined adjoint $(\partial^m)^*$. Set $W^2_m(Y) = \operatorname{Dom}((\partial^M)^*)$ and use $\|\cdot\|_{W^2_m(Y)}$ to denote the associated graph norm on $W^2_m(Y)$. The following lemma is an easy application of inequalities proved by M and P. Kree [3].

(3) <u>Lemma</u>: $W^2_m(H^{\otimes^m} \otimes Y) \subseteq \operatorname{Dom}(\partial^m)$, $\|\partial^m\Psi\|_{L^2(\mathcal{W};Y)} \le C_m \|\Psi\|_{W^2_m(h^{\otimes^m} \otimes Y)}$, and $\partial^m = ((\partial^m)^*)^*$. Moreover, $\mathcal{P}(Y)$ is $\|\cdot\|_{W^2_m(Y)}$-dense in $W^2_m(Y)$.

Finally, $W^2_{m+1}(Y) \subseteq W^2_m(Y)$ and $\|\cdot\|_{W^2_m(Y)} \le C_m \|\cdot\|_{W_2^{m+1}(Y)}$ for all $m \ge 0$.

Warning: In view of the preceding, the use of D^m to denote its own closure $(\partial^m)^*$ is only a mild abuse of notation. Because it simplifies the notation, this abuse of notation will be used throughout what follows.

Now set $\mathcal{W}^2_{-m}(Y) = \mathcal{W}^2_m(Y)^*$, $m \ge 0$, and $\mathcal{W}^2_\infty(Y) = \bigcap_{m=0}^{\infty} \mathcal{W}^2_m(Y)$. Then, when $W^2_\infty(Y)$ is given the Fréchet topology determined by $\{\|\cdot\|_{W^2_m(Y)} : m \ge 0\}$, $(W^2_\infty(Y))^*$ is $W^2_{-\infty}(Y) \equiv \bigcup_{m=0}^{\infty} W^2_{-m}(Y)$. Moreover, $L^2(\mathcal{W};Y)$ becomes a subspace of $W^2_{-\infty}(Y)$ when $\Phi \in L^2(\mathcal{W};Y)$ is identified with the linear functional $\Psi \in W^2_\infty(Y) \to E^{\mathcal{W}}[(\Phi,\Psi)_Y]$; and in this way $W^2_\infty(Y)$ becomes a dense subspace of $W^2_{-\infty}(Y)$. Finally, D^m has a unique continuous extension as a map from $W^2_{-\infty}(Y)$ into $W^2_{-\infty}(H^{\otimes^m} \otimes Y)$. In particular, for $T \in W^2_{-\infty}(R^1)$, there is a unique $D^m T(1) \in H^{\otimes^m}$ defined by:

(4) $$(D^m T(1), h)_{H^{\otimes^m}} = T(\partial^m h),\ h \in H^{\otimes^m}.$$

Note that when $\Phi \in W^2_\infty(R^1)$,

(5) $$D^m\Phi(1) = E^{\mathcal{W}}[D^m\Phi].$$

(6) Theorem: Let $\Phi \in L^2(\mathcal{W})$ be given. Then, for each $m \ge 0$:

(7) $$\Pi_{Z(m)}\Phi = \frac{1}{m!}\,\partial^m(D^m\Phi(1)).$$

Hence,

(8) $$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\,\partial^m(D^m\Phi(1)) .$$

In particular, when $\Phi \in W^2_\infty(R^1)$:

(7') $$\Pi_{Z(m)}\Phi = \frac{1}{m!}\,\partial^m E^{\mathcal{W}}[D^m\Phi]$$

and

(8') $$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\,\partial^m\, E^{\mathcal{W}}[D^m\Phi] \,. \,.$$

Proof: Simply observe that, by Lemma (1):

$$\partial^m(D^m\Phi(1)) = \sum_{K\in(Z^+)^m} E^{\mathcal{W}}[\Phi\partial^m \ell^K]\partial^m \ell^K$$

$$= \sum_{|\alpha|=m} \binom{m}{\alpha} E^{\mathcal{W}}[\Phi\mathcal{H}_\alpha]\mathcal{H}_\alpha = m!\, \Pi_{Z^{(m)}}\Phi \quad .$$

