de Gruyter Lehrbuch

W DE G

Martin Barner
Friedrich Flohr

Analysis I

2. Auflage

de Gruyter Lehrbuch
Barner/Flohr · Analysis I

Martin Barner · Friedrich Flohr

Analysis I

2., verbesserte Auflage

W DE G

Walter de Gruyter · Berlin · New York 1983

Dr. *Martin Barner*
Dr. *Friedrich Flohr*
Professoren der Mathematischen Fakultät der Albert-Ludwigs-Universität in Freiburg im Breisgau.

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Barner, Martin:
Analysis / Martin Barner ; Friedrich Flohr. –
Berlin ; New York : de Gruyter
(De-Gruyter-Lehrbuch)
NE: Flohr, Friedrich:
1.–2., verb. Aufl. – 1983.
ISBN 3-11-009503-3

Vorwort zur 1. Auflage

Diese Darstellung der Analysis ist aus Vorlesungen entstanden, die die Autoren an der Universität Freibutg i. Br. mehrfach gehalten haben. Es handelte sich dabei um eine dreisemestrige Einführung in die reelle Analysis. Der vorliegende erste Band enthält die Differential- und Integralrechnung der Funktionen einer reellen Variablen; die Theorie der Funktionen mehrerer reeller Variablen soll im zweiten Band dargestellt werden.

Im ersten Band haben wir uns auf den Integralbegriff für Regelfunktionen beschränkt; das Lebesguesche Integral wird bei den Funktionen mehrerer Variablen eingeführt. Für die klassischen Anwendungen der Integralrechnung kommt man mit dem Bereich der Regelfunktionen aus (dieser ist etwas enger als der Bereich der Riemann-integrierbaren Funktionen, der in der Lehrbuchliteratur sonst bevorzugt wird).

Wir haben uns bemüht, den Aufwand an Begriffen gering zu halten und behutsam an abstraktere Begriffsbildungen heranzuführen. Die zahlreichen Aufgaben stehen in enger Verbindung zum Text, so daß wir hoffen, daß dieses Buch auch zum Selbststudium geeignet ist.

Danken möchten wir auch an dieser Stelle Frau A. Helbling für ihren unermüdlichen Einsatz bei der Herstellung des Manuskriptes, Herrn Dr. V. Drumm für seine große Hilfe bei den Korrekturarbeiten und dem Verlag für gute Zusammenarbeit.

Freiburg i. Br., August 1974

M. Barner, F. Flohr

Vorwort zur 2. Auflage

Die zweite Auflage der „Analysis I“ erscheint zugleich mit der „Analysis II“. Der Text wurde durchgesehen und verbessert, das Sachverzeichnis erweitert und es wurde ein Namensverzeichnis sowie eine Zeittafel hinzugefügt.

Freiburg i. Br., August 1982

M. Barner, F. Flohr

Inhalt

1 Die reellen Zahlen

Grundlegend für die Analysis sind die reellen Zahlen. Im Dezimalsystem kann jede reelle Zahl durch eine periodische oder nichtperiodische „Dezimalentwicklung" dargestellt werden; so hat man zum Beispiel:

$$\frac{10}{7} = 1,428571\,428571\ldots$$
$$\sqrt{2} = 1,4142135\ldots$$
$$\pi = 3,1415926\ldots.$$

Es liegt daher nahe, die reellen Zahlen direkt durch „Dezimalentwicklungen" einzuführen. Dieses Vorgehen führt aber rasch auf Probleme, deren Beantwortung keineswegs einfach ist. So ist die Bedeutung der drei Punkte in den Beispielen nicht ohne weiteres ersichtlich. Im ersten Fall ist es zwar einfach, für die drei Punkte am Ende der geschriebenen Ziffernfolge die richtige Deutung zu finden; die Ziffernfolgen, die zu $\sqrt{2}$ bzw. zu π gehören, sind jedoch nicht periodisch und nur Schritt für Schritt zu bestimmen.
Will man etwa für die Summe oder das Produkt zweier Zahlen die Dezimalentwicklung finden, so treten neue Schwierigkeiten auf. Auch die Bevorzugung der dezimalen Schreibweise möchte man möglichst vermeiden, weil die Zahl Zehn aus mathematischer Sicht nicht ausgezeichnet ist.
Es wäre ermüdend, wollten wir uns zu Beginn gleich mit den angedeuteten Problemen auseinandersetzen. Wir gehen deshalb folgenden Weg, der sich auch in anderen Situationen in der Mathematik vielfach bewährt hat: Wir stellen ein System von Gesetzen zusammen, die von den reellen Zahlen – was immer das sein mag – erfüllt werden und auf die allein bei den Beweisen zurückgegriffen wird. Die ausgewählten Gesetze nennt man in diesem Zusammenhang *Axiome*; die Axiome zusammen bilden ein *Axiomensystem* für die reellen Zahlen.
Wenn wir, von dieser Basis ausgehend, unsere Untersuchungen weit genug vorangetrieben haben, werden wir das Problem der Dezimalentwicklung der reellen Zahlen wieder aufgreifen und die genannten Schwierigkeiten bewältigen können.

