Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

112

980

Lawrence Breen

Fonctions thêta et théorème du cube

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York Tokyo

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

980

Lawrence Breen

Fonctions thêta et théorème du cube

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York Tokyo 1983

Auteur
Lawrence Breen
Université de Rennes I
U.E.R. de Mathématiques et Informatique
Campus de Beaulieu, 35042-Rennes Cedex, France

AMS Subject Classifications (1980): 14 K 25

ISBN 3-540-12002-5 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo
ISBN 0-387-12002-5 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin Tokyo

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek
Breen, Lawrence: Fonctions thêta et théorème du cube / Lawrence Breen.
– Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1983.
(Lecture notes in mathematics; 980)
ISBN 3-540-12002-5 (Berlin, Heidelberg, New York)
ISBN 0-387-12002-5 (New York, Heidelberg, Berlin)
NE: GT

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2146/3140-543210

INTRODUCTION

Soient G une variété en groupes commutative, définie sur un corps algébriquement clos k, et D un diviseur de G algébriquement équivalent à zéro. Le classique théorème du carré affirme alors que l'image inverse de D par la loi de groupe $m_G : G\times G \longrightarrow G$ est linéairement équivalente au diviseur $p_1^*(D) + p_2^*(D)$ (où p_1 et p_2 désignent les projections de G^2 sur chacun de ses facteurs). Ce fait s'exprime également en considérant le torseur $L = \mathcal{O}(D)$ associé à D. Il signifie alors que le torseur induit $\Lambda(L) = m^*L \wedge p_1^*L^{-1} \wedge p_2^*L^{-1}$ sur G^2 est trivial, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme de torseurs $m_L : L\times L \longrightarrow L$ qui relève la loi de groupe de G. Dans le cas où G est une variété abélienne, l'absence de fonctions régulières non constantes sur G implique alors que m_L satisfait à de nombreuses propriétés de compatibilité, propriétés qui sont résumées par l'assertion suivante, due à Weil, et devenu de nos jours un lieu commun : il existe une section e_L de L au dessus de k telle que m_L définisse une loi de groupe commutative sur L, d'objet neutre e_L, pour laquelle L est une extension de G par G_m.

Cette forme renforcée du théorème du carré a de nombreuses conséquences pour la géométrie du torseur L. Rappelons-en quelques unes : supposons tout d'abord que le groupe G est un produit de deux groupes commutatifs K_1 et K_2. Dans ce cas, le théorème du carré implique que la structure de L est entièrement déterminée par sa restriction à chacun des facteurs K_i de G. Une autre conséquence en est la suivante : si $0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{i} G_2 \xrightarrow{\pi} G_3 \longrightarrow 0$ est une suite exacte de groupes (par exemple au sens de [33] VII § 1.1 ou bien, si l'on préfère, au sens des schémas en groupes commutatifs), alors le comportement des H-torseurs sur les groupes G_i munis d'une telle structure du carré relativement aux homomorphismes i et π se lit sur la suite exacte longue des $\mathrm{Ext}^1(-,G_m)$ induite par la suite exacte en question. Enfin, voici une dernière conséquence du fait que L est munie d'une loi de groupe m_L : celle-ci induit par itération, pour tout entier n, un morphisme n_L d'élévation à la puissance n dans L qui relève le morphisme $n_G : G \longrightarrow G$ d'élévation à la puissance n dans G, c'est-à-dire qu'elle définit un morphisme de torseurs $\psi_n : L^n \longrightarrow n_G^*(L)$. On déduit alors de l'associativité et de la commutativité de la loi m_L que ψ_n est un morphisme d'extensions, et que les ψ_n sont compatibles entre eux pour les différentes valeurs de n.

