NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUES

Mathématiques supérieures
Mathématiques spéciales
Premier cycle des Universités

A. DONEDDU

Structures fondamentales

TOME 1

VUIBERT

Structures fondamentales

DU MÊME AUTEUR

Enseignement.

- **Arithmétique générale,** *Dunod,* Paris, 1962 (traduit en italien par Feltrinelli, Milan, 1967).
- **Les bases de l'analyse mathématique moderne,** *Dunod,* Paris, 2e édition, 1971 (traduit en iranien par Franklin Book Program, Téhéran, 1974).
- **Géométrie euclidienne plane,** *Dunod,* Paris, 1965.
- **Cours de mathématiques supérieures et spéciales** (4 tomes, ancien programme), *Dunod,* Paris, 3e édition, 1973 (traduit en espagnol par Aguilar, Madrid).

Recherche.

- **Mesure des angles. Groupes rotatifs.** *Archiv der Mathematik,* Stuttgart, Fasc. 5, Vol. XIX, 1968.
- **Géométries planes ordonnées.** *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo,* Série II, tome XIX, 1970.
- **Orthogonalisateurs sur les espaces gauches,** *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo,* série II, tome XIX, 1970.
- **Sur les extensions quadratiques des corps non commutatifs,** *Journal of Algebra,* New York, Vol. 18, N° 4, 1971.
- **Structures géométriques d'extensions finies des corps non commutatifs,** *Journal of Algebra,* New York, Vol. 23, N° 1, 1972.
- **Extensions pseudo-linéaires finies des corps non commutatifs,** *Journal of Algebra,* New York, Vol. 28, N° 1, 1974.

A paraître prochaînement dans *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* :

- **Anneaux polynômiaux à deux variables.**
- **Anneaux hexaphiques d'une variable.**
- **Extensions hexaphiques des corps non commutatifs.**

A LA MÊME LIBRAIRIE

NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUES

Structures fondamentales, tome 1, volume 16×24, de 232 pages.

Polynômes et Algèbre linéaire, tome 2, volume 16×24, de 320 pages.

Espaces euclidiens et hermitiens. Géométries, tome 3, volume 16×24, de 288 pages.

Topologie. Fonctions réelles d'une variable réelle, tome 4, volume 16×24, de 320 pages.

Fonctions vectorielles. Séries. Equations différentielles, tome 5, volume 16×24, de 344 pages.

Géométrie différentielle. Intégrales multiples, tome 6, volume 16×24 de 380 pages.

Nouveau cours de mathématiques

Mathématiques supérieures
Mathématiques spéciales
Premier cycle des Universités

par

A. DONEDDU

Professeur de chaire supérieure
(mathématiques spéciales)
au lycée Hoche à Versailles

Tome 1

Structures fondamentales

2[e] édition revue

LIBRAIRIE VUIBERT, 63, boulevard Saint-Germain, 75005 PARIS
1979

DIFFUSEURS VUIBERT

BELGIQUE : ÉDITIONS ET DIFFUSION,
16, rue de Chambéry, 1040 BRUXELLES.

CANADA : PRESSES DE L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC,
CP 250 - Station N, MONTRÉAL H2X 3M4.

MAROC : SMER-DIFFUSION,
3, rue Ghazza, RABAT.

SUISSE : DELACHAUX et NIESTLÉ *(Service diffusion)*,
39, route d'Oron, 1002 LAUSANNE.

ISBN : 2-7117-2026-8

Avant-propos

Ce nouveau Cours de Mathématiques est conforme aux programmes officiels fixés par l'Arrêté ministériel du 4 février 1972 pour les classes de Mathématiques Supérieures et de Mathématiques Spéciales.

Ces programmes seront couverts par les six tomes suivants :

Tome 1 : Structures fondamentales.
Tome 2 : Polynômes et Algèbre linéaire.
Tome 3 : Espaces euclidiens et hermitiens. Géométries.
Tome 4 : Topologie. Fonctions réelles d'une variable réelle.
Tome 5 : Fonctions vectorielles. Séries. Équations différentielles.
Tome 6 : Géométrie différentielle. Intégrales multiples.

Chaque tome est divisé en chapitres, chaque chapitre en sous-chapitres, chaque sous-chapitre en paragraphes, numérotés dans l'ordre de cette division, de façon que le lecteur puisse retrouver rapidement une partie citée dans l'exposé : par exemple, la numérotation 2, 1, 5 désigne le chapitre 2, sous-chapitre 1, paragraphe 5.