1.1 Körperaxiome

Hier werden solche Gesetze aufgezählt, die zur Begründung des „Rechnens“, d.h. der Addition, der Subtraktion, der Multiplikation und der Division, ausreichen. In den Axiomen kommen zunächst nur Addition und Multiplikation vor; Subtraktion und Division werden später definiert.

Wir nehmen folgendes an:

Je zwei reellen Zahlen a, b ist eindeutig eine reelle Zahl $a+b$, ihre *Summe*, zugeordnet. Ebenso gehört zu a, b eindeutig eine reelle Zahl $a \cdot b$, das *Produkt* von a und b. Für diese Zuordnungen (genannt *Addition* bzw. *Multiplikation*) gelten die folgenden Gesetze:

Körperaxiome			
(1.a)	Addition	$a+b=b+a$	Kommutativgesetz
(1.b)		$a+(b+c)=(a+b)+c$	Assoziativgesetz
(1.c)		Es gibt genau eine Zahl 0, so daß für alle a gilt: $a+0=a$	Existenz und Eindeutigkeit der 0
(1.d)		Zu jedem a gibt es genau ein x, so daß gilt: $a+x=0$	Eindeutige Lösbarkeit der Gleichung $a+x=0$
(2.a)	Multiplikation	$a \cdot b=b \cdot a$	Kommutativgesetz
(2.b)		$a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$	Assoziativgesetz
(2.c)		Es gibt genau eine von 0 verschiedene Zahl 1, so daß für alle a gilt: $a \cdot 1=a$	Existenz und Eindeutigkeit der 1
(2.d)		Zu jedem $a \neq 0$ gibt es genau ein x, so daß gilt: $a \cdot x=1$	Eindeutige Lösbarkeit der Gleichung $a \cdot x=1$ für $a \neq 0$
(3)		$a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$	Distributivgesetz

Dabei bedeutet etwa das Kommutativgesetz (1.a): Für alle reellen Zahlen a, b gilt $a+b=b+a$. Entsprechend sind die Gesetze (1.b), (2.a), (2.b) und (3) zu verstehen.

Für das Produkt $a \cdot b$ werden wir meistens die kürzere Schreibweise ab verwenden.

Die beiden Assoziativgesetze (1.b) und (2.b) ermöglichen es, Klammern wegzulassen:

$$a + (b + c) = (a + b) + c =: a + b + c$$
$$a(bc) = (ab)c =: abc$$

Hierbei haben wir das mit einem Doppelpunkt versehene Gleichheitszeichen benutzt, um darauf hinzuweisen, daß es sich um Definitionen handelt. So bedeutet $u := v$, daß u definitionsgemäß gleich v ist; schreibt man diese Definitionsgleichung in der Form $v =: u$, so liest man etwa: v wird abgekürzt durch u.

Wir wollen hier nur an einigen wenigen Beispielen zeigen, wie aus den Körperaxiomen bekannte Aussagen über reelle Zahlen formal hergeleitet werden können. Für eine ausführliche Darstellung verweisen wir auf die Lehrbücher der Algebra.

Beispiele:

1) Bevor wir die binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ beweisen, erinnern wir an die Definitionen

$$2 := 1 + 1, \qquad (a+b)^2 := (a+b)(a+b), \qquad a^2 := aa, \qquad b^2 := bb.$$

Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned}
(a+b)(a+b) &= (a+b)a + (a+b)b && \text{nach Axiom (3)}\\
&= a(a+b) + b(a+b) && \text{nach Axiom (2.a)}\\
&= (aa+ab) + (ba+bb) && \text{nach Axiom (3)}\\
&= \big((aa+ab)+ba\big) + bb && \text{nach Axiom (1.b)}\\
&= \big(aa+(ab+ab)\big) + bb && \text{nach Axiom (1.b) und (2.a)}\\
&= \big(aa+ab(1+1)\big) + bb && \text{nach Axiom (2.c) und (3)}
\end{aligned}$$

Aufgrund unserer Definitionen und nach nochmaliger Anwendung des Kommutativgesetzes (2.a) können wir das Ergebnis in der gewohnten Form

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

schreiben.

2) Nach (1.d) besitzt die Gleichung $a + x = 0$ für jede reelle Zahl a genau eine Lösung, die wir – wie üblich – mit $(-a)$ bezeichnen. Es gilt also

$$a + (-a) = 0.$$

Wir zeigen, daß für alle reellen Zahlen a und b die Gleichung

$$a + x = b$$

eine und nur eine Lösung besitzt.