Si on suppose maintenant que G est groupe algébrique commutatif quelconque (ou même un S-schéma en groupes commutatifs), la discussion précédente montre quelle est la bonne formulation du théorème du carré pour un tel G_m-torseur L au-dessus de G : c'est la donnée d'une structure de groupe sur L, qui en fasse une extension commutative de G par G_m. Les énoncés que l'on vient de rappeler ne dépendaient en effet que de cette structure de groupe de L et restent donc valables dans cette situation plus générale. On prendra toutefois garde qu'ici la forme renforcée du théorème du carré qui vient d'être énoncée n'est plus une conséquence de sa forme naïve : une loi de composition m_L n'est en effet plus nécessairement associative et commutative, comme dans le cas où G est une variété abélienne.

La question se pose alors de savoir par quelle structure il convient de remplacer, dans le cas d'un torseur L associé à un diviseur quelconque D de G, la structure d'extension de G par G_m qui vient d'être imposée à L dans le cas où D est algébriquement équivalent à zéro. La réponse en est, dans les grandes lignes, bien connue : un torseur quelconque L ne satisfait certes plus au théorème du carré, mais il possède encore pratiquement toujours une remarquable propriété du même type, celle de satisfaire au théorème du cube. Rappelons-en l'énoncé ([22] § 6 preuve du corollaire 2) : soit $\Theta(L)$ le G_m-torseur sur G^3 défini par

(0.1) $$\Theta(L) = m_{123}^*L \wedge m_{12}^*L^{-1} \wedge m_{13}^*L^{-1} \wedge m_{23}^*L^{-1} \wedge p_1^*L \wedge p_2^*L \wedge p_3^*L$$

où m_{123} (resp. m_{ij}) : $G^3 \to G$ est la flèche définie par $m_{123}(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3$ (resp. $m_{ij}(x_1,x_2,x_3) = x_i + x_j$), et $p_i : G^3 \longrightarrow G$ désigne la projection de G^3 sur son ième facteur. Le théorème du cube affirme alors que ce torseur est trivial.

La situation est alors tout à fait analogue à celle décrite plus haut dans le cas du théorème du carré : dans le cas d'une variété abélienne, l'absence de fonctions régulières non constantes sur G implique qu'une section s du torseur $\Theta(L)$ satisfaira automatiquement à de nombreuses propriétés de compatibilité, qui devront être résumées par une forme renforcée du théorème du cube si l'on veut pouvoir les étendre au cas où G est un groupe commutatif quelconque. On commence, pour pouvoir appréhender cet énoncé renforcé, par passer du groupe de Picard de G à son groupe de Néron-Severi, c'est-à-dire qu'à partir d'un G_m-torseur $L = \mathcal{O}(D)$ sur G, on passe au torseur $\Lambda(L)$ sur G^2 décrit plus haut (ce qui revient, dans la terminologie classique, à décrire l'élément du groupe de Néron-Severi associé à L au moyen de la correspondance divisorielle symétrique définie par D). La formulation au niveau du groupe de Néron-Severi du théorème du cube renforcé s'énonce alors en termes de la notion de biextension, introduite par Mumford en [21], et donc l'étude a été reprise par Grothendieck dans [42] : c'est l'assertion que le torseur $\Lambda(L)$ peut être muni d'une structure de biextension de $G \times G$ par $\mathbb{G}_m$.

Le premier but de ce travail est de préciser comment s'énonce, au niveau du groupe de Picard de G, plutôt qu'après passage au groupe de Néron-Severi, le théorème du cube sous sa forme renforcée. Pour cela, il convient tout d'abord de raffiner la notion de biextension : en effet, si cette dernière correspondait bien à la notion de correspondance divisorielle, il nous faut examiner quel est l'analogue d'une correspondance divisorielle symétrique. On est ainsi amené à dire, pour deux schémas en groupes commutatifs G et H, ce qu'est une biextension symétrique de $G \times G$ par H. Ceci étant accompli, le théorème du cube renforcé s'obtient en examinant soigneusement quelles sont les conditions qu'impose à une section s du torseur $\Theta(L)$ le fait qu'elle définisse sur $\Lambda(L)$ une structure de biextension symétrique. On aboutit ainsi à la notion d'une structure du cube sur le torseur L, dont l'existence est la nouvelle forme du théorème du cube promise.