The classic abstract Wiener space is the Wiener space associated with a Brownian motion on R^1. Namely, define $H_1(R^1)$ and $\Theta(R^1)$ to be, respectively, the completion of $C_o^\infty((0,\infty); R^1)$ with respect to

$$\|\psi\|_{H_1(R^1)} \equiv \left(\int_o^\infty |\psi'(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$$

and

$$\|\psi\|_{\Theta(R^1)} \equiv \sup_{t\geq 0} \frac{1}{1+t} |\theta(t)| \; .$$

Then Wiener's famous existence theorem shows that there is a probability measure on $\Theta(R^1)$ such that $(\Theta(R^1), H_1(R^1), \mathcal{W})$ is an abstract Wiener space. For $(\Theta(R^1), H_1(R^1), \mathcal{W})$, K. Itô [2] showed how to cast Wiener's theory of homogeneous chaos in a particularly appealing form. To be precise, set $\square_m = [0,\infty)^m$; and, for $f \in L^2(\square_m)$, define

$$\int_{\square_m} f\, d^m\theta = \sum_{\sigma\in\Pi_m} \int_o^\infty d\theta(t_m) \int_o^{t_{m-1}} d\theta(t_{m-2}) \cdots$$

$$\int_o^{t_2} f(t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(m)})d\theta(t_1)$$

where Π_m denotes the permutation group on $\{1,\ldots,m\}$ and the $d\theta(t)$-integrals are taken in the sense of Itô. What Itô discovered is that, for given $\Phi \in L^2(\mathcal{W})$, there exists a unique symmetric $f_\Phi^{(m)} \in L^2(\square_m)$ such that

$$\Pi_{Z^{(m)}}\Phi = \frac{1}{m!} \int_{\square_m} f_\Phi^{(m)}\, d^m\theta \tag{9}$$

In order to interpret Itô's result in terms of Theorem (5), let $\{\psi^k : k \in Z^+\} \subseteq C_o^\infty((0,\infty); R^1)$ be an orthonormal basis in $L^2(\square_1)$ and define $\ell^k \in \square\,(R^1)^*$ by $\ell^k(dt) = (\int_o^t \psi^k(s)ds)dt$. Then $\langle \ell^k, \theta\rangle = \int_{\square_1} \psi^k d^1\theta$. Moreover, by using, on the one hand, the generating function for the Hermite polynomials and, on the other hand, the uniqueness of solutions to linear stochastic integral equations (cf. H. P. McKean [5]), one finds that for $K = (k_1, \ldots, k_m) \in (Z^+)^m$:

$$\int_{\square_m} \psi^k \, d^m\theta = \mathcal{H}_{\alpha(K)}$$

where $\psi^K = \psi^{k_1} \otimes \ldots \otimes \psi^{k_m}$ and $\alpha(K) \in \mathcal{A}$ is defined as in Lemma (1). Hence, by Lemma (1):

(10) $$\partial^m \ell^K = \int_{\square_m} \psi^K \, d^m\theta \,, \quad K \in (Z^+)^m \,.$$

Finally, for $(t_1, \ldots, t_n) \in \square_m$, define $h_{(t_1, \ldots, t_m)}(s_1, \ldots s_m) = (s_1 \wedge t_1) \ldots (s_m \wedge t_m)$. Then, for each $h \in H_1(R^1)^{\otimes^m}$, there is a unique $h' \in L^2(\square_m)$ such that $(h, h_{(t_1, \ldots, t_m)})_{H_1(R^1)^{\otimes^m}}$ $\int_o^{t_m} \ldots \int_o^{t_r} h'(s_1, \ldots, s_m)ds_1, \ldots, ds_m$ for all $(t_1, \ldots, t_m) \in \square_m$

(11) <u>Theorem:</u> Given $\Phi \in L^2(\mathcal{W})$ and $m \geq 1$, the $f_\Phi^{(m)}$ in (9) is $(D^m\Phi(1))'$.

