

**KOMPENDIUM DER PROGRAMMIERTECHNIK**

---

# **Numerische Verfahren der Programmiertechnik**

**Paulin · Griepentrog**



# KOMPENDIUM DER PROGRAMMIERTECHNIK

# Numerische Verfahren der Programmieretechnik

Gerhard Paulin

Eberhard Griepentrog

37 Bilder, 16 Tafeln



VEB VERLAG TECHNIK · BERLIN

1. Auflage

© VEB Verlag Technik, Berlin, 1975

Lizenz 201.370/90/75

DK 518.5:681.3.04/.06:800.93 · LSV 3054 · VT 6/5076-1

Lektor: *Karl Beller*

Schutzumschlag: *Kurt Beckert*

Printed in the German Democratic Republic

Gesamtherstellung: IV/10/5 Druckhaus Freiheit Halle

Bestellnummer: 5521424

EVP 28,— Mark

## Vorwort

Mit der zunehmenden Mathematisierung der Fachwissenschaften – unterstützt durch den Einsatz elektronischer Informationsverarbeitungssysteme – zählt die Mathematik unumstritten zu den wesentlichen Grundlagenfächern im Rahmen der Ausbildung auf sehr unterschiedlichen Fachgebieten.

Zwar gibt es zahlreiche Darstellungen der mathematischen Grundlagen – u. U. ausgerichtet auf die speziellen Berührungspunkte einer Fachwissenschaft mit der Mathematik –, jedoch erscheint es uns nützlich, in einem Buch, über eine lehrbuchmäßige Behandlung der Grundlagen hinausgehend, die algorithmische Realisierung wichtiger mathematischer Modelle zusammenfassend zu behandeln.

Die Absicht beim Schreiben dieses Buches bestand also darin, typische Probleme, die in der praktischen Mathematik gestellt werden, und Verfahren zu ihrer Lösung zu erläutern, verbal zu beschreiben, mathematisch zu abstrahieren, Beweise oder Beweisgedanken anzudeuten und letztlich algorithmische Formulierungen für die Verfahren anzugeben. Es sollte ein Handbuch numerischer Techniken im Hinblick auf deren Anwendung und ihre Behandlung in der Ausbildung entstehen, in dem der Leser sich schnell über die Struktur bestimmter grundlegender mathematischer Verfahren orientieren kann, wobei diese Verfahren gleichzeitig so aufbereitet sind, daß der Leser sie unmittelbar für seine Aufgaben einsetzen kann.

Eine solche mathematische Praxis ist nicht nur in allen Ingenieurwissenschaften üblich, sondern auch in der Physik, der Chemie, der Landwirtschaftswissenschaft, der Ökonomie, der Medizin – um nur einige Wissenschaftszweige zu nennen.

Für die Notation der Algorithmen haben wir ALGOL 60 gewählt. Diese Sprache ist zur Zeit immer noch die am besten geeignete, um numerische Verfahren zu beschreiben, da sie von speziellen Hardwaremöglichkeiten absieht. Wir sind jedoch davon überzeugt, daß die Umsetzung dieser Algorithmen in eine andere, höhere Programmiersprache und die Angleichung an Implementations-eigenheiten keine besondere Mühe macht.

So soll dieses Buch dem Studierenden helfen, typische numerische Verfahren kennen, verstehen und handhaben zu lernen. Dem Fachwissenschaftler bleibt die Auswahl eines geeigneten Verfahrens und die Anpassung des ausgewählten Verfahrens an seine konkreten Arbeitsbedingungen. Spezielle Varianten bzw. Modifikationen werden nur gelegentlich angedeutet, in diesen Fällen muß jedoch auf die Fachliteratur verwiesen werden.

Die in diesem Buch zu den einzelnen Abschnitten aufgeführte Literatur ist nahezu ausschließlich Sekundärliteratur, sie beschränkt sich auf Standardwerke der Lehrbuchliteratur. Nur dort, wo bis heute unseres Wissens eine lehrbuchmäßige Darstellung nicht vorliegt, werden Zeitschriftenartikel und Originalarbeiten zitiert.