La catégorie $\mathrm{CUB}(G,H)$ des H-torseurs sur G possède d'aussi bonnes propriétés que la catégorie $\mathrm{EXT}(G,H)$ des extensions commutatives de G par H. La principale différence entre elles est la suivante : si cette dernière (qui décrit comme on l'a vu pour $H = G_m$ le comportement de $\mathrm{Pic}^o G$), est linéaire par rapport à G, la catégorie CUB(G,H) a un comportement quadratique en G, ce que reflète la propriété bien connue de Pic G. Ainsi, si G est un produit de deux groupes K_1 et K_2, la catégorie CUB(G,H) n'est plus décrite par sa restriction aux facteurs K_1 et K_2 de G, mais on dispose encore d'un énoncé tout aussi satisfaisant (voir le théorème 3.5). De la même manière, si $0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{i} G_2 \xrightarrow{\pi} G_3 \longrightarrow 0$ est une suite de schémas en groupes commutatifs, le comportement des objets des catégories $\mathrm{CUB}(G_j, H)$ par rapport aux morphismes i et π, peut s'analyser de manière aussi précise que celui des catégories $\mathrm{EXT}(G_j, H)$. En particulier, on obtient de cette manière un théorème de descente de la catégorie $\mathrm{CUB}(G_2, H)$ relativement à l'épimorphisme π (proposition 3.10). Il y a également lieu de mentionner l'usage qu'à récemment fait L. Moret-Bailly, dans un contexte assez voisin du nôtre, de la notion de structure du cube introduite ici : dans un travail en préparation, il se sert de cette notion pour étendre la construction à la Mumford d'une polarisation d'une variété abélienne au cas d'une variété abélienne dégénérante définie sur un corps de fonctions (ou un corps valué).

Le principal intérêt de la notion de structure du cube est qu'elle permet de clarifier le concept de fonction thêta associée à un diviseur sur un schéma en groupes commutatif G. Un tel lien entre la théorie des fonctions thêta et le théorème du cube avait déjà été perçu par Barsotti [1], et également, sous une forme assez voisine, par Néron [24], [25]. Le point de départ pour Barsotti (qui se place dans le cas transcendant) est l'observation suivante : soient A une variété abélienne définie sur $\mathbb{C}$, de revêtement universel V et de réseau associé Λ, et θ une fonction méromorphe sur V satisfaisant à l'équation fonctionnelle habituelle pour les fonctions thêta, c'est-à-dire que

$$\theta(v+\lambda) = F(v,\lambda)\theta(v) \qquad v \in V, \quad \lambda \in \Lambda \tag{0.1}$$

où F est une application de degré deux sur le groupe $V \times \Lambda$. Alors la fonction

$\Theta(v_1,v_2,v_3)$ sur V^3 définie par

(0.2) $$\Theta(v_1,v_2,v_3) = \frac{\theta(v_1+v_2+v_3)\,\theta(v_1)\,\theta(v_2)\,\theta(v_3)}{\theta(v_1+v_2)\,\theta(v_1+v_3)\,\theta(v_2+v_3)}$$

qui exprime le défaut de quadraticité de la fonction $\theta(v)$ est invariante sous l'action du réseau $\Lambda^3 \subset V^3$, c'est-à-dire qu'elle provient d'une fonction méromorphe $F(x,y,z)$ définie sur A^3, et réciproquement. Cette caractérisation des fonctions thêta a été utilisée dans un cadre algébrique par V. Cristante [6]. Ce dernier explicite notamment les conditions de cocycle auxquelles doit satisfaire la fonction $F(x,y,z)$ sur A^3. En outre, il associe de manière algébrique à un diviseur D de A des fonctions thêta (définies à une exponentielle quadratique près), qui sont des éléments d'un complété convenable de l'anneau des fonctions du groupe p-divisible associé à A.