L'index aidera le lecteur à retrouver rapidement une définition ou une propriété : le nombre en regard du mot désigne la page où la notion correspondante est introduite pour la première fois.

Ce cours a été rédigé de façon que l'essentiel, et seulement l'essentiel, soit dit pour chaque notion introduite. L'étudiant ne se perdra pas dans un dédale de détails et de compléments qui lui laisserait croire que la Mathématique est impénétrable.

Présentation du Tome 1.

Les notions premières, dont l'exposé cohérent présente de sérieuses difficultés d'ordre logique et d'ordre pédagogique, sont ici présentées d'une manière simple et accessible à l'étudiant moyen. Le vocabulaire de base, déjà rencontré dans les études secondaires, est défini dans un langage courant qui met le lecteur en confiance.

Les éléments indispensables (et seulement ceux-là) sur les groupes, anneaux et corps sont exposés sans déborder de la lettre et de l'esprit du programme officiel qui est déjà assez copieux ! L'accent est mis sur les groupes et anneaux ordonnés, puisque la topologie de base sur les nombres réels est essentiellement fondée sur l'ordre.

C'est pourquoi le corps des nombres réels est défini comme corps ordonné tel que toute partie majorée admet un plus petit majorant. Cette propriété caractéristique des nombres réels familiarise le lecteur avec la notion de borne supérieure si utile pour la suite (par exemple, la théorie de l'intégration sera fondée sur cette notion dans le tome 4). La preuve que c'est une propriété caractéristique des nombres réels est obtenue grâce aux suites de Cauchy, de nombres rationnels, ou plus restrictivement de nombres b-naires. On définit les valeurs approchées b-naires par défaut et par excès d'un nombre réel, d'où la figuration d'un nombre réel dans la base b.

La mode actuelle consiste à présenter la Géométrie élémentaire (c'est-à-dire l'étude de l'espace physique où nous vivons et que nous percevons sensoriellement) comme cas particulier de l'étude des espaces vectoriels abstraits généraux. Les étudiants, sortant de l'enseignement secondaire, connaissent certains éléments de cette Géométrie élémentaire que nous rappelons brièvement dans ce tome, sans développer systématiquement l'étude des espaces vectoriels (ce développement fera l'objet des tomes 2 et 3). On rappelle simplement ici la définition des espaces vectoriels, puis les propriétés élémentaires du plan $\mathbf{R}^2$ et celles du produit scalaire.

Quelle que soit la manière de présenter la Géométrie, qu'on la fonde sur une axiomatique purement géométrique, ou bien sur l'axiomatique des espaces vectoriels, il faut bien, à un certain moment, introduire les angles et leur mesure, et l'argument d'un nombre complexe. Pour se débarrasser de ce problème gênant, certains disent en Classe préparatoire que l'étude des angles a été faite en Terminale, d'autres disent en Terminale qu'elle sera expliquée dans une classe ultérieure.

Dans ce tome 1, une étude détaillée des angles est donnée, les rotations étant définies comme permutations du plan complexe, avec une démonstration élémentaire du théorème fondamental de l'isomorphisme du groupe des rotations sur le tore [cette démonstration est fondée sur une publication personnelle parue en 1968 dans la revue scientifique *Archiv der Mathematik* (Stuttgart)]. Cette démonstration est très accessible à un étudiant de Mathématiques Supérieures. Il pourra ainsi comprendre ce théorème difficile, mais d'un emploi courant, dès ses débuts dans l'Enseignement Supérieur. Il ne lui sera pas nécessaire d'attendre jusqu'en Mathématiques Spéciales pour avoir peut-être une démonstration de cette propriété comme application des séries dans le champ complexe, alors qu'il a déjà utilisé l'argument d'un nombre complexe depuis plus de deux ans !

A. Doneddu

Sommaire

Chapitre 9. — Mesure des angles

Chapitre 10. — Argument d'un nombre complexe

Chapitre 1

Ensembles et relations

1,1. Vocabulaire de base

1,1,1. Ensembles et éléments

En Mathématique, on étudie des objets de différents types : par exemple, des *points*, des *nombres*, des *vecteurs*. Ces objets ou *éléments* forment, en vertu de certaines propriétés, des collections ou *ensembles*.