Die veröffentlichten Algorithmen sind getestet worden, soweit sie sich nicht solcher Ein- und Ausgabeprozeduren bedienen, die als Kodeprozeduren vorausgesetzt werden. Die Algorithmen sollen das Prinzipielle einer Methode realisieren,

sie berücksichtigen i. allg. extreme Bedingungen nicht. Außerdem möge der Leser darauf hingewiesen sein, daß die Veröffentlichung von Algorithmen fehleranfällig ist, allein schon der Fehler wegen, die durch das wiederholte Abschreiben entstehen. Die Autoren wären deshalb für Hinweise und Mitteilungen über Erfahrungen bei Testläufen dankbar.

Zur Entstehung des Buches haben wesentlich die Herren *Werner Wendt*, *Jürgen Läuter* und *Henryk Woźniakowsky* beigetragen, die freundlicherweise die Ausarbeitung der Abschnitte 2., 8.A. und 12. übernahmen.

Wir danken außerdem *Herrn Dieter Leistner*, *Herrn Hans Kühne* und *Herrn Andrzej Kielbasinski* für die Hilfe während der Entstehung des Manuskripts.

*Gerhard Paulin*  
*Eberhard Griepentrog*

# Inhaltsverzeichnis

## Vorwort

<b>1. Algorithmen für Verfahren der linearen Algebra</b> .....	17
1.1. Rechenoperationen für Vektoren und Matrizen .....	18
1.1.1. Grundlegende Definitionen .....	18
1.1.2. Algorithmen für additive und multiplikative Verknüpfungen von Vektoren und Matrizen .....	22
1.2. Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme .....	27
1.2.1. Definitionen und Sätze .....	27
1.2.2. Rangbestimmung .....	28
1.2.3. Eliminationsverfahren .....	31
1.2.4. Gleichungssysteme mit symmetrischer Koeffizientenmatrix .....	38
1.2.5. Iterative Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme .....	41
1.2.5.1. Allgemeines .....	41
1.2.5.2. Praktische Durchführung des Iterationsverfahrens .....	43
1.2.6. Berechnung der inversen Matrix .....	45
1.3. Determinanten .....	49
1.3.1. Grundlegende Definitionen und Rechenregeln .....	49
1.3.2. Berechnung von Determinanten .....	53
1.4. Eigenwerte .....	55
1.4.1. Definitionen und grundlegende Aussagen .....	55
1.4.2. Bestimmung des betragsgrößten Eigenwerts .....	58
1.4.3. Bestimmung des betragskleinsten Eigenwerts .....	60
1.4.4. Bestimmung des charakteristischen Polynoms .....	61
1.4.5. Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren symme- trischer Matrizen .....	64
1.4.6. Schlußbemerkungen .....	68
Literatur .....	68
<b>2. Algorithmen für Verfahren der linearen Optimierung</b> <i>von Werner Wendt, Berlin</i> .....	69
2.1. Problemstellung .....	69
2.2. Geometrische Interpretation .....	73
2.3. Einige Resultate aus der Theorie der linearen Optimierung .....	75
2.4. Lösungsverfahren .....	76
2.4.1. Gewöhnliche Simplexmethode .....	79
2.4.2. Behandlung von Degenerationen .....	86
2.4.3. Bestimmung eines zulässigen Ausgangsbasisvektors .....	86