C'est ce dernier travail qui a servi de point de départ au nôtre : les fonctions $F(x,y,z)$ satisfaisant aux conditions de cocycle qui viennent d'être mentionnées ne font en effet que décrire, en termes de fonctions rationnelles sur A, la structure du cube canonique dont est pourvue le G_m-torseur $L = \mathcal{O}(D)$. La notion de fonction thêta associé à D s'explicite maintenant de la manière suivante : soit $\pi : G' \longrightarrow G$ un homomorphisme ; se donner une fonction thêta sur G' associé à un diviseur D de G dont l'image inverse par π est définie équivaut alors à choisir une trivialisation de π^*L, compatible avec la structure du cube induite par celle de L. Cette traduction étant effectuée, l'existence de fonctions thêta associées à des diviseurs D sur un schéma en groupes G est garantie par l'assertion suivante (corollaire 4.6) : pour tout entier pair 2n, et tout objet L de $CUB(G,G_m)$, la restriction de l'image inverse $(2n)^*L$ de L à un sous-groupe approprié de G possède une trivialisation ; de plus, de telles trivialisations peuvent être choisies de manière compatibles lorsque n varie. A ce propos, mentionnons une étape de la démonstration de cette assertion qui est susceptible d'être d'un intérêt plus général : c'est la proposition 2.11, où sont étudiés les objets de $CUB(G,H)$ à biextension associée triviale. On montre qu'un tel objet n'est autre qu'une extension centrale de G par H.

Ceci fournit notamment une interprétation des extensions centrales, munies d'une section du torseur sous-jacent, pour lesquelles le 2-cocycle associé est une application bi-linéaire $G \times G \longrightarrow H$: ce sont celles qui définissent des objets triviaux de $CUB(G,H)$.

Pour aller plus loin, il est nécessaire d'étoffer la notion de structure du cube. La possibilité de le faire apparaît à l'examen de l'autre approche de la théorie algébrique des fonctions thêta, qui est due à Mumford [20]. Ce dernier montre en effet que l'on peut associer à un diviseur symétrique D sur une variété abélienne A (c'est-à-dire telle que l'image inverse i^*D de D par la loi d'inverse du groupe A est linéairement équivalente à D) une fonction thêta canonique (et non plus une fonction définie seulement à une exponentielle quadratique près). Nous reprenons ici cette question dans le cas d'un schéma en groupes commutatif quelconque G. Il nous faut tout d'abord dire quelle est la bonne notion de structure du cube pour un G_m-torseur L sur G muni d'un isomorphisme de symétrie $\lambda : i^*L \longrightarrow L$. On requiert évidemment que L soit muni d'une structure du cube au sens précédent, et que le morphisme λ soit compatible aux structures du cube (celle de sa source étant induite par la structure donnée sur L), mais ceci se révèle insuffisant, et on est amené à introduire une condition plus forte sur λ. On aboutit alors à la notion de Σ-structure sur un H-torseur symétrique L, la catégorie $\Sigma(G,H)$ de ces objets a des propriétés tout à fait similaires à celles mentionnées plus haut pour la catégorie $CUB(G,H)$. L'existence de fonctions thêta canoniques est maintenant une conséquence du théorème 6.4 qui affirme que pour tout objet L de $\Sigma(G,H)$ et pour tout entier positif n, on peut trivialiser canoniquement $(2n)^*L$ au-dessus d'un sous-groupe approprié de G, de manière compatible à la Σ-structure induite par celle de L. On observera que les fonctions thêta ainsi obtenues l'ont été sans faire usage de groupes de Heisenberg et de leurs représentations, dont le rôle est omniprésent dans la construction décrite par Mumford (par contre, il n'est fait explicitement mention dans cette dernière ni du théorème du cube, ni de la notion de biextension : l'invention par Mumford des biextensions est du reste postérieure à son article [20]). Signalons à ce propos l'une des principales lacunes de notre théorie par rapport à celle de Mumford : nous n'abordons pas ici l'étude des relations quartiques de style Riemann entre les fonctions thêta considérées.