Les théories qui se présentent concernent chacune l'étude d'une certaine collection nommée *ensemble de base* de la théorie. Par exemple, en *Géométrie*, l'élément de base est le *point* et l'ensemble de base, la collection de tous les points.

En Arithmétique, l'élément de base est le *nombre naturel* et l'ensemble de base, ensemble de tous les nombres naturels, est noté **N**. On notera, en général, un élément par une lettre minuscule (l'élément a) et un ensemble par une lettre majuscule (l'ensemble A).

1,1,2. Relations

Les éléments d'un ensemble sont susceptibles d'avoir entre eux, ou avec ceux d'un autre ensemble, certaines *relations*.

Par exemple, la *relation d'appartenance*, qui s'énonce « a appartient à l'ensemble A » et se note $a \in A$.

La négation de cette relation est une autre relation qui s'énonce « a n'appartient pas à l'ensemble A » et se note $a \notin A$.

La *relation d'égalité* s'énonce « a égale b » et se note $a = b$.

La négation de cette relation s'énonce « a distinct de b » et se note $a \neq b$.

La *relation d'inclusion* est définie comme suit :

Définition.

On dit qu'un ensemble A *est* ***inclus*** *dans un ensemble* B *si tout élément de* A *appartient à* B.

On note alors $A \subset B$ et on lit « A est inclus dans B ». Cette relation est synonyme de la relation $B \supset A$, qui se lit « B contient A ». Il est à noter que « tout élément de A appartient à A », donc $A \subset A$.

La *relation d'égalité* de deux ensembles est définie comme suit :

Définition.

On dit que ***l'ensemble*** A ***est égal à l'ensemble*** B *(et l'on note* $A = B$*) si l'on a simultanément* $A \subset B$ *et* $B \subset A$.

La négation de cette relation s'énonce « Il existe, dans l'un des deux ensembles, un élément n'appartenant pas à l'autre » et se note $A \neq B$ qui se lit « A différent de B ».

1,1,3. Symboles logiques

Prenons un exemple : soit $A \subset B$. Cela veut dire que *tout* élément de A appartient à B. On note alors

$$(\forall a) \qquad a \in A \Longrightarrow a \in B.$$

Le symbole $\forall$ est un *quantificateur* qui se lit « quel que soit ».

Le symbole $\Longrightarrow$ représente une *implication* qui est la relation fondamentale du raisonnement logique : de l'*hypothèse* $(\forall a)$ $a \in A$, on déduit la *conséquence* $a \in B$ (ce qui permet d'affirmer $A \subset B$). Cette *déduction* est une démarche de l'esprit que l'on a nommée implication. D'une façon générale, une implication est une relation entre une *proposition* $\mathscr{A}$, nommée *hypothèse*, et une proposition $\mathscr{B}$, nommée *conséquence* :

$$\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B} \qquad \text{(se lit : « } \mathscr{A} \text{ implique } \mathscr{B} \text{ »).}$$

Le procédé de déduction logique est caractérisé par la *transitivité* de l'implication :

$$\text{si } (\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B} \text{ et } \mathscr{B} \Longrightarrow \mathscr{C}) \qquad \text{alors} \qquad \mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{C}.$$

Si l'on a, à la fois, $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ et $\mathscr{B} \Longrightarrow \mathscr{A}$, on note : $\mathscr{A} \Longleftrightarrow \mathscr{B}$ et on lit « $\mathscr{A}$ équivaut logiquement à $\mathscr{B}$ ».

Prenons un autre exemple : nous savons que la proposition « Il existe dans A un élément a n'appartenant pas à B » entraîne la proposition « A n'est pas inclus dans B ». Cette propriété se note

$$((\exists a) \quad a \in A; \qquad a \notin B) \Longrightarrow A \not\subset B.$$

Le symbole $\exists$ est un *quantificateur* qui se lit « Il existe ».

Pour prouver l'implication $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$, on peut utiliser ce qui est nommé, bien improprement, le *raisonnement par l'absurde :* on prend en hypothèse la négation de la conséquence $\mathscr{B}$ (notée non $\mathscr{B}$) et l'on montre que cette négation implique la négation de l'hypothèse $\mathscr{A}$ (notée non $\mathscr{A}$). En d'autres termes

$$(\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}) \text{ équivaut logiquement à } (\text{non } \mathscr{B} \Longrightarrow \text{non } \mathscr{A}).$$

1,1,4. Partie d'un ensemble. Ensemble des parties

Définition.