2.4.4.	Duale Simplexmethode .....	89
2.4.5.	Beispiel für ein vollständiges Programm zur Lösung von Maximalaufgaben .....	91
2.4.6.	Revidierte Simplexmethode .....	95
2.4.7.	Ganzzahlige lineare Optimierung .....	99
	Literatur .....	101
<b>3.</b>	<b>Nullstellenbestimmung</b> .....	<b>102</b>
3.1.	Sekantennäherungsverfahren (Regula falsi) .....	102
3.2.	Tangentennäherungsverfahren .....	104
3.3.	Allgemeines Iterationsverfahren .....	106
3.4.	Nullstellen von Polynomen .....	109
3.4.1.	Vorbemerkungen .....	109
3.4.2.	Vollständiges Hornerisches Schema .....	110
3.4.3.	Doppelzeiliges Hornerisches Schema .....	113
3.4.4.	Wurzeln der quadratischen und der biquadratischen Gleichung .....	116
3.4.5.	Wurzeln der Gleichung 3. Grades .....	119
3.4.6.	Nullstellenbestimmung für Polynome durch Abspaltung von Faktoren .....	122
	Literatur .....	126
<b>4.</b>	<b>Interpolationsverfahren</b> .....	<b>127</b>
4.1.	Direktes Interpolationspolynom .....	128
4.2.	Newtonsches Interpolationsverfahren .....	130
4.3.	Gregory-Newton'sche Interpolationsformeln .....	133
4.4.	Lagrangesche Interpolationsformel .....	137
4.5.	Weitere Formeln für die Interpolation mit Hilfe von Polynomen .....	140
4.6.	Interpolation für Funktionen von zwei Veränderlichen .....	142
4.7.	Trigonometrische Interpolation .....	143
	Literatur .....	146
<b>5.</b>	<b>Numerische Differentiation</b> .....	<b>147</b>
5.1.	Problemdarstellung .....	147
5.2.	Differentiation bei beliebiger Verteilung der Stützstellen .....	148
5.3.	Differentiation bei äquidistanten Stützstellen .....	149
5.4.	Differentiation mit Hilfe des Lagrangeschen Interpolationspolynoms .....	151
	Literatur .....	154
<b>6.</b>	<b>Algorithmen für numerische Integration</b> .....	<b>155</b>
6.1.	Berechnung von Näherungswerten für bestimmte Integrale .....	155
6.2.	Numerische Integration mit Hilfe von Interpolationspolynomen .....	157
6.2.1.	Trapezregel, Faßregel, Simpsonsche Formel, 3/8-Regel .....	158
6.2.2.	Quadraturformel von <i>Newton/Cotes</i> .....	163
6.2.3.	Quadraturformeln aus den Interpolationspolynomen von <i>Gregory/Newton</i> .....	164

6.3. Quadraturmethode von <i>Gauß</i> .....	165
Literatur .....	174
<b>7. Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate</b> .....	175
7.1. Ausgleichskurve und Approximationsfunktion .....	175
7.2. Koeffizientenberechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate ..	176
7.3. Bemerkungen zur algorithmischen Darstellung der Bestimmung von Ausgleichskurven .....	178
7.4. Ganze rationale Funktionen als Ausgleichskurven .....	180
Literatur .....	182
<b>8. Algorithmen für Verfahren der mathematischen Statistik</b> .....	183
8.1. Stichprobenstreuung .....	187
8.2. Statistische Testgrößen .....	191
8.3. Lineare Regression und Korrelation .....	196
8.4. Varianzanalyse	
<i>von Jürgen Lauter, Berlin</i> .....	200
8.4.1. Einfaktorielle Varianzanalyse .....	201
8.4.1.1. Problemstellung .....	201
8.4.1.2. Varianzanalytisches Modell .....	204
8.4.1.3. Rechenformeln und Programm .....	204
8.4.2. Zweifaktorielle Varianzanalyse bei Kreuzklassifikation .....	208
8.4.2.1. Problemstellung .....	208
8.4.2.2. Varianzanalytisches Modell .....	208
8.4.2.3. Grundlegende Rechenformeln .....	209
8.4.2.4. Zweifaktorielle Varianzanalyse mit einem Meßwert in jeder Zelle .....	210
8.4.2.5. Zweifaktorielle Varianzanalyse mit der gleichen Anzahl von Wiederholungen in jeder Zelle .....	213
8.4.2.6. Zweifaktorielle Varianzanalyse mit unterschiedlichen Meßwert- anzahlen in den Zellen .....	216
Literatur .....	226
<b>9. Algorithmen fur die Berechnung der Werte spezieller Funktionen</b> .....	227
9.1. Gammafunktion .....	227
9.2. Elliptische Integrale .....	235
9.3. Fehlerintegral .....	243
9.4. Bessel-Funktionen .....	247
Literatur .....	264
<b>10. Nichtlineare Gleichungssysteme</b> .....	265
10.1. Grundlegende Aussagen .....	265
10.2. Kontraktionsverfahren .....	267
10.3. Newton-Verfahren und modifiziertes Newton-Verfahren .....	268