<u>Proof</u>: By (9):

$$\begin{aligned}
\partial^m(D^m\Phi(1)) &= \partial^m\Big[\sum_{K \in (Z^+)^m} (D^m\Phi(1), \ell^K)_{H_1(R^1)^{\otimes^m}} \ell^K\Big] \\
&= \sum_{K \in (Z^+)^m} ((D^m\Phi(1))', \psi^K)_{L^2(\square_m)} \int_{\square_m} \psi^K \, d^m\theta \\
&= \int_{\square_m} (D^m\Phi(1))' \, d^m\theta \,.
\end{aligned}$$

Thus, by (7):

$$\Pi_{Z(m)} = \frac{1}{m!} \int_{\square_m} (D^m\Phi(1))' \, d^m\theta \,.$$

(12) <u>Remark</u>: It is intuitively clear that the $f_\Phi^{(m)}$ in (9) must be given by $f_\Phi^{(m)}(t_1, \ldots, t_m) = E^{\mathcal{W}}[\Phi\dot\theta(t_1)\ldots\dot\theta(t_m)]$, where $\dot\theta(t)$ is white noise. What Theorem (11) does is provide a rigorous meaning for this equation.

(13) <u>Remark:</u> Given $d \geq 2$, define $H_1(R^d)$ and $\Theta(R^d)$ by analogy with $H_1(R^1)$ and $\Theta(R^1)$. Then $(\Theta(R^d), H_1(R^d), \mathscr{W})$ becomes an abstract Wiener space when $\mathscr{W}$ is the Wiener measure associated with the Brownian motion in R^d. To provide an Itô interpretation in this case, let $\{\Psi^k : k \in Z^+\} \subset C_o^\infty((0,\infty); R^1)$ be chosen as before and set $\ell^{(k,i)} = \Psi^k e_i$, $k \in Z^+$ and $i \in \mathscr{D} \equiv \{1,\dots,d\}$, where $\{e_1,\dots,e_d\}$ is a standard basis for R^d. Next, for $f = \sum_{I \in \mathscr{D}^m} f_I e_I \in L^2(\square_1; (R^d)^{\otimes m})$, define

$$\int_{\square_m} f\, d^m\theta = \sum_{I \in \mathscr{D}^m} \int_{\square_m} f_I d^m \theta_I$$

where

$$\int_{\square_m} f_I d^m\theta_I =$$

$$\sum_{\sigma \in \Pi_m} \int_o^\infty d\theta_{i_m}(t_m) \int_o^{t_m} d\theta_{i_{m-1}}(t_{m-1}) \cdots \int_o^{t_2} f_I(t_{\sigma(1)},\dots,t_{\sigma(m)}) d\theta_{i_1}(t_1)$$

for $I = (i_1,\dots,i_m) \in \mathscr{D}^m$. One can then check that

$$\partial^m \ell^{(K,I)} = \int_{\square_m} \Psi^K d^m \theta_I .$$

Finally, after associating with each $h \in H_1(R^d)^{\otimes m}$ the unique $h' \in L^2(\square_i^m; (R^d)^{\otimes m})$ satisfying

$$h(t_1,\dots,t_m) = \int_o^{t_m} \int_o^{t_1} h'(s_1,\dots,s_m) ds_1 \dots ds_m ,$$

we again arrive at the equation

$$\Pi_{Z(m)} \Phi = \int_{\square_m} (D^m \Phi(1))' d^m\theta \ .$$

(14) <u>Remark</u>: Theorem (11) is little more than an exercise in formalism unless $\Phi \in W_\infty^2(R^1)$. Fortunately, many interesting functions are in $W_\infty^2(R^1)$. For example, let $\sigma : R^1 \to R^1$ and $b : R^1 \to R^1$ be smooth functions having bounded first derivatives and slowly increasing derivatives of all orders. Define $X(\cdot,x)$, $x \in R^1$, to be the solution to

$$X(T,x) = x + \int_0^T \sigma(X(t,x))d\theta(t) + \int_0^T b(X(t,x))dt, \quad T \geq 0.$$

Then, for each $(T,x) \in (0,\infty) \times R^1$, $X(T,x) \in W^2_\infty(R^1)$. In fact, $DX(\cdot,x)$ satisfies:

$$DX(T,x) = \int_0^T \sigma'(X(t,x))\, DX(t,x)\, d\theta(t) + \int_0^T b'(X(t,x))DX(t,x)dt$$
$$+ \int_0^{\cdot\wedge T} \sigma(X(t,x))\, dt;$$

an equation which can be easily solved by the method of variation of parameters. Moreover, $D^m X(T,x)$, $m \geq 2$, can be found by iteration of the preceding.

(15) <u>Remark</u>: In many ways, the present paper should be viewed as an outgrowth of P. Malliavin's note [4]. Indeed, it was only after reading Malliavin's note that the ideas developed here occurred to the present author.