Soit E *un ensemble. On appelle* ***partie*** *de* E *(ou* ***sous-ensemble*** *de* E*) tout ensemble* A *vérifiant* $A \subset E$.

Par exemple, dans l'ensemble **N** des nombres naturels, la propriété de divisibilité par 2 définit une partie de **N**, l'ensemble A des nombres pairs. Un nombre naturel x appartient à A s'il existe un nombre naturel y tel que $x = 2y$. On note alors

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid \exists y \in \mathbf{N}; \quad x = 2y\}.$$

Toute partie A d'un ensemble E est définie par une certaine propriété $\mathscr{P}$. On note, de façon générale, $A = \{x \in E \mid \mathscr{P}\}$.
Ainsi E tout entier est une partie de E définie en particulier par

$$E = \{x \in E \mid x = x\}.$$

La partie de E n'ayant aucun élément se nomme ***partie vide*** de E et se note $\varnothing$. Comme il n'existe aucun élément distinct de lui-même, on a

$$\varnothing = \{x \in E \mid x \neq x\}.$$

Toutes les parties de E constituent un nouvel ensemble, que l'on note $\mathscr{P}(E)$ et que l'on nomme ***ensemble des parties de*** E.
On a les équivalences logiques suivantes :

$$A \in \mathscr{P}(E) \Longleftrightarrow A \subset E,$$
$$\{a\} \in \mathscr{P}(E) \Longleftrightarrow a \in E.$$

Rappelons aussi que $E \in \mathscr{P}(E)$ et $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$.

1,1,5. Produit de deux ensembles

A deux objets quelconques a et b, on peut associer un nouvel objet, le ***couple ordonné*** (a, b). Le premier objet a est pris dans un ensemble quelconque E, le second objet b dans un ensemble quelconque F. Ces couples (a, b) sont des éléments d'un nouvel ensemble, que l'on nomme ensemble produit de E par F.

Définition.

Soit E *et* F *deux ensembles. On appelle* ***ensemble produit*** *de* E *par* F *(noté* $E \times F$*), l'ensemble des couples* (a, b)*, avec* $a \in E$ *et* $b \in F$.

Pour l'égalité de deux couples, on a l'équivalence logique suivante :

$$(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow (a = c \quad \text{et} \quad b = d).$$

On a aussi, de toute évidence,

$$\begin{aligned} E \times F = \varnothing &\Longleftrightarrow (E = \varnothing \quad \textbf{\textit{ou}} \quad F = \varnothing), \\ E \times F \neq \varnothing &\Longleftrightarrow (E \neq \varnothing \quad \textbf{\textit{et}} \quad F \neq \varnothing). \end{aligned}$$

Dans le cas où $E = F$, le produit $E \times F$ se note aussi E^2. Alors les couples (a, b) et (b, a) sont simultanément admissibles pour deux éléments quelconques a et b de E et l'on a

$$(a, b) = (b, a) \Longleftrightarrow a = b.$$

On appelle ***diagonale*** de E^2 l'ensemble des couples (a, a), avec $a \in E$.

1,1,6. Intersection. Réunion. Complémentaire

Considérons un ensemble E. Nous allons définir dans $\mathscr{P}(E)$ deux *lois de composition internes :*

Intersection :

A tout couple $(A, B) \in \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E)$, *associons une partie de* E, *nommée* ***intersection de*** A ***et*** B, *notée* $A \cap B$ *et définie par*

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \quad \textbf{\textit{et}} \quad x \in B\}.$$

Deux parties A et B sont dites disjointes si $A \cap B = \varnothing$.