10.4. Regula falsi und modifizierte Regula falsi .....	271
10.5. Parameterverfahren .....	274
Literatur .....	277
<b>11. Differentialgleichungen .....</b>	<b>278</b>
11.1. Allgemeine Grundlagen der numerischen Behandlung .....	278
11.2. Testdifferentialgleichung .....	280
11.3. Einschrittverfahren .....	283
11.4. Behandlung steifer Differentialgleichungssysteme .....	286
11.5. Mehrschrittverfahren .....	288
11.6. Differentialgleichungen höherer Ordnung .....	291
Literatur .....	292
<b>12. Einführung in die numerische Analysis</b>	
<i>von Henryk Woźniakowsky, Warschau</i> .....	293
12.1. Darstellung reeller Zahlen in Digitalrechnern .....	293
12.2. Überlauf und Unterlauf .....	295
12.3. Typische Gleitkommaoperationen .....	296
12.4. Einfluß des Algorithmus auf das Resultat .....	297
12.5. Numerische Stabilität von Algorithmen .....	299
12.6. Abschätzung des generierten Fehlers .....	301
12.7. Konditionszahl eines Problems .....	304
12.8. Schlußbemerkungen .....	306
Literatur .....	306
<b>Standardliteratur .....</b>	<b>307</b>
<b>Sachwörterverzeichnis .....</b>	<b>309</b>

# Algorithmenverzeichnis

Algorithmus	1.1:	Vektoraddition (die Elemente sind reelle Zahlen) . . . .	22
Algorithmus	1.2:	Skalarprodukt . . . . .	22
Algorithmus	1.3:	Skalarprodukt . . . . .	23
Algorithmus	1.4:	Winkel zwischen zwei Vektoren (Hauptwert) . . . . .	23
Algorithmus	1.5:	Länge eines Vektors . . . . .	23
Algorithmus	1.6:	Abstand zweier Punkte . . . . .	24
Algorithmus	1.7:	Vektorielles Produkt . . . . .	24
Algorithmus	1.8:	Spatprodukt. . . . .	24
Algorithmus	1.9:	Lagrangesche Identität . . . . .	24
Algorithmus	1.10:	Matrizenaddition . . . . .	25
Algorithmus	1.11:	Matrizenaddition . . . . .	25
Algorithmus	1.12:	Matrizenmultiplikation. . . . .	25
Algorithmus	1.13:	Matrix mal Vektor . . . . .	26
Algorithmus	1.14:	Vektor mal Matrix . . . . .	26
Algorithmus	1.15:	Transponieren einer quadratischen Matrix . . . . .	26
Algorithmus	1.16:	Spur von $\mathfrak{A}$ . . . . .	26
Algorithmus	1.17:	Spur von $\mathfrak{A}$ . . . . .	27
Algorithmus	1.18:	Euklidische Norm . . . . .	27
Algorithmus	1.19:	Erzeugung einer Dreiecksmatrix . . . . .	30
Algorithmus	1.20:	Mechanisierter Gaußscher Algorithmus . . . . .	33
Algorithmus	1.21:	Gaußscher Algorithmus mit Pivotierung . . . . .	34
Algorithmus	1.22:	Gaußscher Algorithmus mit Pivotierung und Rangbestimmung . . . . .	35
Algorithmus	1.23:	Lösung eines linearen Gleichungssystems mit Pivotierung . . . . .	36
Algorithmus	1.24:	Lösung eines linearen Gleichungssystems mit mehr Gleichungen als Unbekannten . . . . .	37
Algorithmus	1.25:	Verfahren von <i>Cholesky</i> , Darstellung 1 . . . . .	39
Algorithmus	1.26:	Verfahren von <i>Cholesky</i> , Darstellung 2 . . . . .	39
Algorithmus	1.27:	Gauß-Seidelsches Iterationsverfahren (Einzelschrittverfahren) . . . . .	44
Algorithmus	1.28:	Gauß-Seidelsches Iterationsverfahren (Gesamtschrittverfahren) . . . . .	44
Algorithmus	1.29:	Matrixinversion durch Lösung von $\mathfrak{A}\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ . . . . .	47
Algorithmus	1.30:	Matrixinversion mit Pivotierung und Determinantenberechnung . . . . .	47
Algorithmus	1.31:	Inversion durch Basistransformation . . . . .	48
Algorithmus	1.32:	Determinantenberechnung mit Zerstörung des Feldes . . . . .	53
Algorithmus	1.33:	Determinantenberechnung ohne Zerstörung des Feldes . . . . .	54
Algorithmus	1.34:	Bestimmung des betragsmaximalen Eigenwerts . . . . .	59
Algorithmus	1.35:	Bestimmung des betragsminimalen Eigenwerts . . . . .	60
Algorithmus	1.36:	Bestimmung des charakteristischen Polynoms . . . . .	62