<u>REFERENCES</u>

[1] Cameron, R. H. and Martin, W. T., "Transformation of Wiener integrals under translations," Ann. Math. 45 (1944), pp. 386-396.

[2] Itô, K., "Multiple Wiener integral," J. Math. Soc. Japan 3(1951), pp. 157-164.

[3] Kree, M. and P., "Continuité de la divergence dans les espaces de Sobolev relatif à l'espace de Wiener," Comptes rendus, 296 série I (1983), pp. 833-836.

[4] Malliavin, P., "Calcul de variations, intégrales stochastiques et complexes de Rham sur l'espace de Wiener," Comptes rendus, 299, série I (1984), pp. 347-350.

[5] McKean, H. P., "Geometry of differential space," Ann. Prob., Vol. 1, No. 2 (1973), pp. 197-206.

[6] Wiener, N., "The Homogeneous Chaos," Am J. Math., Vol. 60 (1930), pp. 897-936.

A PROPOS DES DISTRIBUTIONS

SUR L'ESPACE DE WIENER

par P.A. MEYER et J.A. YAN

I. INTRODUCTION

Nous désignons par (B_t) le mouvement brownien linéaire issu de 0, réalisé de manière canonique sur l'espace de Wiener $(\Omega,\mathcal{F},P)$, où Ω est l'espace de toutes les trajectoires continues nulles en 0. Tout élément f de $L^2(P)$ admet un développement suivant les chaos de Wiener, noté $f=\Sigma_n f_n$; f_o est la constante $E[f]$, et pour $n>0$ f_n est une intégrale stochastique multiple

(1) $$f_n = J_n(\hat{f}_n) = \int_{s_1<\dots<s_n} \hat{f}_n(s_1,\dots,s_n)dB_{s_1}\dots dB_{s_n}$$

étendue au n-èdre croissant C_n de $\mathbb{R}_+^n$. Le ^ indique que l'on réalise une sorte d'analyse harmonique de la v.a. f, et la fonction $\hat{f}_n$ sera appelée le coefficient de f dans le n-ième chaos. Rappelons que les chaos sont orthogonaux, et que

(2) $$\| f_n \|^2_{L^2(P)} = \| \hat{f}_n \|^2_{L^2(C_n)} .$$

Pour $n=0$, on convient que C_0 est réduit à un point, muni de son unique loi de probabilité. Nous préférerons écrire le développement sous la forme

(3) $$f_n = J_n(\hat{f}_n) = \frac{1}{n!}I_n(\hat{f}_n) = \frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}_+^n} \hat{f}_n(s_1,\dots,s_n)dB_{s_1}\dots dB_{s_n},$$

où la fonction $\hat{f}_n$ a maintenant été prolongée par symétrie à $\mathbb{R}_+^n$, et les diagonales sont omises dans l'intégration. Soit de même un second $g = \Sigma_n \frac{1}{n!} I_n(\hat{g}_n) \in L^2(P)$; on a

(4) $$< f,g >_\Omega = \Sigma_n \frac{1}{n!} < \hat{f}_n,\hat{g}_n >_{\mathbb{R}_+^n} .$$

Il existe plusieurs théories des distributions sur l'espace de Wiener (cf. les références aux travaux de P. Krée). La plus connue actuellement est celle de S. Watanabe, qui part de l'espace suivant de fonctions-test : ce sont premièrement des fonctions $f=\Sigma_n f_n$ pour lesquelles la suite des normes $\|f_n\|_2$ est à décroissance rapide, de sorte que pour tout k, on peut définir l'élément de $L^2(P)$

(5) $$(I+N)^k f = \Sigma_n (1+n)^k f_n \quad (k\in\mathbb{N}) .$$

Parmi ces fonctions, les fonctions-test sont celles qui satisfont aux conditions

(6) Pour tout $p<\infty$ et tout $k\in\mathbb{N}$, $\| f \|_{p,k} = \| (I+N)^{k/2} f\|_{L^p} < \infty$.

Les semi-normes $\|\cdot\|_{p,k}$ forment une famille filtrante de semi-normes, munissant l'espace des fonctions-test d'une topologie localement convexe, et les distributions de S.Watanabe sont les formes linéaires continues sur cet espace. Toute distribution T satisfait donc à une inégalité

(7) $|\langle T,f\rangle| \leqq C\|f\|_{p,2k}$ pour un k et un p $(2\leqq p<\infty)$.