Les trois derniers chapitres de ce travail sont de nature accessoire, dans la mesure où l'on peut considérer le théorème 6.4 comme principal résultat. Ils illustrent, chacun à leur manière, les notions de structure du cube et de Σ-structure. Ainsi, le chapitre 7 poursuit l'examen, abordé dans la proposition 5.11, des relations entre la notion de structure du cube, ou de Σ-structure, et celle de biextension symétrique : de manière précise, on y étudie sous quelles conditions une biextension symétrique E de $G \times G$ par H provient d'un objet de $CUB(G,H)$. Il est bien connu que c'est toujours le cas lorsque G est une variété abélienne et $H = G_m$. Dans la situation générale, ce sera encore presque toujours vrai, mais pour une raison assez subtile : on associe en effet à la biextension E un champ de Picard strict d'invariants G et H, dont la trivialisation fournit l'objet du cube recherché. Par ailleurs, une variante de cette étude permet de dire sous quelles conditions E provient d'un objet de $\Sigma(G,H)$; cette question n'avait apparemment pas été étudiée jusqu'ici, même dans le cas où G est une variété abélienne et $H = G_m$.

Le chapitre 8 est consacré à une interprétation des notions de biextension symétrique, de structure du cube et de Σ-structure en termes d'algèbre homotopique, calquée sur l'interprétation correspondante qu'avait donnée Grothendieck des notions d'extension et de biextension. Son caractère abstrait risque de rebuter le lecteur, d'autant plus que sa position tardive dans cet article illustre le fait que la lecture de son contenu n'est pas indispensable à la démonstration des autres résultats obtenus ici. C'est pourquoi il convient d'attirer l'attention de celui-ci sur l'importance que revêt ce chapitre du point de vue conceptuel. On y a mis en application le principe de Grothendieck, expliqué dans [13] et [42] VII 3.3, et repris de manière succincte dans [41] XVIII suivant lequel, chaque fois qu'un objet A de la catégorie dérivée d'un topos T admet une représentation explicite au moyen d'un complexe K. , dont chaque composante K_i est une somme directe de termes de la forme $\mathbb{Z}[X]$ pour des objets X de T, alors les tronqués de l'objet <u>Rhom</u>(A,B) de la catégorie dérivée admettent, pour tout groupe abélien B de T, une description géométrique tout à fait explicite. Dans le cas qui nous concerne, ce sont la proposition 8.4 et le théorème 8.9 qui expliquent quels sont les objets de la catégorie dérivée correspondant aux objets géométriques introduits ci-dessus. Ce dictionnaire suggère alors la plupart des énoncés de ce texte, ainsi que, dans une certaine mesure, leur démonstration (voir à ce propos les remarques 8.10 et 9.6 iii)). Il apporte notamment la certitude que les notions de structure du cube et de Σ-structures introduites ici sont les variantes optimales du théorème du cube usuel, en ce sens qu'on a pas oublié, dans leur définition, un quelconque élément de structure supplémentaire.

Enfin, le chapitre 9 est consacré à une variante du théorème du coefficient universel par lequel Grothendieck explique en [42] VIII 2.3, quelle est la signification homologique du classique "e_n-pairing" de Weil. Ici, c'est l'invariant quadratique e_*^L associé par Mumford à la donnée d'un faisceau inversible symétrique sur une variété abélienne qui est interprété de manière homologique. Pour cela, il faut calculer des foncteurs dérivés du foncteur $\Gamma_2(\ )$, composante de degré deux de l'algèbre à puissances divisées. Ces foncteurs dérivés sont équivalents à des foncteurs connus des topologues (voir la remarque 9.6. i ci-dessous), mais qui n'avaient guère fait l'objet d'une étude détaillée ; c'est pourquoi il a été nécessaire d'en reprendre ici le calcul d'une manière directe.