Algorithmus 1.37:	Bestimmung eines Eigenvektors zu vorgegebenem Eigenwert auf der Grundlage des Leverrier-Faddejew-Verfahrens .....	64
Algorithmus 1.38:	Jacobi-Verfahren.....	67
Algorithmus 2.1:	Durchführung eines Austauschschritts der gewöhnlichen Simplexmethode .....	83
Algorithmus 2.2:	Bestimmung der Pivotzeile (Pivotspalte) nach der gewöhnlichen (dualen) Simplexmethode .....	83
Algorithmus 2.3:	Transformation des Simplextableaus .....	85
Algorithmus 2.4:	Bestimmung eines zulässigen Ausgangsbasisvektors mit Hilfe der M-Methode .....	88
Algorithmus 2.5:	Durchführung eines Austauschschritts der dualen Simplexmethode .....	90
Algorithmus 2.6:	Druck der Ausgangsdaten .....	91
Algorithmus 2.7:	Aufstellung einer Positionsliste der Werte der eigentlichen Variablen (Schlupfvariablen) .....	92
Algorithmus 2.8:	Rahmenprogramm zu einem vollständigen Programm zur Lösung von Maximalaufgaben .....	93
Algorithmus 2.9:	Bestimmung des Skalarprodukts .....	97
Algorithmus 2.10:	Multiplikation mit einer Elementarmatrix .....	97
Algorithmus 2.11:	Durchführung eines Austauschschritts der revidierten Simplexmethode .....	98
Algorithmus 2.12:	Konstruktion einer Zusatzrestriktion nach Gomory im Fall der Nichtganzzahligkeit einer eigentlichen Variablen .....	100
Algorithmus 3.1:	Regula falsi .....	103
Algorithmus 3.2:	Tangentennäherungsverfahren .....	105
Algorithmus 3.3:	Allgemeines Iterationsverfahren ohne Konvergenzverbesserung .....	108
Algorithmus 3.4:	Allgemeines Iterationsverfahren mit Konvergenzverbesserung .....	108
Algorithmus 3.5:	Wert eines Polynoms $n$ -ten Grades an einer Stelle $x = x_0$ (Hornerisches Schema) .....	114
Algorithmus 3.6:	Hornerisches Schema .....	115
Algorithmus 3.7:	Vollständiges Hornerisches Schema.....	115
Algorithmus 3.8:	Doppelzeitiges Hornerisches Schema.....	115
Algorithmus 3.9:	Hornerisches Schema für komplexes Argument .....	116
Algorithmus 3.10:	Wurzeln der quadratischen Gleichung mit reellen Koeffizienten .....	117
Algorithmus 3.11:	Wurzeln der quadratischen Gleichungen mit komplexen Koeffizienten .....	117
Algorithmus 3.12:	Biquadratische Gleichung .....	118
Algorithmus 3.13:	Cardanosche Formel .....	120
Algorithmus 3.14:	Nullstellen eines Polynoms 3. Grades .....	121
Algorithmus 3.15:	Abspaltung eines quadratischen Polynoms .....	124
Algorithmus 3.16:	Verfahren von <i>Bairstow/Hitchcock</i> .....	124
Algorithmus 4.1:	Berechnung des Koeffizientenvektors $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .....	130
Algorithmus 4.2:	Koeffizienten des Newtonschen Polynoms für beliebige Abszissenabstände .....	132