Addition von $(-a)$ ergibt nämlich (auf die Reihenfolge der Summanden brauchen wir wegen (1.a) nicht zu achten)

$$x = b + (-a),$$

und diese Zahl x erfüllt auch wirklich die vorgegebene Gleichung:

$$a + \big(b + (-a)\big) = \big(a + (-a)\big) + b = b.$$

Man schreibt kürzer

$$b + (-a) =: b - a$$

und nennt diese Zahl *Differenz*.
Damit ist die *Subtraktion* auf Grund der Körperaxiome definiert.

Bemerkung: Man beachte, daß das Minuszeichen in zwei verschiedenen Bedeutungen verwendet wird: $(-a)$ ist eine reelle Zahl, die der reellen Zahl a nach (1.d) eindeutig zugeordnet ist. Die Differenz $b-a$ ist dagegen für je zwei reelle Zahlen a, b als Summe von b und $(-a)$ erklärt.

Die Überlegungen aus Beispiel 2) lassen sich entsprechend auch für die Multiplikation durchführen. Wir notieren als Ergebnis:
Nach (2.d) gibt es zu jedem $a \neq 0$ genau eine Zahl a^{-1}, so daß gilt $aa^{-1} = 1$.
Statt a^{-1} wird auch $\frac{1}{a}$ geschrieben.
Für $a \neq 0$ besitzt die Gleichung

$$ax = b$$

genau eine Lösung $x = ba^{-1} =: \frac{b}{a}$; man nennt diese Zahl *Quotient*. Damit ist die *Division* für $a \neq 0$ erklärt.

Aufgabe: Man führe die Beweise analog zu Beispiel 2) durch.

3) Für jedes a gilt: $a \cdot 0 = 0$.
Nach Axiom (1.a) und (1.c) hat man $c = 0 + c$. Setzt man $b = 0$ in Axiom (3), so folgt

$$ac = a(0 + c) = a \cdot 0 + ac.$$

Addition von $(-ac)$ auf beiden Seiten der Gleichung liefert die Behauptung. Wir haben also bewiesen:

Ist in einem Produkt mindestens ein Faktor 0, *so ist das Produkt* 0.

Dieser Satz läßt sich umkehren. Sei nämlich $ab=0$ und $a \neq 0$, so ergibt sich:

$$0 = \frac{1}{a}(ab) = \left(\frac{1}{a}a\right)b = 1 \cdot b = b.$$

(Für $a=0$ braucht nichts mehr bewiesen zu werden!)

4) Schließlich zeigen wir noch

$$(-a)b = (-ab).$$

Die Zahl $(-ab)$ ist nach Definition die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung

$$ab + x = 0.$$

Andererseits rechnet man nach, daß die Zahl $(-a)b$ auch Lösung dieser Gleichung ist:

$$ab + (-a)b = \big(a + (-a)\big) \cdot b = 0 \cdot b = 0.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung muß also gelten:

$$(-a)b = (-ab).$$

Aufgaben

1. Man beweise die binomische Formel für den Exponenten 3 und gebe bei jedem Beweisschritt genau an, welches Körperaxiom benutzt wird.
2. Man zeige, daß gilt:

$$\big((a+b)+c\big)+d = (a+b)+(c+d) = \big(a+(b+c)\big)+d =$$
$$a+\big((b+c)+d\big) = a+\big(b+(c+d)\big).$$

   Für diese Zahl schreibt man kurz: $a+b+c+d$. Wieviel Möglichkeiten der Beklammerung gibt es bei 5 Summanden?
3. Man zeige, daß $\big(-(-a)\big) = a$ gilt.
4. Im Anschluß an Beispiel 4) beweise man

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

5. Man zeige, daß für jedes $a \neq 0$ gilt:
$$(-a)^{-1} = -(a^{-1}).$$

6. Aus den Körperaxiomen lassen sich die Regeln der „Bruchrechnung" herleiten. Unter der (notwendigen) Voraussetzung $b \neq 0$ und $d \neq 0$ beweise man die folgenden Aussagen:

(1) Aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ folgt $ad = bc$ und umgekehrt folgt aus $ad = bc$ auch $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

(2) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$

(3) $\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

(4) $\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$, falls auch $c \neq 0$.

1.2 Anordnungsaxiome

Hier handelt es sich darum, eine tragfähige Basis für das Umgehen mit der *Kleinerbeziehung*, die durch das Zeichen $<$ symbolisiert wird, zu legen.