Cette recherche a été effectuée dans le cadre du laboratoire associé au C.N.R.S. n° 305 à l'Université de Rennes. Je tiens également à remercier ici l'Université du Michigan (Ann Arbor) pour l'accueil que j'ai reçu lors d'une visite. Les bonnes conditions de travail dont j'y ai disposé m'ont été très utiles pour mener à bien une partie de son élaboration. La frappe du manuscrit a été effectuée à Rennes par Mme Y. BRUNEL. Je lui suis reconnaissant pour sa patience et pour le soin qu'elle a mis à l'exécution de ce travail.

J'ai le plaisir de remercier ici A.K. BOUSFIELD pour son aide concernant les foncteurs dérivés de foncteurs non-additifs et G. CHUDNOVSKI, L. MORET-BAILLY et P. NORMAN pour des discussions et de la correspondance sur divers aspects de la théorie des fonctions thêta. Les commentaires de O. GABBER, lors d'une série d'exposés oraux, m'ont par ailleurs permis d'éviter certains écueils. La théorie présentée ici prend, dans une certaine mesure le contre-pied de celle de D. MUMFORD sur le même sujet. Je lui suis reconnaissant pour l'aide et les encouragements qu'il m'a prodigués pendant son élaboration. Enfin, c'est à diverses étapes de la préparation de ce travail que j'ai eu d'amicales et stimulantes conversations avec V. CRISTANTE.

TABLE DES MATIÈRES

§ 1. Biextensions symétriques.

La notion de biextension a été introduite par Mumford dans [21], qui demeure la meilleure référence pour un lecteur désireux de se familiariser avec cette notion. La description moins imagée de [42] VII est celle qui nous servira de point de départ. Aussi commençons nous, pour fixer les notations, par la passer en revue. Nous introduisons ensuite la notion de biextension symétrique, et en étudions diverses propriétés.

La notation suivante sera employée dans tout ce texte : pour tout groupe abélien P d'un topos T et toute partie I d'un ensemble fini E, $p_{E,I}$ (ou plutôt p_I) désigne la projection canonique $P^E \longrightarrow P^I$, alors que $p = p_\emptyset$ est la projection de P^E sur l'objet final de T. De même, s_I désignera la section canonique de p_I, mais on notera le plus souvent e, plutôt que $s = s_\emptyset$ l'élément neutre de P^E. Enfin, si $m = m_P$ désigne la loi de groupe de P et ses itérés, $m_I : P^E \longrightarrow P$ est la loi d'addition partielle définie par $m_I = m \circ p_I$.

1.1. Soient P,Q,H trois groupes abéliens d'un $\underline{U}$-topos T. Une biextension de (P,Q) par H est définie par la donnée d'un H-torseur E sur $P \times Q$ et de sections des H-torseurs induits $(m_P \times 1)^* E \wedge p_{13}^* E^{-1} \wedge p_{23}^* E^{-1}$ et $(1 \times m_Q)^* E \wedge p_{12}^* E^{-1} \wedge p_{13}^* E^{-1}$ sur $P \times P \times Q$ et $P \times Q \times Q$ respectivement. Il sera commode, ici et dans tout ce qui suit, de désigner les torseurs, et les morphismes entre eux, en termes de leur restriction au-dessus d'un point général de la base. Ainsi désigne-t-on par

$$c_{p;q,q'} : E_{p,q} E_{p,q'} \longrightarrow E_{p,q+q'} \tag{1.1.1}$$

et par

$$c_{p,p';q} : E_{p,q} E_{p',q} \longrightarrow E_{p+p',q} \tag{1.1.2}$$

les lois de composition partielles $\underset{1}{+}$ et $\underset{2}{+}$ sur E que ces sections définissent. Elles sont astreintes à satisfaire à des conditions d'associativité, qui s'énoncent par la commutativité des diagrammes de torseurs suivants, que nous appellerons respectivement $\nabla_{p;q,q',q''}$ et $\nabla_{p,p',p'';q}$:

(1.1.3)
$$\begin{tikzcd}
E_{p,q}E_{p,q'}E_{p,q''} \arrow[r, "c_{p;q,q'}\wedge 1"] \arrow[d, "1\wedge c_{p;q',q''}"'] & E_{p,q+q'}E_{p,q''} \arrow[d, "c_{p;q+q',q''}"] \\
E_{p,q}E_{p,q'+q''} \arrow[r, "c_{p;q,q'+q''}"'] & E_{p,q+q'+q''}
\end{tikzcd}$$

(1.1.4)
$$\begin{tikzcd}
E_{p,q}E_{p',q}E_{p'',q} \arrow[r, "c_{p,p';q}\wedge 1"] \arrow[d, "1\wedge c_{p',p'';q}"'] & E_{p+p',q}E_{p'',q} \arrow[d, "c_{p+p',p'';q}"] \\
E_{p,q}E_{p'+p'',q} \arrow[r, "c_{p,p'+p'';q}"'] & E_{p+p'+p'',q}
\end{tikzcd}$$.

Les lois (1.1) et (1.2) doivent également vérifier des conditions de commutativité, qui s'expriment par la commutativité des diagrammes $T_{p,p';q}$ et $T_{p;q,q'}$ suivants, dans lesquels la flèche verticale de gauche est l'isomorphisme de symétrique canonique

(1.1.5)
$$\begin{tikzcd}
E_{p',q}E_{p,q} \arrow[r, "c_{p',p;q}"] \arrow[d] & E_{p'+p,q} \arrow[d, equal] \\
E_{p,q}E_{p',q} \arrow[r, "c_{p,p';q}"'] & E_{p+p',q}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E_{p,q'}E_{p,q} \arrow[r, "c_{p;q',q}"] \arrow[d] & E_{p,q'+q} \arrow[d, equal] \\
E_{p,q}E_{p,q'} \arrow[r, "c_{p;q,q'}"'] & E_{p,q+q'}
\end{tikzcd}$$

Enfin, la compatibilité entre elles de ces deux lois de composition est exprimée par la commutativité du diagramme $S_{p,p';q,q'}$ suivant, dans lequel la flèche oblique est l'isomorphisme canonique de symétrie :

(1.1.6)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & E_{p,q}E_{p,q'}E_{p',q}E_{p',q'} \arrow[rr, "c_{p;q,q'}\wedge c_{p';q,q'}"] & & E_{p,q+q'}E_{p',q+q'} \arrow[dd, "c_{p,p';q+q'}"'] \\
E_{p,q}E_{p',q}E_{p,q'}E_{p',q'} \arrow[ur] \arrow[d, "c_{p,p';q}\wedge c_{p,p';q'}"'] & & & \\
E_{p+p',q}E_{p+p',q'} \arrow[rrr, "c_{p+p';q,q'}"'] & & & E_{p+p',q'+q'}
\end{tikzcd}$$
.

Un morphisme de biextensions $f : E \longrightarrow F$ est un morphisme entre les H-torseurs sur $P \times Q$ sous-jacents, qui est compatible aux lois de groupes partielles, c'est-à-dire tel que les diagrammes $\mathfrak{D}(f)_{p,p';q}$ et $\mathfrak{D}(f)_{p;q,q'}$ suivants

(1.1.7)
$$\begin{tikzcd}
E_{p,q}E_{p',q} \arrow[r, "f\wedge f"] \arrow[d, "c_{p,p';q}"'] & F_{p,q}F_{p',q} \arrow[d, "c_{p,p';q}"] \\
E_{p+p',q} \arrow[r, "f"] & F_{p+p',q}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F_{p,q}E_{p,q'} \arrow[r, "f\wedge f"] \arrow[d, "c_{p;q,q'}"'] & F_{p,q}F_{p,q'} \arrow[d, "c_{p;q,q'}"] \\
E_{p,q+q'} \arrow[r, "f"] & F_{p,q+q'}
\end{tikzcd}$$

soient commutatifs.