Algorithmus 4.3:	Koeffizienten des Newtonschen Polynoms für gleiche Abszissenabstände .....	133
Algorithmus 4.4:	Gregory-Newtonische Interpolation mit fallenden Differenzen .....	135
Algorithmus 4.5:	Gregory-Newtonische Interpolation mit aufsteigenden Differenzen .....	137
Algorithmus 4.6:	Lagrangesches Polynom .....	138
Algorithmus 4.7:	Interpolation mit Hilfe Lagrangescher Polynome bei äquidistanten Stützstellen .....	140
Algorithmus 4.8:	Fourier-Analyse .....	145
Algorithmus 5.1:	$r$ -te Ableitung eines Polynoms .....	145
Algorithmus 5.2:	Differentiation mit Hilfe des Newtonschen Interpolationspolynoms .....	152
Algorithmus 5.3:	Algorithmus für Interpolation, Differentiation und Integration .....	153
Algorithmus 6.1:	Trapezregel .....	161
Algorithmus 6.2:	Verallgemeinerte Trapezregel .....	161
Algorithmus 6.3:	Keplersche Faßregel .....	161
Algorithmus 6.4:	Simpsonsche Quadraturformel (Darstellung 1) .....	161
Algorithmus 6.5:	Simpsonsche Quadraturformel (Darstellung 2) .....	162
Algorithmus 6.6:	Quadratur nach <i>Newton/Cotes</i> .....	164
Algorithmus 6.7:	Quadratur nach <i>Gauß</i> .....	171
Algorithmus 7.1:	Koeffizienten einer Ausgleichskurve (Darstellung 1) .....	179
Algorithmus 7.2:	Koeffizienten einer Ausgleichskurve (Darstellung 2) .....	179
Algorithmus 7.3:	Ausgleichung durch eine ganze rationale Funktion... ..	181
Algorithmus 7.4:	Koeffizienten der Ausgleichsgeraden .....	181
Algorithmus 8.1:	Mittelwert und Streuung (Darstellung 1) .....	187
Algorithmus 8.2:	Mittelwert und Streuung (Darstellung 2) .....	187
Algorithmus 8.3:	Mittelwert und Streuung (Darstellung 3) .....	188
Algorithmus 8.4:	Kumulationsverfahren für äquidistante Merkmalswerte .....	188
Algorithmus 8.5:	Auswertung von Beobachtungen ungleicher Genauigkeit .....	190
Algorithmus 8.6:	Studentsches $t$ .....	192
Algorithmus 8.7:	$t$ -Test .....	192
Algorithmus 8.8:	$\chi^2$ -Test .....	195
Algorithmus 8.9:	$b = \frac{\sum_i x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_i x_i^2 - n \bar{x}^2}$ .....	198
Algorithmus 8.10:	$b = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}$ .....	199
Algorithmus 8.11:	$q = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \sum_i (y_i - \bar{y})^2}}$ .....	199
Algorithmus 8.12:	Mittelwert, Stichprobenstreuung, Regressionskoeffizient und Korrelationskoeffizient .....	200
Algorithmus 8.13:	Einfaktorielle Varianzanalyse .....	206