Wir nehmen an, daß folgendes gilt:

Sind a, b irgend zwei reelle Zahlen, so steht fest, ob $a < b$ richtig oder falsch ist. Für die *Kleinerbeziehung* gelten die folgenden Gesetze:

Anordnungsaxiome		
(1)	Entweder gilt $a = b$ oder $a < b$ oder $b < a$	Trichotomiegesetz
(2)	Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$	Transitivgesetz
(3)	Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$	Monotoniegesetz der Addition
(4)	Aus $a < b$ und $0 < c$ folgt $ac < bc$	Monotoniegesetz der Multiplikation

Die Zahl 0 ist durch die Körperaxiome ausgezeichnet. Gilt $0 < a$, so heißt a *positiv*; gilt $a < 0$, so heißt a *negativ*.
Eine Beziehung der Art $a < b$ nennt man *Ungleichung*, in manchen Zusammenhängen auch *Abschätzung*.

Wir zeigen an einigen Beispielen, wie aus den Anordnungsaxiomen – zusammen mit den Körperaxiomen – Folgerungen gezogen werden können.

Beispiele:

1) Aus $a<b$ und $c<d$ folgt $a+c<b+d$.

Beweis: Nach Axiom (3) folgt aus $a<b$

$$a+c<b+c$$

und aus $c<d$

$$b+c<b+d.$$

Nach Axiom (2) folgt weiter

$$a+c<b+d.$$

2) Nach Axiom (4) gilt mit $a<b$ auch $ac<bc$, falls c positiv ist. Was geschieht bei Multiplikation mit einer negativen Zahl? Wir behaupten:

$$\text{Aus } a<b \text{ und } c<0 \text{ folgt } bc<ac.$$

Beweis: Zunächst überlegt man sich, daß $c<0$ gleichbedeutend ist mit $0<(-c)$. Nach Axiom (3) ergibt nämlich Addition von $(-c)$ zur Ungleichung $c<0$, die nach Voraussetzung gilt:

$$(-c)+c<(-c), \quad \text{d.h.} \quad 0<(-c).$$

Umgekehrt folgt aus $0<(-c)$ durch Addition von c:

$$c<(-c)+c, \quad \text{d.h.} \quad c<0.$$

Wir können deshalb die Voraussetzung unseres Satzes auch in der Form $a<b$ und $0<(-c)$ schreiben und damit Axiom (4) anwenden; es folgt also

$$a\cdot(-c)<b\cdot(-c).$$

Nach Beispiel 4) von S.13 bedeutet das

$$(-ac)<(-bc).$$

Addition von $ac+bc$ ergibt (nach Axiom (3)) die Behauptung.

3) Für jedes $a \neq 0$ gilt $0<a^2$.

Beweis: Wir unterscheiden die beiden Fälle $0<a$ und $a<0$. Im ersten Fall folgt die Behauptung unmittelbar aus Axiom (4). Im zweiten Fall kann man – wie in Beispiel 2) gezeigt wurde – die Voraussetzung in der Form $0<(-a)$ schreiben, so daß man wieder Axiom (4) anwenden kann:

$$0<(-a)^2.$$

Wegen $(-a)^2=a^2$ (vgl. Aufg. 4 auf S. 13) folgt die Behauptung. Speziell erhalten wir für $a=1$ die Aussage:

$$0<1.$$

4) Aus $0<a$ folgt $0<\frac{1}{a}$.

Beweis: $\frac{1}{a}=0$ kann nicht gelten, weil $a\cdot\frac{1}{a}=1\neq 0$. Wir müssen somit nur noch die Möglichkeit $\frac{1}{a}<0$ ausschließen. Nach Axiom (4) würde aber aus $\frac{1}{a}<0$ und $0<a$ folgen:

$$1<0,$$

was nach Beispiel 3) nicht richtig sein kann.

Aufgabe: Man zeige entsprechend: Aus $a<0$ folgt $\frac{1}{a}<0$.

5) Aus $a<b$ und $0<ab$ folgt $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$.

Aus $a<b$ und $ab<0$ folgt $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

Beweis: Gilt $0<ab$, so auch $0<\frac{1}{ab}$ (nach Beispiel 4)). Axiom (4) ergibt dann

$$a\cdot\frac{1}{ab}<b\cdot\frac{1}{ab}, \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{1}{b}<\frac{1}{a}.$$

Entsprechend erhält man den zweiten Teil der Behauptung.

Mit der *Kleinerbeziehung* $<$ ist zugleich die *Größerbeziehung* $>$ gegeben; sie wird folgendermaßen definiert:

$a>b$ gilt genau dann, wenn $b<a$ gilt.

Prinzipiell käme man mit der Kleinerbeziehung aus. Es ist jedoch bequem, mit beiden Beziehungen zu arbeiten; oft ist eine der beiden aus Gründen der Einprägsamkeit vorzuziehen.