Réunion :

A tout couple $(A, B) \in \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E)$ *associons une partie de* E, *nommée* ***réunion de*** A ***et*** B, *notée* $A \cup B$ *et définie par*

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \quad \textbf{\textit{ou}} \quad x \in B\}.$$

On a évidemment $A \cup B = \varnothing \Longrightarrow (A = \varnothing \quad \text{et} \quad B = \varnothing)$.
Les deux lois sont *commutatives :*

$$A \cap B = B \cap A \qquad \text{et} \qquad A \cup B = B \cup A.$$

Elles sont toutes deux *associatives :*

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C, \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C. \end{aligned}$$

Elles sont *distributives* l'une pour l'autre :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Complémentaire :

Soit A *et* B *dans* $\mathscr{P}(E)$ *telles que* $A \subset B$. *On nomme* ***complémentaire*** *de* A *dans* B *et l'on note* $B - A$, *la partie de* E *définie comme suit :*

$$B - A = \{x \in E \mid x \in B \quad \text{et} \quad x \notin A\}.$$

Si l'on suppose $B \subset A$, on a les relations évidentes suivantes :

$$B \cup (A - B) = A, \qquad A - A = \varnothing,$$
$$B \cap (A - B) = \varnothing, \qquad A - \varnothing = A.$$

Le complémentaire de la réunion est égal à l'intersection des complémentaires. Pour deux parties quelconques A et B de E, on a

$$E - (A \cup B) = (E - A) \cap (E - B).$$

Le complémentaire de l'intersection est égal à la réunion des complémentaires :

$$E - (A \cap B) = (E - A) \cup (E - B).$$

1,1,7. Correspondances. Relations binaires

Soit E et F deux ensembles et R une partie non vide de $E \times F$. Considérons tous les couples (a, b) vérifiant $(a, b) \in R$. On notera alors $a \mathscr{R} b$ pour un tel couple :

$$(a, b) \in R \subset E \times F \Longleftrightarrow a \mathscr{R} b.$$

$\mathscr{R}$ se nomme ***correspondance de*** E ***vers*** F et R se nomme ***graphe*** de $\mathscr{R}$. E est l'***ensemble de départ,*** F l'***ensemble d'arrivée*** de la correspondance $\mathscr{R}$.

On appelle ***ensemble de définition*** de la correspondance $\mathscr{R}$ la partie A de E définie comme suit :

$$A = \{a \in E \mid \exists b \in F;\ a \mathscr{R} b\}.$$

On appelle ***ensemble image*** de la correspondance la partie B de F définie comme suit :

$$B = \{b \in F \mid \exists a \in E;\ a \mathscr{R} b\}.$$

On note alors $B = \mathscr{R}(A)$.

Définition.

Soit E *un ensemble. On appelle* ***relation binaire*** *sur* E *toute correspondance de* E *vers* E.

Nous venons de voir quelques exemples de relations binaires sur un ensemble.

1. La *relation d'égalité* $a = b$ sur un ensemble E dont le graphe R est la ***diagonale*** de E^2, ensemble des (a, a) quand a parcourt E. L'ensemble de définition A et l'ensemble image $\mathscr{R}(A)$ coïncident avec E.

2. La *relation d'inclusion* $A \subset B$ est une relation binaire dans $\mathscr{P}(E)$. L'ensemble de définition et l'ensemble image coïncident avec $\mathscr{P}(E)$ tout entier.

1,2. Applications

1,2,1. Définitions

Soit E et F deux ensembles et R une partie de $E \times F$. Dans la correspondance $\mathscr{R}$ de graphe R, à un élément x de E ne correspond pas toujours un élément y dans F. Pour que x ait au moins un correspondant dans F, il est nécessaire et suffisant que x appartienne à l'ensemble de définition. Lorsque cette condition est réalisée, le correspondant de x dans F n'est pas nécessairement unique. Nous allons nous intéresser aux correspondances de E vers F dont le champ de définition est E tout entier et telles que le correspondant de tout x de E est unique.

Définition.

Soit E *et* F *deux ensembles. On appelle* ***fonction*** *ou* ***application*** *de* E *dans* F, *tout triplet* (E, F, f) *tel que* f *soit une correspondance de* E *vers* F *vérifiant les deux conditions suivantes :*

1. *le champ de définition de* f *est* E *tout entier,*
2. *à tout* x *de* E, f *fait correspondre un* y *unique dans* F.

Cet y se nomme alors l'***image*** de x et se note $y = f(x)$.
L'ensemble image de l'application est

$$f(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E; \quad y = f(x)\}.$$

On note aussi $f(E) = \operatorname{im} f$.

Tout élément de F n'est pas nécessairement l'image d'un élément de E.

Le graphe de la fonction est l'ensemble des $(x, f(x))$ quand x parcourt E. C'est une partie de $E \times f(E)$.