Algorithmus	8.14:	Zweifaktorielle Varianzanalyse mit einem Meßwert in jeder Zelle .....	212
Algorithmus	8.15:	Zweifaktorielle Varianzanalyse mit gleich vielen Wiederholungen in jeder Zelle .....	214
Algorithmus	8.16:	Zweifaktorielle Varianzanalyse mit unterschiedlicher Zellenbesetzung .....	221
Algorithmus	9.1:	Eulersche Gammafunktion .....	234
Algorithmus	9.2:	Approximation der Gammafunktion durch ein Polynom .....	235
Algorithmus	9.3:	Vollständiges elliptisches Integral 1. Gattung .....	241
Algorithmus	9.4:	Vollständiges elliptisches Integral 2. Gattung .....	241
Algorithmus	9.5:	Unvollständiges elliptisches Integral 1. Gattung .....	242
Algorithmus	9.6:	Approximation eines vollständigen elliptischen Integrals 1. Gattung durch ein Polynom .....	242
Algorithmus	9.7:	Approximation eines vollständigen elliptischen Integrals 2. Gattung durch ein Polynom .....	243
Algorithmus	9.8:	Fehlerintegral .....	246
Algorithmus	9.9:	Gebrochenrationale Approximation des Fehlerintegrals [9.5] .....	247
Algorithmus	9.10:	Bessel-Funktion $J_0(x)$ .....	257
Algorithmus	9.11:	Bessel-Funktion $J_1(x)$ .....	257
Algorithmus	9.12:	Modifizierte Bessel-Funktion $I_0(x)$ .....	258
Algorithmus	9.13:	Modifizierte Bessel-Funktion $I_1(x)$ .....	259
Algorithmus	9.14:	Bessel-Funktion $J_0(z)$ für $ \arg z  < \pi$ .....	260
Algorithmus	9.15:	Bessel-Funktion $J_1(z)$ für $ \arg z  < \pi$ .....	260
Algorithmus	9.16:	Bessel-Funktion $Y_0(x)$ .....	261
Algorithmus	9.17:	Bessel-Funktion $Y_1(x)$ .....	262
Algorithmus	9.18:	Bessel-Funktion $K_0(x)$ .....	263
Algorithmus	9.19:	Bessel-Funktion $K_1(x)$ .....	263
Algorithmus	10.1:	Kontraktionsverfahren (nichtlineares Gleichungssystem 1) .....	267
Algorithmus	10.2:	Gemischtes Newton-Verfahren (nichtlineares Gleichungssystem 2) .....	270
Algorithmus	10.3:	Gemischte Regula falsi (nichtlineares Gleichungssystem 3) .....	273
Algorithmus	10.4:	Parameterverfahren (nichtlineares Gleichungssystem 4) .....	275
Algorithmus	11.1:	Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung .....	283
Algorithmus	11.2:	Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung mit automatischer Schrittweitensteuerung .....	284
Algorithmus	11.3:	Trapezverfahren zur numerischen Integration von Differentialgleichungssystemen .....	285
Algorithmus	11.4:	Integration steifer Differentialgleichungssysteme .....	287
Algorithmus	11.5:	Adams-Verfahren zur numerischen Integration von Differentialgleichungssystemen .....	290
Algorithmus	11.6:	Runge-Kutta-Verfahren für Differentialgleichungssysteme 2. Ordnung .....	291

## Tafelverzeichnis

Tafel 2.4.	Ergebnisdruck zum Algorithmus 2.8 für ein Testbeispiel.....	94
Tafel 6.1.	Stützstellen und Koeffizienten für das Quadraturverfahren von <i>Gauß</i> [6.5].....	166
Tafel 9.1.	Werte der Funktionen $\Gamma(x)$ und $\ln \Gamma(x)$ für $x = 1 (0,005) 2$ [9.9] .....	228
Tafel 9.2.	Werte der Funktionen $\Gamma(x)$ , $1/\Gamma(x)$ und $\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)$ für $x = 1(1)100$	230
Tafel 9.3.	Wichtige Werte der Gammafunktion .....	232
Tafel 9.4.	Werte der Riemannschen Zetafunktion .....	234
Tafel 9.5.	Werte der vollständigen elliptischen Integrale.....	238
Tafel 9.6.	Koeffizienten der Reihenentwicklung von $F(k)$ .....	240
Tafel 9.7.	Koeffizienten für die Berechnung des vollständigen elliptischen Integrals $F(k)$ [9.3] .....	240
Tafel 9.8.	Koeffizienten für die Berechnung des vollständigen elliptischen Integrals $E(k)$ [9.3] .....	241
Tafel 9.9.	Fehlerintegral $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ und $\frac{d}{dx} \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \text{ für } x = 0 (0, 01) 2$ .....	244
Tafel 9.10.	Koeffizienten für die Berechnung des Fehlerintegrals [9.3] ....	246
Tafel 9.11.	Werteverlauf der Bessel-Funktionen $J_0(x)$ , $J_1(x)$ , $Y_0(x)$ und $Y_1(x)$ für $x = 0 (0, 1) 17,5$ .....	250
Tafel 9.12.	Werteverlauf der modifizierten Bessel-Funktionen $I_0(x)$ , $I_1(x)$ , $K_0(x)$ und $K_1(x)$ für $x = 0 (0, 1) 10$ und $x = 10 (0,2) 20$	254
Tafel 12.1.	Berechnung der Werte der Funktion $f(x) = \frac{x - \sin x}{x^3}$ .....	298
Tafel 12.2.	Wurzeln von $x^2 - 2px + 0,87$ nach den Formeln (12.13) und (12.14) (berechnet auf der GIER-Rechenanlage) .....	299