Le point fort de cette théorie est la richesse de l'espace des fonctions-test : il contient toutes les v.a. X_t , où X est solution d'une équation différentielle stochastique à coefficients très réguliers. Le point faible est le fait que la structure de l'espace de Wiener n'est pas pleinement utilisée : si j est un isomorphisme (modulo les ensembles négligeables) de l'espace mesuré $(\Omega,\mathcal{F},P)$, qui respecte les chaos de Wiener (donc les espaces L^p et l'opérateur N), j opère sur les fonctions test et les distributions. Il est facile de définir de tels isomorphismes à partir d'isomorphismes de $(\mathbb{R}_+,dt)$ ne respectant ni l'ordre, ni la continuité.

Au cours de l'année 1985-86 à Strasbourg, nous avons étudié dans un séminaire la théorie des distributions due à T. Hida et ses associés (H.H. Kuo en particulier). Nous présentons ici cette théorie dans le langage usuel des probabilistes, assez différent de celui de Hida (qui est le langage des distributions aléatoires de Gelfand). Nous ne présentons presque aucun résultat qui ne figure déjà chez Hida, mais on pourra constater que nous avons considérablement modifié (simplifié, croyons nous) l'exposé et les démonstrations. Nous espérons ainsi faire mieux connaître une théorie qui nous a paru très intéressante.

II. QUELQUES IDEES GENERALES

1. Pour présenter la partie formelle des travaux de Hida, il est avantageux de travailler sur un espace de fonctions-test aussi petit que possible. Un tel espace est formé des sommes

(8) $$f = \Sigma_n \frac{1}{n!} I_n(\hat{f}_n)$$

ne comportant qu'un nombre fini de termes non nuls, et où $\hat{f}_n$ est une fonction <u>symétrique</u> appartenant à $\mathcal{D}_n = C_c^\infty(]0,\infty[^n)$ (nous laissons l'intervalle ouvert en 0, pour éviter le caractère singulier de ce point).

Désignons par $\mathcal{D}_{ns}$ l'espace de ces fonctions symétriques : l'espace des fonctions-test peut donc s'identifier à la somme directe $\oplus_n \mathcal{D}_{ns}$ ($\mathcal{D}_{0s}=\mathbb{R}$) ; si l'on y tient, on peut le munir de la topologie somme directe localement convexe, et il est alors nucléaire (en tant que somme directe dénombrable d'espaces nucléaires). Son dual s'identifie au produit $\prod_n \mathcal{D}'_{ns}$, qui est aussi nucléaire. Une distribution T sur l'espace de Wiener est donc une suite $(\hat{T}_n)$ de distributions symétriques sur les ouverts $]0,\infty[^n$. Nous écrirons symboliquement

(9) $$T = \Sigma_n \frac{1}{n!} I_n(\hat{T}_n)$$

la valeur de la distribution (9) sur la fonction-test (8) étant donnée par

(10) $$< T,f > = \Sigma_n \frac{1}{n!} < \hat{T}_n,\hat{f}_n > .$$

COMMENTAIRES. 1) L'idée de considérer des sommes formelles du type (9) est due à K.R. Parthasarathy [1]. C'est la lecture de cet article qui nous a amenés à nous intéresser à la théorie de Hida.

Les espaces considérés par Hida sont plus larges pour les fonctions-test, et plus restreints pour les distributions. Par exemple, dans la représentation (8), Hida permet que les $\hat{f}_n$ appartiennent aux espaces de Sobolev $H^{(n+1)/2}$, et dualement, impose aux $\hat{T}_n$ de (9) d'appartenir aux espaces $H^{-(n+1)/2}$. Le choix de ces espaces tient au lemme de plongement de Sobolev : la condition $\hat{f}_n \in H^{(n+1)/2}$ assure que $\hat{f}_n$ admet un représentant continu. Ces restrictions ne jouant qu'un rôle très accessoire, nous préférons les oublier.

2) Comme en théorie classique des distributions, on utilise la notion de distribution comme une sorte de gros sac où l'on peut tout fourrer, mais en fait étant donnée une distribution concrète T , on cherche à définir $<T,f>$ sur un espace de fonctions f <u>aussi large que possible</u> . Soulignons que l'on ne dispose, pour faire cette extension, que d'un seul moyen : la formule (10). Il faut que chaque $\hat{f}_n$ soit dans le domaine de la distribution $\hat{T}_n$, et que la série converge.