De telles biextensions définissent une catégorie de Picard stricte BIEXT(P,Q;H) (au sens de [41]), pour laquelle l'objet neutre est le H-torseur trivial $\underline{0}$ sur $P \times Q$, muni des lois de groupes partielles provenant des sections $c_{p,p';q}$ et $c_{p;q,q'}$ induites sur les torseurs correspondants par la section canonique de $\underline{0}$. On appelle trivialisation d'une biextension E (ou encore trivialisation du torseur E compatible à la structure de biextension) la donnée d'un morphisme de biextensions $\underline{0} \longrightarrow E$, c'est-à-dire d'une section $t : P \times Q \longrightarrow E$ du torseur sous-jacent à E telle que

(1.1.8) $$c_{p,p';q} = t(p+p',q)t(p,q)^{-1}t(p',q)^{-1}$$

(1.1.9) $$c_{p;q,q'} = t(p,q+q')t(p,q)^{-1}t(p,q')^{-1} .$$

Ainsi, la donnée d'un automorphisme de la biextension triviale $\underline{0}$ (ou encore d'une biextension quelconque E de P,Q par H), équivaut à celle d'un morphisme bilinéaire $P \times Q \longrightarrow H$.

Si maintenant on se localise au-dessus d'un objet variable S du topos T, on obtient ainsi un champ de Picard strict $\underline{\mathrm{BIEXT}}(P,Q;H)$ dont la catégorie fibre au-dessus de S est la catégorie $\mathrm{BIEXT}(P_S, Q_S; H_S)$ (voir [42] VII 2.8), champ dont les invariants sont respectivement le faisceau $\underline{\mathrm{Biext}}^1(P,Q;H)$ des classes locales d'isomorphismes de biextensions de P, Q par H est le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}(P \otimes Q\ ;\ H)$ des applications bilinéaires de $P \times Q$ vers H.

1.2. Il est élémentaire que la catégorie $\mathrm{BIEXT}(P,Q;H)$ se comporte de manière additive par rapport à la variable H, puisque c'est le cas des structures qui interviennent dans sa définition. Plus intéressant est le fait, mentionné en [42] VII 2.6, que cette catégorie est additive par rapport à chacune des variables P et Q. L'additivité par rapport à P s'exprime ainsi : pour tout objet E de $\mathrm{BIEXT}(P,Q;H)$, le morphisme de H-torseurs sur $P \times P \times Q$

$$(1.2.1) \qquad (p_1 \times 1)^*E \wedge (p_2 \times 1)^*E \longrightarrow (m_p \times 1)^*E$$

défini par la loi partielle $\underset{2}{+}$ est un morphisme de biextensions. La commutativité du premier diagramme (1.1.7) pour ce morphisme résulte de l'associativité et de la commutativité de $\underset{2}{+}$ (par le raisonnement qui montre qu'une loi de groupe commutative est un homomorphisme), tandis que celle du second diagramme (1.1.7) provient de la compatibilité de $\underset{2}{+}$ à $\underset{1}{+}$.

On en déduit, en considérant pour toute paire d'homomorphismes $f,g : P' \longrightarrow P$, l'image inverse de (1.2.1) par la flèche $P' \times Q \longrightarrow P \times P \times Q$ qui envoie (p',q) vers $(f(p'),g(p'),q)$ un morphisme

$$(1.2.2) \qquad (f \times 1)^*E \wedge (g \times 1)^*E \longrightarrow ((f+g) \times 1)^*E$$

dans $\mathrm{BIEXT}(P',Q;H)$, ce qui exprime bien l'additivité de $\mathrm{BIEXT}(P,Q;H)$ par rapport à la variable P. De la même façon, on déduit du morphisme similaire à (1.2.1) défini