2.Pour toute fonction h de $L^2(\mathbb{R}_+)$, nous pouvons définir le <u>vecteur exponentiel</u>

(11) $$\mathcal{E}(h) = \exp(\tilde{h} - \tfrac{1}{2}<h,h>) \quad \text{où} \quad \tilde{h} = \int h_s dB_s .$$

Ces vecteurs appartiennent à tous les L^p $(p<\infty)$. Le développement de $\mathcal{E}(h)$ suivant les chaos de Wiener est

(12) $$\mathcal{E}(h) = \Sigma_n \frac{1}{n!} I_n(h^{\otimes n}) .$$

En particulier, prenons $\xi \in C_c^\infty(]0,\infty[)$ - la lettre ξ sera réservée à cet usage ; pour toute distribution $T=\Sigma_n \frac{1}{n!} I_n(\hat{T}_n)$, $<\hat{T}_n, \xi^{\otimes n}>$ a un sens.

Si la série

(13) $$U_T(\xi) = \Sigma_n \frac{1}{n!} < \hat{T}_n , \xi^{\otimes n} >$$

converge pour tout ξ , nous appellerons sa somme la <u>fonction caractéristique</u> de la distribution T . Hida utilise le nom peu suggestif de << U-functional >>, rappelé par notre notation. Nous pensons que le mot de fonction caractéristique ne peut créer de confusion avec les notions élémentaires désignées d'habitude par ce terme.

Montrons que U_T caractérise T : tout d'abord, la série

$$U_T(t\xi) = \Sigma_n \frac{t^n}{n!} < \hat{T}_n , \xi^{\otimes n} >$$

convergeant pour tout t, sa somme représente une fonction entière de t. On a alors

(14) $$< \hat{T}_n , \xi^{\otimes n} > = \frac{d^n}{dt^n} U_T(t\xi)\Big|_{t=0} \;.$$

Par polarisation, on en déduit $< \hat{T}_n , \xi_1 \circ \ldots \circ \xi_n >$ (produit symétrique), qui vaut aussi $< \hat{T}_n , \xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n >$ puisque $\hat{T}_n$ est une distribution symétrique. Il est bien connu que les valeurs de $\hat{T}_n$ sur les fonctions de ce type déterminent $\hat{T}_n$, et donc T .

La fonction caractéristique joue dans cette théorie le rôle d'une sorte de transformée de Fourier-Laplace. On pourrait songer à une sorte de transformée de Fourier, la <<τ-functional>> de Hida

$$\tau_T(\xi) = < T, e^{i\tilde{\xi}} > = \exp(\|\xi\|^2/2) U_T(i\xi) \quad (\xi \text{ réelle}).$$

En pratique, c'est la fonction caractéristique qui est la notion la plus utile.

Les distributions les plus simples sont celles qui correspondent aux fonctions g appartenant à L^2, dont la valeur sur une fonction-test f est simplement $E[gf]$, et la fonction caractéristique vaut $E[g\mathcal{E}(\xi)]$. En particulier, la fonction caractéristique associée à la distribution $T=\mathcal{E}(h)$ (vecteur exponentiel) est

(15) $$U_T(\xi) = < \mathcal{E}(h), \mathcal{E}(\xi) > = e^{<h,\xi>}$$

tandis que le coefficient $\hat{T}_n$ du développement de T suivant les chaos de Wiener est la fonction $h^{\otimes n}$.

3. Les physiciens utilisent parfois une << multiplication >> des variables aléatoires sur l'espace de Wiener, appelée <u>produit de Wick</u>, et notée $:XY:$ (nous préfèrerons souvent l'écrire $X:Y$, à la manière usuelle de l'algèbre). Le produit de Wick de deux intégrales stochastiques multiples $I_m(f_m):I_n(g_n)$ est égal à $I_{m+n}(f_m \circ g_n)$, où $f_m \circ g_n$ est le produit tensoriel symétrique de ces deux fonctions. De même, le produit de Wick $\mathcal{E}(f):\mathcal{E}(g)$ de deux vecteurs exponentiels vaut $\mathcal{E}(f+g)$